PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

J. F. PABION

Modèles élémentaires pour la théorie des ensembles

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1967, tome 4, fascicule 3
, p. 39-54
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1967__4_3_39_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1967 t.4-3

MODELES ELEMENTAIRES POUR LA THEORIE DES ENSEMBLES

J. F. PABION

Dans cet article, l'idée exposée aux journées de logique de la Faculté des Sciences de Lyon en 1967 est reprise et approfondie. On verra que l'abandon de l'axiome de l'ensemble des parties permet en fait d'aller beaucoup plus loin.

Nous avons le plus possible conservé le langage usuel, lorsque la formalisation ne présente pas de difficulté. Les signes usuels tels que $=$, $\in$, $\{x\}$, $x \cup y$ sont réservés à l'usage métamathématique.

La métathéorie ne nécessite pas l'usage intégral d'une axiomatique telle que celle de Zermelo-Fraenkel (ZF). Une extension d'ordre suffisant de l'arithmétique élémentaire convient. Lorsqu'il est question d'ordinaux (dans la métathéorie) on peut supposer qu'il s'agit d'ordinaux constructibles (au sens de Kleene).

La logique de base est le calcul des prédicats du 1er ordre, sans égalité.

I - Relations étagées :

On sait que la théorie des ensembles peut être construite à l'aide d'une seule notion primitive : l'appartenance. Cela implique que les notions usuelles, telles que couples, graphes, fonctions, etc... peuvent être définies en fonction de l'appartenance seule. Nous allons reprendre les procédés classiques à la lumière du concept de formule étagée, que nous allons d'abord expliquer.

1°) Formules étagées :

$L_\circ$ désigne un langage sans constantes individuelles, ayant un seul prédicat, ε , de poids 2. Une formule étagée primitive (f.e.p.) est une formule F pour laquelle il existe une suite finie de formules $F_\circ, F_1, \ldots, F_n$ telles que $F_n = F$ et que pour chaque $i<n$ on ait l'une des conditions suivantes :

- F_i est une formule élémentaire
- Il existe $j<i$ tel que $F_i = \neg F_j$
- Il existe $j,k<i$ tels que $F_i = F_j \vee F_k$, $F_j \wedge F_k$, $F_j \rightarrow F_k$ ou $F_j \leftrightarrow F_k$
- Il existe $j<i$ et des variables x et y tels que F_i soit l'une des

formules suivantes :

$$\exists x \left[x \varepsilon y \wedge F_j \right] \quad , \quad \forall x \left[x \varepsilon y \rightarrow F_j \right]$$

Soit S un ensemble d'énoncés (de $L_\circ$) :

une formule $F(x_1,\ldots,x_p)$ est dite S-étagée s'il existe une f.e.p. $F^*(x_1,\ldots,x_p)$ telle que

$$S \vdash \forall x_1 \ldots x_p \left[F(x_1,\ldots,x_p) \leftrightarrow F^*(x_1,\ldots,x_p) \right]$$

En particulier, une formule ϕ-étagée sera dite simplement étagée.

2°) - Exemples de formules étagées :

Les formules introduites ci-dessous ont toutes une interprétation naturelle lorsque ε est interprété par la relation d'appartenance. La vérification de leur caractère étagé est en général immédiate.

$x \subset y$ (inclusion) : $\forall u\, [\, u \varepsilon x \rightarrow u \varepsilon y\,]$

$x \equiv y$ (égalisé en extension) : $(x \subset y) \wedge (y \subset x)$

on a : $\vdash \forall xy\, [\, x \equiv y \longleftrightarrow \forall u\, [\, u \varepsilon x \longleftrightarrow u \varepsilon y\,]]$

$\forall u\, [\, u \varepsilon x \longleftrightarrow u \varepsilon y\,]$ est donc étagée, mais non étagée primitive.

