PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

F. LATREILLE

Nombres transfinis relatifs et rationnels

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1967, tome 4, fascicule 3
, p. 9-14
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1967__4_3_9_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1967 t.4-3

NOMBRES TRANSFINIS RELATIFS ET RATIONNELS

F. LATREILLE

1°) Introduction(*)

Sierpinski a montré que tout ordinal ξ non nul peut, et cela d'une seule manière, se mettre sous la forme d'une somme finie de puissances décroissantes de ω; nous écrirons :

$$\xi = n_1\omega^{\alpha_1} \dot{+} \ldots \dot{+} n_k\omega^{\alpha_k} \qquad \text{(forme normale)}$$

$n_1,\ldots,n_k$ étant des nombres naturels non nuls, et $\alpha_1,\ldots,{}_k$ une suite strictement décroissante d'ordinaux.

Hessenberg a défini sur les ordinaux ainsi écrits des opérations commutatives dont la définition est formellement celle des polynomes. Ces opérations sont distinctes des opérations ordinales ; ainsi :

	$(3\omega^2+1) + (\omega+3) = 3\omega^2+\omega+4$	(addition naturelle)
alors que	$(3\omega^2\dot{+}1) \dot{+} (\omega\dot{+}3) = 3\omega^2\dot{+}\omega\dot{+}3$	(addition ordinale)
de même,	$(3\omega^2+1) \times (\omega+3) = 3\omega^3+9\omega^2+\omega+3$	(multiplication naturelle)
alors que	$(3\omega^2\dot{+}1) \dot{\times} (\omega\dot{+}3) = 3\omega^3\dot{+}9\omega^2\dot{+}1$	(multiplication ordinale)

Cependant il y a identité pour les sommes de puissances décroissantes ; ainsi tout ordinal est égal à la somme, au sens de Hessenberg, des termes de sa forme normale (l'ordre peut alors être pris quelconque).

Sikorski a défini, à partir de certains ensembles d'ordinaux stables pour les opérations naturelles, des ensembles ordonnés de structure algèbrique simple (anneaux et corps) mais dont les propriétés relatives à l'ordre sont

(*) Cet exposé suppose connue, au moins sommairement, l'arithmétique classique des ordinaux ; les autres notions seront introduites en temps utile.

intéressantes. Ainsi sous une certaine réserve relative à l'ordinal μ, on démontre :

1°) pour qu'une partie X de l'anneau C_μ soit bornée, il faut et il suffit que Card X < Card C_μ.

2°) pour qu'une partie bornée X du corps W_μ ait un point d'accumulation, il faut et il suffit que Card X = Card W_μ.

Il semble en outre que les anneaux C_μ (dont le type d'ordre est dispersé) contiennent tous les ensembles totalement ordonnés de type dispersé. Cette hypothèse avait déjà été formulée par M. FRAISSE mais nous n'en possèdons pas encore de démonstration définitive. Par contre nous avons pu résoudre plusieurs questions relatives soit aux opérations soit à l'ordre ; par exemple :

1°) dans C_μ, tout nombre possède une décomposition en produit fini de nombres premiers, unique à l'ordre près ;

2°) dans W_μ, il n'existe aucun nombre entre les entiers et les $\frac{\omega}{n}(n \in N)$.

2°) Définition des nombres transfinis relatifs (*).

D'après le théorème précédemment cité de Sierpinski, tout ordinal autre que 0 peut être identifié à la suite double $\begin{pmatrix}\alpha_1 \dots \alpha_k\\ n_1 \dots n_k\end{pmatrix}$ de ses exposants et de ses coefficients avec les conditions $\alpha_1 > \dots > \alpha_k$ et $n_1, \dots, n_k \in N-\{0\}$

Nous appellerons transfini relatif toute suite double $\begin{pmatrix}\alpha_1 \dots \alpha_k\\ n_1 \dots n_k\end{pmatrix}$ où $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ est une suite strictement décroissante, donc finie, d'ordinaux, et $n_1, \dots, n_k \in Z-\{0\}$ la suite double vide sera notée 0. Pour faciliter certains calculs il pourra nous arriver de permuter les termes (c.à.d. les couples (α_i, n_i)) ou d'adjoindre des termes nuls (c.à.d. de la forme $(\alpha, 0)$).

Notons qu'en groupant les termes dont les coefficients ont même signe on fait apparaitre la possibilité de considérer un transfini relatif comme couple d'ordinaux n'ayant pas d'exposants communs, ou encore comme classe de couples d'ordinaux obtenus à partir du précédent par adjonction de termes

(*) Terminologie et mode de définition de M. FRAISSE.

égaux quelconques.

Nous identifierons les ordinaux aux transfinis relatifs à coefficients tous positifs. Nous additionnerons les transfinis relatifs comme les polynomes : soit $a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_k \\ n_1 \dots n_k \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} \beta_1 \dots \beta_k \\ m_1 \dots m_k \end{pmatrix}$; si un β_j ne figure pas dans la suite des α_i, le terme $\begin{pmatrix} \beta_j \\ m_j \end{pmatrix}$ sera placé dans la suite des termes de a de manière à conserver la décroissance de la suite supérieure ; si un β_j est en même temps un α_i, on ajoutera m_j à n_i (et on supprimera le terme dans le cas où $m_j+n_i = 0$). Les propriétés de commutativité et d'associativité sont évidentes ; 0 est neutre ; tout nombre a un opposé : les propriétés de la loi de groupe sont satisfaites.

Proposition 1 : pour tout ordinal γ, l'ensemble des transfinis relatifs d'exposants $<\gamma$ est un groupe. Notons que tout transfini relatif est égal à la somme de ses termes.

Nous conviendrons de déclarer positif tout nombre dont le 1° coefficient est un entier positif, et de déclarer a supérieur à b si a-b est positif.

Nous multiplierons les transfinis relatifs comme les polynômes, en prenant soin d'appliquer aux exposants l'addition commutative qui vient d'être définie (ce qui implique de les considérer eux-mêmes comme des transfinis, ce qui a été convenu précédemment). Nous pouvons d'ailleurs nous contenter de poser $\binom{\alpha}{n} \cdot \binom{\beta}{m} = \binom{\alpha+\beta}{mn}$ et de postuler la distributivité. La commutativité et l'associativité étant évidentes, les propriétés de la loi d'anneau sont satisfaites.

Proposition 2 : pour tout ordinal ϕ, l'ensemble des transfinis relatifs d'exposants $<\omega^{\phi}$ est un anneau.

Cet anneau, que nous noterons Z_{ϕ}, est unitaire et intègre(*).

(*) Sikorski n'étudie que le cas où ϕ est un ordinal initial, soit $\phi = \omega_{\mu}$; il note C_{μ} pour Z_{ω}.

Nous conviendrons enfin de noter ω^α pour $\binom{\alpha}{1}$; alors il vient :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \ldots \alpha_k \\ n_1 \ldots n_k \end{pmatrix} = n_1 \omega^{\alpha_1} + \ldots + n_k \omega^{\alpha_k}$$

3°) Propriétés des transfinis relatifs.

Théorème 1 : Soit a un transfini relatif quelconque de degré Λ a ; soit Ω_γ l'ordinal $\omega^{(\omega\gamma)}$:

(α) a a un précédent et un suivant immédiats : ce sont a-1 et a+1.

(β) il existe des ordinaux ϕ tels que $a \in Z_\phi$.

(γ) il existe un ordinal ϕ_1 tel que $a \in Z_{\phi_1+1}$ et $a \notin Z_{\phi_1}$; de plus il existe des entiers $s, r_1, \ldots r_s$ et des transfinis $a_1, \ldots, a_s$ tels que

$$a = \sum_{i=1}^{s} a_i \Omega_{\phi_1}^{r_i}$$

(δ) il existe un entier t et des ordinaux $\phi_1 \ldots \phi_t$ tels que $a \in Z[\Omega_{\phi_1} \ldots \Omega_{\phi_t}]$

(ε) a est égal au produit d'un nombre fini de transfinis relatifs premiers, et cette factorisation est unique aux signes près et à l'ordre des facteurs près.