$P(x,u,v)$ (x est la paire $\{u,v\}$) :

$$u \varepsilon x \wedge v \varepsilon x \wedge \forall t\, [\, t \varepsilon x \rightarrow t \equiv u \vee t \equiv v\,]$$

$c(x\ u,v)$ (x est le couple $\langle u,v \rangle$) :

Rappelons qu'on peut poser, suivant Kuratowski :

$$\langle u,v \rangle = \{\{u\},\{u,v\}\}$$

D'où $C(x,u,v) = \exists hk [\, h \varepsilon x \wedge k \varepsilon x \wedge P(x,h,k) \wedge P(h,u,u) \wedge P(k,u,v)\,]$

"z est un graphe construit sur x et y" conduit à la formule $G(z,x,y)$:

$$\forall t\, [\, t \varepsilon z \rightarrow \exists u\, v\, [\, u \varepsilon x \wedge v \varepsilon y \wedge C(t,u,v)\,]]$$

On verrait aussi que les notions suivantes :

-z est un ordre sur x

- z est une fonction de x vers y (en prenant fonction = graphe fonctionnel)

- z est une injection (resp : une surjection, une bijection) de x vers y.

s'expriment par des formules étagées.

Par contre, "z est un bon ordre sur x" ne peut être rendu par une formule étagée, mais par une formule A-étagée, où A désigne l'énoncé suivant :

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\, [\, z \subset x \rightarrow z \varepsilon y\,]$$

3°) - Aspect sémantique :

On considère les structures $\mathfrak{S} = \langle E, \bar{\varepsilon} \rangle$ où $\bar{\varepsilon}$ est une relation binaire sur E. Pour toute partie non vide B de E, $\mathfrak{S}_B$ désigne la structure induite par $\mathfrak{S}$ sur B. Pour tout $a \in E$, on définit par induction les ensembles $E^k(a)$:

$$E^0(a) = \{\, a\, \}$$

$$E^1(a) = \{ x \in E \mid \mathfrak{S} \models x\, \bar{\varepsilon}\, a \}$$

$$E^{k+1}(a) = \bigcup_{x \in E^k(a)} E^1(x)$$

Tout élément de $E^k(a)$ sera appelé k-élément de a.

Une partie M de E est dite :

transitive si pour tout a, $a \in M \Rightarrow E^1(a) \subset M$

inductive si pour tout a, $E^1(a) \subset M \Rightarrow a \in M$

parfaite si elle est transitive et inductive.

Exemples : . E est parfaite

. ϕ est transitive. Elle est inductive si et seulement si pour tout $a \in E$, $E^1(a) \neq \phi$.

. un élément est dit fondé s'il n'existe pas de suite infinie $\{a_0, a_1, \ldots, a_n \ldots\}$ telle que $a_0 = a$ et pour tout i, $a_{i+1} \bar{\varepsilon}\, a_i$. L'ensemble F des éléments fondés est parfait.

Proposition 1 : Soit S un ensemble compatible d'énoncés de L_0. Soit $F(x_1, \ldots, x_p)$ une formule S-étagée. On donne un modèle $\mathfrak{S} = \langle E, \bar{\varepsilon} \rangle$ de S, une partie transitive non vide M de E, telle que $\mathfrak{S}_M$ soit un modèle pour S. Quels que soient $a_1, \ldots, a_p \in M$:

$$\mathfrak{S} \models F(a_1, \ldots, a_p) \Longleftrightarrow \mathfrak{S}_M \models F(a_1, \ldots, a_p)$$

il suffit de raisonner avec F étagée primitive. Procéder alors par induction sur l'ordre de F (ou nombre d'occurrences de connecteurs dans F).

Remarque : - La notion de formule étagée n'est pas sans lien avec celle de relation absolue dans le sens de Gödel [3] . Dans ce dernier cas cependant il s'agit d'une notion syntactique. Dans son interprétation sémantique, les ensembles transitifs M sont définissables par une formule.

De même la notion introduite ici d'élément fondé est extérieure aux systèmes formels envisagés, bien qu'elle renvoie évidemment aux ensembles bien-fondés introduits dans ZF. pour prouver la compatibilité de l'axiome de régularité.

II - Modèles pour la théorie des ensembles.:

Dans ce § , nous décrivons une méthode permettant d'obtenir des modèles pour certains sous-systèmes de la théorie de Zermelo-Fraenkel.

On donne un langage L, dénombrable, de base $\mathbb{N}$, et comprenant au moins le prédicat ε et une famille infinie de prédicats monadiques $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
On donne aussi une correspondance de Gödel g, qui à tout assemblage A de L associe de manière univoque un entier positif g(A), appelé numéro de A.

Appelons formule de rang n toute formule de la forme :

$$r_n x \wedge F(x)$$

où F(x) est une formule à une variable libre x quelconque.

Pour $n \neq 0$, soit A_n l'ensemble des numéros des formules de rang n.

Posons $A_0 = \mathbb{N} - \bigcup\limits_{0<n} A_n$

En particulier, A_0 contient les numéros des formules de rang 0.

Tous les A_n sont infinis et deux à deux disjoints.

Si $n \in A_p$, nous dirons aussi que n est de rang p.

Appelons prédiagramme tout ensemble $\mathcal{D}$ d'énoncés de L tel que :

- $A \in \mathcal{D} \Longrightarrow$ il existe un énoncé élémentaire A' tel que $A = A'$ ou $A = \neg A'$
- Il n'existe pas d'énoncé A tel que $A \in \mathcal{D}$ et $\neg A \in \mathcal{D}$.

un prédiagramme est,un diagramme si de plus, pour tout énoncé élémentaire A, $A \in \mathcal{D}$ ou $\neg A \in \mathcal{D}$. Pour tout prédiagramme $\mathcal{D}$, soit $\bar{\mathcal{D}}$ le diagramme obtenu en adjoignant à $\mathcal{D}$ les négations des énoncés élémentaires qui ne sont pas dans $\mathcal{D}$.

Tout diagramme $\mathcal{D}$ détermine de façon canonique une structure $\mathfrak{S}(\mathcal{D})$ sur N

1°)- <u>Description de la méthode</u> :

On part des données suivantes :

- Sur chaque A_k, on introduit un ordre de type ω^2 :

$$A_k = \{a_\nu^k\}_{\nu<\omega^2}$$

- On donne un prédiagramme Δ répondant aux conditions suivantes :

. quels que soient n, $m \in \mathbb{N}$, $\neg(n\varepsilon m) \notin \Delta$

. Si $n\varepsilon m \in \Delta$, $n \in A_0$ et $m \notin A_0$.

. Si $n \in A_k$, $r_k n \in \Delta$ et si $n \notin A_k$, $\neg r_k n \in \Delta$

Cela étant, construisons une suite $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n, \ldots$ de prédiagramme comme suit :

. $\mathcal{D}_0 = \Delta$

. Supposons définis $\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n$ et définissons $\mathcal{D}_{n+1}$:

<u>1er cas</u> : n = 2k

Soit $B_k = A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_k$

Sur B_k, introduisons la relation d'équivalence suivante :

$a \sim b \quad (2k) \Leftrightarrow$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, $p\varepsilon a \in \mathcal{D}_{2k} \Longleftrightarrow p\varepsilon b \in \mathcal{D}_{2k}$

Pour chaque $a \in B_k$, soit $\hat{a}$ la classe de a.

$\hat{a}$ est fini ou dénombrable : rangeons les éléments de $\hat{a}$ dans un ordre lexicographique, en classant d'abord par rapport au rang, ensuite par rapport à l'ordre naturel. D'où une suite de type $\tau \leq \omega^2$: $\hat{a} = \{\{\alpha_\nu^a\}_{\nu<\tau_a}$

Pour chaque $\nu \neq 0$ et $<\tau_a$ on introduit alors l'énoncé $a_\nu^{k+1} \varepsilon \alpha_\nu^a$

<u>2e cas</u> : n = 2k+1

Soit $a \in A_{k+1}$: a est le numéro d'une formule de rang k+1, F(x).

Pour tout P tel que $\mathfrak{G}_{(\mathcal{D}_n)} \models F(p)$, on introduit $p\varepsilon a$.

Enfin on pose $\mathcal{D} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_n$.