Théorème 2 : Soit X un ensemble quelconque de transfinis relatifs :

(α) il existe des transfinis relatifs qui majorent X et des transfinis relatifs qui le minorent.

(β) il existe des ordinaux ϕ tels que $X \subset Z_\phi$

(γ) supposons $X \subset Z_\phi$; X est borné dans Z_ϕ si et seulement si l'ensemble des degrés de ses éléments non nuls est majoré par un ordinal $< \omega^\phi$.

(δ) supposons $X \subset Z_\phi$ avec ϕ régulier [*] et infini ; X est borné dans Z_ϕ si et seulement si card $X < \mathrm{card} Z_\phi$.

(ε) supposons $X \subset Z_\phi$ avec ϕ régulier et infini ; X est borné dans Z_ϕ si et seulement si son caractère [**] est $<\phi$.

Théorème 3 : Soit ϕ un ordinal régulier, et $(a_\xi)_{0\leq\xi<\phi}$ une ϕ-suite de transfinis relatifs.

(α) de la ϕ-suite (a_ξ) on peut extraire une sous-ϕ-suite constante ou une sous-ϕ-suite strictement monotone.

(β) si la ϕ-suite (a_ξ) est strictement croissante (resp. décroissante) il existe une ϕ-suite (b_ξ) strictement décroissante (resp. croissante) et adjacente à la précédente.

Théorème 4 : tout anneau commutatif totalement ordonné de caractère ϕ contient un sous-anneau isomorphe à Z_ϕ.

4°) Nombres transfinis rationnels.

Les anneaux Z_ϕ étant intègres, chacun peut être plongé dans son corps des fractions Q_ϕ. Nous appellerons donc transfinis rationnels les couples de transfinis relatifs étrangers (c.à.d. sans diviseurs communs - cf. th. 1 ε) Tout transfini rationnel appartient à un corps Q_ϕ ; les opérations sur ces nombres sont donc bien définies ainsi que leur comparaison[***].

Nous appellerons degré du transfini rationnel $z = \frac{x}{y}$ le transfini relatif $\Delta_z = \Delta x - \Delta y$.

Théorème 5 : aucun transfini relatif n'est compris entre les entiers et l'ensemble des $\frac{\omega}{n}$ $(n \in N-\{0\})$.

(*) Un ordinal est dit régulier si toute partie non majorée de φ (c. à. d. tout ensemble d'ordinaux ayant φ pour borne supérieure stricte) est isomorphe à φ ; exemple : ω est régulier.

(**) On appelle caractère (final) d'un ensemble totalement ordonné A le plus petit ordinal φ tel qu'il existe une φ -suite co-finale à A (c. à. d. une partie non majorée de A isomorphe à φ) ; tout caractère est un ordinal régulier.

(***) si φ est régulier , $\omega^\varphi = \varphi$ donc $\varphi = \psi$.

Théorème 6 : Soit ϕ et ψ deux ordinaux tels que $\phi = \omega^{\psi}$ (*) et X une partie de Q_{ϕ} ::

(α) X est borné dans Q_{ϕ} si et seulement si l'ensemble des degrés de ses éléments non nuls est majoré dans Z_{ψ} .

(β) si X est minoré par 0, X admet 0 pour borne inférieure si et seulement si l'ensemble des degrés de ses éléments n'est pas minoré dans Z_{ψ} .

(γ) si ϕ est régulier et supérieur à ω, alors X borné, card X = card$Z_{\phi} \Longrightarrow$ X a un point d'accumulation (c.à.d. de toute φ-suite bornée dans Z_{ϕ} on peut extraire une sous-φ-suite convergente).

Remarque : (γ) est faux pour $\phi = 0$ (pas de Bolzano-Weierstrass dans $Q = Q_0$)

Théorème 7 : tout corps commutatif totalement ordonné de caractère ϕ contient un sous-corps isomorphe à Z_{ϕ} .

Manuscrit remis le 31 janvier 1967.

F. LATREILLE
Faculté des Sciences
de Marseille.

(*) Sikorski note W_{μ} pour $Q_{\omega_{\mu}}$.