La relation $\tilde{\varepsilon}$ définie par $n\tilde{\varepsilon}m \Longleftrightarrow n\varepsilon m\varepsilon\mathcal{D}$ définit une structure $\mathcal{G}$ sur N.

2°)- Propriétés de la structure obtenue :

Lemme 1 : Soient $a,b \in B_k$ et $n>2k$.

Si $a\sim b$ (2k) et $a \neq b$, $a\nsim b$ (n)

Posons $C = \hat{a} = \hat{b}$ relativement à $\mathcal{D}_{2k}$.

Dans C, a et b occupent des places différentes ν et μ, avec par exemple $\nu<\mu$.

Dans $\mathcal{D}_{2k+1}$, b reçoit a_{μ}^{k+1} que ne reçoit pas a.

a ni b ne reçoivent plus d'éléments de rang k+1 dans la suite des constructions. Donc a et b ne figurent plus dans une même classe.

Lemme 2 : Soient $a,\ b \in B_k$ et $n>2k$.

Si $a\sim b$ (n), alors $a = b$.

Les éléments de a et b de rangs $<k$ sont déjà attribués dans $\mathcal{D}_{2k}$.

Donc $a\sim b(2k)$ et il reste à appliquer le lemme 1.

Lemme 3 : Si $a \in A_k$, $E^{-1}(a) \subset B_{k+1}$

Supposons qu'il existe n, $n\in E$ (a) et $n\in A_{\ell}$ avec $\ell>k+1$.n n'a pu être introduit que dans la transition de $\mathcal{D}_{2(\ell-1)}$ à $\mathcal{D}_{2\ell+1}$. Donc il existe b dans $\hat{a}$ (modulo 2 $(\ell-1)$) qui occupe une place antérieure à celle de a.

D'après l'ordre choisi sur $\hat{a}$, le rang de b est $\leqslant k$.

Donc $a,b \in B_k$ et $a\sim b$ $(2(\ell-1))$ avec $2(\ell-1)>2k$

D'après le lemme 2, $a = b$, ce qui est contradictoire.

Lemme 4 : Soit $a \in A_k$. Pour que $n\in E^{1}(a)$, il faut et il suffit que $n\varepsilon a \in \mathcal{D}_{2k+1}$.

Pour $p>k$, a ne peut recevoir d'éléments que dans les transitions du type à $\mathcal{D}_{2p+1}$, les éléments reçus étant alors d'ordre p+1.

D'après le lemme 3, ceci est impossible.

On en déduit :

Proposition 2 : $E^1(a) = E^1(b) \Rightarrow a = b$.

En effet $E^1(a) = E^1(b) \Rightarrow a \sim b$ $(2k+1)$ si $a,b \in B_k$

On conclut par le lemme 2.

Lemme 5 : Soit $F(x_1,\dots,x_p)$ une formule de $L_\circ$. Quels que soient $a_1,\dots,a_p \in B_k$

$$\mathfrak{G}_{B_k} \models F(a_1,\dots,a_p) \Leftrightarrow \mathfrak{G}_{(\mathcal{D}_{2k})} \models F(a_1,\dots,a_p)$$

En effet, les 1-éléments des éléments de B_k qui sont de rang $\leqslant k$ sont attribués dès $\mathcal{D}_{2k}$.

Définition : soit $F(x_1,\dots,x_p)$ une formule de L.

Nous dirons qu'elle vérifie la condition (B) si pour tout entier k, il existe un entier m(k) tel que pour tout $n \geqslant m(k)$ et quels que soient $a_1,\dots,a_p \in B_k$:

$$\mathfrak{G} \models F(a_1,\dots,a_p) \Longleftrightarrow \mathfrak{G}(\mathcal{D}_n) \models F(a_1,\dots,a_p)$$

Exemples :

. Toute formule élémentaire vérifie la condition (B).

. Si F et G vérifient la condition (B) il en est de même de $\neg F$, $F \vee G$, $F \wedge G$, $F \rightarrow G$, $F \leftrightarrow G$.

Lemme 6 : Si $F(x,y_1,\dots,y_p)$ vérifie la condition (B), il en est de même de :

$$\exists x\,[x \varepsilon z \wedge F(x,y_1,\dots,y_p)] \quad \text{et} \quad \forall x\,[x \varepsilon z \rightarrow F(x,y_1,\dots,y_p)]$$

N.B. il se peut que z soit l'une des variables $y_1,\dots,y_p$.

Soit k un entier, et m(k+1) l'entier associé à F, relatif à k+1.

Soient $\mu = \operatorname{Sup}\{m(k+1), 2k+1\}$ et $n \geqslant \mu$.

On donne $a,b_1,\dots,b_p \in B_k$

Si $\mathfrak{G} \models \exists x\,[x \varepsilon a \wedge F(x,b_1,\dots,b_p)]$

il existe c tel que $c \in E^1(a)$ et $\mathfrak{G} \models F(c,b_1,\dots,b_p)$

$c \in E^1(a) \Rightarrow c \in B_{k+1}$.

Donc, puisque $n \geqslant m(k+1)$, $\mathfrak{S}(\mathcal{D}_n) \models F(c,b_1,\ldots,b_p)$.

De même, puisque $n \geqslant 2k+1$; $\mathfrak{S}(\mathcal{D}_n) \models c\varepsilon a$

Inversement, si $\mathfrak{S}(\mathcal{D}_n) \models \exists x[x\varepsilon a \wedge F(x,b_1,\ldots,b_p)]$

il existe c tel que $\mathfrak{S}(\mathcal{D}_n) \models c\varepsilon a$ et $\mathfrak{S}(\mathcal{D}_n) \models F(c,b_1,\ldots,b_p)$

Nécessairement, $c \in B_{k+1}$, donc $\mathfrak{S} \models F(c,b_1,\ldots,b_p)$

Corollaire : en particulier, toute formule étagée de $L_\circ$ vérifie la condition (B).

Lemme 7 : Soit $F(x,y_1,\ldots,y_p)$ une formule de L vérifiant la condition (B) et de plus la condition suivante :

Pour tout entier k, il existe p(k) tel que, quels que soient

$b_1,\ldots,b_p \in B_k$ et $a \in \mathbb{N}$.

$\mathfrak{S} \models F(a,b_1,\ldots,b_p) \Longrightarrow a \in B_{p(k)}$.

Quels que soient $b_1,\ldots,b_p \in \mathbb{N}$, il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que :

$$E^1(a) = \{n \mid \mathfrak{S} \models F(n,b_1,\ldots,b_p)\}$$

Soit $q = \operatorname{Sup}\{k,p(k)\}$

Posons $\mu = m(q)$ et soit la formule de rang μ, de numéro c :

$$r_p x \wedge F(x,b_1,\ldots,b_p)$$

Dans $\mathcal{D}_{2\mu}$, c reçoit exactement pour éléments les éléments n tels que $\mathfrak{S} \models F(n,b_1,\ldots,b_p)$.

Dans $\mathcal{D}_{2\mu+1}$ on construit l'élément a cherché.

3°)- Enoncés valides dans $\mathfrak{S}$:

Axiome d'extensionalité (E) : résulte de la proposition 2.

Axiome de la paire (P) :

Soit la formule : $\quad x \equiv y_1 \vee x \equiv y_2$

- Elle est étagée, donc vérifie la condition (B).

- Si $a,b \in B_k$ et si $\mathfrak{S} \models c\equiv a \vee c\equiv b$, alors $c = a$ ou $c = b$ donc $c \in B_k$.

On est dans les conditions du lemme 7 : quels que soient a et b il existe c tel que $E^1(c) = \{a,b\}$.

Axiome de réunion (U)

On part de la formule étagée.

$- \exists y_2 [\, x \varepsilon y_2 \wedge y_2 \;\; y_1]$

Quels que soient n et a, si $\mathfrak{S} \models \exists y_2 [\, n \varepsilon y_2 \wedge y_2 \varepsilon a]$, $n \in E^2(a)$.

Donc $a \in B_k \Longrightarrow n \in B_{k+2}$.

Donc pour tout a il existe b tel que $E^1(b) = \bigcup\limits_{x \in E^1(a)} E^1(x) = E^2(a)$

Schéma de séparation (S) :

Soit $F(x, y_1, \dots, y_p)$ une formule étagée.

Pour tout z, la formule :

$x \varepsilon z \wedge F(x, y_1, \dots, y_p)$ est étagée et vérifie les hypothèses du lemme 7.

Donc, quels que soient a, $b_1, \dots, b_p$ il existe c tel que :

$$E^1(c) = \{ n \mid \mathfrak{S} \models n \varepsilon a \wedge F(n, b_1, \dots, b_p) \}$$

C'est un cas particulier du schéma de séparation (le schéma général s'obtient en supprimant la condition "F étagée").

Axiome du produit (Pr) :

Soit la formule

(1) $\exists uv [\, u \varepsilon y \wedge v \varepsilon z \wedge C(x,u,v)]$

Etagée, elle vérifie la condition (B).

Soit la formule : $x \equiv y \vee x \equiv z$

qui vérifie les hypothèses du lemme 7 avec $p(k) = k$, $q = k$, $\mu = 2(k+1)+1$

Ceci montre que quels que soientaa, b, l'élément c tel que $E^1(c) = \{a,b\}$ est de rang $\leqslant 2k+3$ si $a, b \in B_k$. Donc l'élément d tel que $E^1(d) = \{\{a\},\{a,b\}\}$ est de rang $\leqslant 4k+9$.

(1) remplit donc les conditions du lemme 7.

Autrement dit, quels que soient a,b il existe c dont les 1-éléments sont les couples <u,v> avec $u \in E^1(a)$ et $v \in E^1(b)$.

N.B. Dans ZF, la construction du produit peut être dérivée de l'axiome de l'ensemble des parties et du schéma de séparation (même restreint aux formules étagées). Mais nous verrons que $\mathfrak{S}$ ne réalise pas nécessairement l'axiome de l'ensemble des parties.

4°)- Modèles spéciaux :

Nous allons maintenant préciser les conditions initiales, modifiant ainsi l'ensemble de la construction en vue du résultat désiré.

A°- Ordinaux - Entiers :

Voici quelques formules étagées :

Trans(x) : $\forall y \left[y \in x \longrightarrow y \subset x \right]$

A(x) : $\forall y \left[y \in x \longrightarrow \neg (y \in y) \right]$

B(x) : $\forall y \left[y \in x \longrightarrow \mathrm{Trans}(y) \right]$

C(x) : $\forall yz \left[y \in x \wedge z \in x \longrightarrow (y = z \vee y \in z \vee z \in y) \right]$

Trans(x) $\wedge$ A(x) $\wedge$ B(x) $\wedge$ C(x) signifie que x est transitif et que l'appartenance induit sur x une relation d'ordre (strict) total.

Si on adjoint la condition : Toute partie non vide de x a un plus petit élément pour l'ordre induit par l'appartenance, on obtient la définition de Von-Neumann pour les ordinaux. Soit Ord(x) la formule qui définit les ordinaux.

Assumons les axiomes E, P, U et le schéma S (restreint). On montre alors l'existence d'un ensemble vide unique 0 : 0 est un ordinal.

Si α est un ordinal, $\alpha \cup \{\alpha\}$ (qui existe par P et U) est un ordinal.

En particulier, 0, {o}, {o,{o}},...,{o,{o},{o,{o}},...} sont des ordinaux qui dans une interprétation naturelle représentant les entiers.

Un ordinal α est dit de 2e espèce si $x\in\alpha \Rightarrow x\cup\{x\}\in\alpha$ (on dit aussi que α est limite). Ceci s'exprime par une formule étagée L(x) :

$$\forall y\left[y\in x \to \exists z\left[z\in x \wedge (x\subset z \wedge x\in z \wedge \forall t\left[t\in z \to t\in x \vee t\equiv x\right]\right]\right]$$

Une forme de l'axiome de l'infini est alors :

(I) $\exists x\left[\mathrm{Ord}(x) \wedge L(x)\right]$

Tout élément d'un ordinal est un ordinal. Si α est un ordinal, les ordinaux de 2e espèce qui appartiennent à α sont donc les ensembles x vérifiant :

$$L(x) \wedge x\in\alpha$$

L étant étagée, ils forment un ensemble en vertu du schéma S . Si cet ensemble est non vide, il a un plue petit élément qui est le plus petit ordinal limite ω. En vertu de (I), il suffit de prendre l'ordinal $\alpha\cup\{\alpha\}$ où α est un ordinal limite quelconque, pour déterminer ω.

Les éléments de ω sont par définition les entiers.

Définition : Soit α un ordinal dénombrable. Nous dirons que $\mathfrak{S}$ est α-standard s'il existe une α-suite $\{a_\nu\}_{\nu<\alpha}$ d'entiers telle que, quels que soient $\nu,\tau<\alpha$, $a_\nu \tilde{\varepsilon} a_\tau$ ssi $\nu<\tau$.

Alors il est aisé de voir que les a_ν sont des ordinaux dans le modèle $\mathfrak{S}$.

Lemme 8 : Si $\mathfrak{S}$ est α-standard pour $\alpha\geq\omega$, alors (I) est valide dans $\mathfrak{S}$.

en effet, a_ω est tel que $\mathfrak{S} \models L(a_\omega)$.

Proposition 3 : Pour tout ordinal dénombrable α, il existe une structure $\mathfrak{S}$ α-standard qui ne vérifie par l'axiome (R) de régularité.

Supposons évidemment $\alpha\geq\omega$

Précisons pour cela le prédiagramme Δ:

Soit $\{a^\circ_\nu\}_{\nu\leq\alpha}$ la suite des éléments de $A_\circ$ rangés dans une $(\alpha+1)$-suite on introduit dans Δ les énoncés suivants :

. Si $\nu<\tau<\alpha$: $a^\circ_\nu \varepsilon\ a^\circ_\tau$

. $a^\circ_\alpha \varepsilon a^\circ_\alpha$

On voit que les classes modulo (o) sont toutes réduites à un élément. Donc les 1-éléments de a°_ν pour $\nu<\alpha$ sont les a°_τ tels que $\tau<\nu$.

Puisque $a^\circ_\alpha \bar{\varepsilon} a^\circ_\alpha$, l'axiome (R) est évidemment faux.

B)- <u>Axiome du choix (C)</u> :

Supposons que le langage L comprenne, outre ε, un prédicat binaire ρ, et introduisons dans Δ les énoncés suivants :

. si $n\leqslant m$, $n\rho m$

. si $n>m$, $\neg(n\rho m)$

Soit la formule suivante :

$$\exists v\, v\left[u\varepsilon y \wedge v\varepsilon y \wedge C(x,u,v) \wedge u\rho v\right]$$

Elle vérifie les conditions du lemme 7 : donc pour tout a les couples $\langle u,v\rangle$ tels que $u\bar{\varepsilon}a$, $v\bar{\varepsilon}a$ et $u\leqslant v$ forment les 1-éléments d'un élément b, qui est un bon ordre sur a

C)- <u>Enumérabilité</u> :

Supposons que L contienne, outre ε et ρ, un prédicat binaire ϱ interprété par l'égalité et 2 prédicats ternaires représentant la somme et le produit dans N. Alors $\mathfrak{S}(\Delta)$ contient un modèle standard de l'arithmétique.

En particulier toute relation récursive y est représentable au sens strict, par une formule ne contenant pas ε.

Soit un modèle $(\omega+1)$-standard, dans lequel l'ensemble des entiers est <u>récursif</u>.

L'application : $n \longrightarrow a^\circ_n$ est donc une bijection récursive. Donc il existe dans L une formule F(x,y) telle que, quels que soient n et p :

$$\mathfrak{S}(\Delta)\models\ F(n,p)\Longleftrightarrow p = a^\circ_n \ .$$

Notons que F vérifie la condition (B).

Soit ω l'ensemble des entiers (dans $\mathcal{G}$). Considérons la formule suivante :

$$\exists u\, v\, [v \in \omega \wedge u \in y \wedge C(x,v,u) \wedge F(u,v)]$$

on peut lui appliquer le lemme 7 : pour tout a, l'ensemble des couples $<n, a^{\circ}_{n}>$ tels que $n \in E^1(a)$ existe. Ceci est le graphe d'une injection de a dans ω.

Donc il est compatible d'assumer, avec E,P,$\cup$ Pr,S,I l'énoncé suivant :

(E_n) "Pour tout ensemble a, il existe une injection de a dans ω".

On peut montrer, en reproduisant le raisonnement cantorien classique, que ceci implique la négation de l'axiome de l'ensemble des parties (P_{α})

Toutefois :

Proposition 4 : Si $\mathcal{G}$ est $(\omega+1)$-standard, l'énoncé suivant est valide :

(P_f) "Pour tout ensemble a, il existe un ensemble b dont les éléments sont les parties finies de a".

Appelons ensemble fini un ensemble a tel qu'il existe un entier ν et une bijection de ν sur a. Si $\mathcal{G}$ est $(\omega+1)$-standard, les entiers de $\mathcal{G}$ sont finis (dans le métasystème), donc a est fini dans $\mathcal{G}$ ssi $E^1(a)$ est fini.

Si $a \in B_k$, le graphe d'une bijection d'un entier sur a est au plus de rang $2(4k+9)+1$. Ceci montre que la formule F(x) qui signifie : "x est fini" vérifie la condition (B), et que $F(x) \wedge (x \subset y)$ vérifie les conditions du lemme 7.

D)- Axiome de régularité :

Lemme 9 : Si $\mathcal{G}$ est un modèle pour (E,P,U,S,I,C,Pr) α-standard, pour toute partie parfaite M de $\mathbb{N}$, $\mathcal{G}_M$ est un modèle α-standard pour le même système.

Exemples de vérifications :

. Soit $a \in M$.

Soit b l'élément de $\mathbb{N}$ dont les 1-éléments sont les 2-éléments de a. $E^1(b) \subset M$ (car M est transitif), donc $b \in M$ (car M est inductif) : donc U est valide dans $\mathfrak{S}_M$

. si $a \in M$ et si $E^1(b) \subseteq E^1(a)$, $E^1(b) \subseteq M$, donc $b \in M$: donc toute "partie" de a est aussi dans M. En perticulier il y a conservation des ordres sur a, donc des bons-ordres s'il y en a.

. Soient $\{a_\nu\}_{\nu<\alpha}$ les ordinaux de $\mathfrak{S}$ de type $<\alpha$. Par induction, on montre que $a_\nu \in M$:

- a_0 est le vide, donc $a_0 \in M$
- si $a_\nu \in M$ pour $\nu<\tau<\alpha$, $E^1(a_\tau) \subset M$, donc $a_\tau \in M$.

Donc $\in_M$ est α-standard.

. Pour le schéma S, on utilisera la proposition 1.

Proposition 5 : Pour tout ordinal α, dénombrable, il existe un modèle α-standard pour le système (E,P,U,S,I,C,Pr,R).

On part d'un modèle α-standard $\mathfrak{S}$, et on considère $\mathfrak{S}_F$ où F est l'ensemble des éléments fondés. R esr (toujours) valide dans $\mathfrak{S}_F$. On applique alors le lemme 9 à la partie parfaite F.

Bibliographie :

[1] BETH : The foundations of mathematics, North. Holland

[2] FRAENKEL et BAR-HILLEL : Foundations of set theory , North-Holland.

[3] GODEL : The consistency of the continuum hypothesis Princeton.

[4] PONASSE : Logique mathématique , O.C.D.L.

[5] KLEENE : Introduction to metamathematics. North-Holland.

Manuscrit remis le 30 septem bre 1967

J.F. PABION
Assistant
Département de Mathématiques
43, bd du 11 novembre 1918
VILLEURBANNE