PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

NEWTON C. A. DA COSTA

Une nouvelle hiérarchie de théories inconsistantes

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1967, tome 4, fascicule 3
, p. 2-8
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1967__4_3_2_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1967 t. 4-3

UNE NOUVELLE HIERARCHIE DE THEORIES INCONSISTANTES

NEWTON C. A. DA COSTA

I - Introduction.

Dans plusieurs travaux (voir la bibliographie) nous avons montré la possibilité d'étudier avec profit, en modifiant la logique sous-jacente, les théories inconsistantes (c'est-à-dire les théories dans lesquelles nous pouvons démontrer au moins une proposition p et aussi sa négation, $\neg p$), mais qui ne sont pas triviales (nous disons qu'une théorie $\mathcal{T}$ est triviale si toutes les formules de $\mathcal{T}$ sont des théorèmes de $\mathcal{T}$). Dans cette note, nous décrirons une nouvelle hiérarchie de théories (ou systèmes formels) inconsistantes et, apparemment, non triviales.

Les notations, les conventions, etc..., sont celles des ouvrages cités dans la bibliographie, avec des adaptations évidentes.

2 - Le système K_1.

Prenant comme base notre calcul $C_1^=$ (voir [4] et [8]), nous construisons le système de théorie des ensembles K_1.

A, B, C,... et $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sont employées ici comme variables métalinguistiques (intuitives).

2.1 - Symboles formels (primitifs) de K_1 : I - Symboles logiques : $\supset$, &, $\vee$, $\neg$, $\exists$, $\forall$ (le symbole $\equiv$ peut être défini de la façon usuelle) ; II - Symboles de prédicats : = , $\in$; III - Variables : t,u,v,x,y,z,t',u', v',x',y',z',t",...; IV - Parenthèses : (,) ; V - Un symbole individuel : $\underline{V}$; VI - Les classificateurs : $\{ : \}, \{ : \}_{\underline{V}}$.

2.2 - Termes et formules de K_1 : I - Si α et β sont des termes, alors $\alpha = \beta$ et $\alpha \in \beta$ sont des formules ; II - Si A et B sont des formules, alors $(A)\supset(B)$, $(A)\&(B)$, $(A)\vee(B)$ et $\neg(A)$ sont des formules ; III - Si A est une formule et α est une variable, alors $\forall\alpha(A)$ et $\exists\alpha(A)$ sont des formules ; IV - Les variables et le symbole individuel sont des termes ; V - Si α est une variable et F est une formule, alors $\{\alpha : F\}$ et $\{\alpha : F\}_{\underline{V}}$ sont des termes ; VI - Les seuls termes et les seules formules sont ceux donnés par I-V.

Les notions de variable libre, de terme libre pour une variable dans une formule, etc., sont définies comme il est usuel. Nous pouvons aussi définir le concept de formule 1 -stratifiée (voir [7]).

2.3 - Postulats logiques de K_1 : Les postulats logiques de K_1 sont ceux du calcul $C_1^=$ (voir [4] et [8]).

Les notions de démonstration (formelle) de déduction (formelle), etc., sont définies comme le fait Kleene [13] .

2.4 - Postulats spécifiques de K_1 : Dans la suite, nous énonçons les postulats spécifiques de K_1 et rappelons de même quelques définitions et théorèmes de ce système. Pour simplifier l'exposé, dans les définitions certaines restrictions ne seront pas explicitées. La notation

$$A \longleftrightarrow B$$

signifie que A est une abréviation de B.

Définition 1 : $A^{\circ} \longleftrightarrow \neg(A \& \neg A)$. (voir [2] et [8]).

Définition 2 . $\alpha \subset \beta \longleftrightarrow \forall\gamma(\gamma \in \alpha \supset \gamma \in \beta)$,

$\alpha \notin \beta \longleftrightarrow \neg(\alpha \in \beta)$,

$\alpha \neq \beta \longleftrightarrow \neg(\alpha = \beta)$,

$\alpha \not\!\notin \beta \longleftrightarrow \neg(\alpha \in \beta) \& (\alpha \in \beta)^{\circ}$,

$\alpha \not\!\neq \beta \longleftrightarrow \neg(\alpha = \beta) \& (\alpha = \beta)^{\circ}$.

Postulat de l'extensionalité :

(P1) $\forall z(z \in x \equiv z \in y) \supset x = y$.

Postulats de classification :

Si α et β sont des variables, $F(\alpha)$ est une formule 1-stratifiée (cf. [7]) β est libre pour α dans $F(\alpha)$ et ne figure pas libre en $F(\alpha)$, alors :

(P2) $\beta \in \{\alpha : F(\alpha)\} \equiv F(\beta)$.

Si $F(\alpha)$ est une formule, α et β sont des variables, β est libre pour α dans $F(\alpha)$ et ne figure pas libre dans $F(\alpha)$, alors

(P3) $\beta \in \{\alpha : F(\alpha)\}_{\underline{V}} \equiv \beta \in \underline{V} \& F(\beta)$.

Théorème 1 : $\vdash \forall z(z \in x \equiv z \in y) \equiv x = y$; $\vdash x \subset x$; $\vdash x \subset y \& y \subset x . \supset x = y$;

$\vdash x \subset y \& y \subset z \supset x \subset z$; $\vdash x \subset y \& y \subset x \equiv x = y$.

Postulat de normalité :

(P4) $\forall x(x \in \underline{V} \supset x \subset \underline{V})$.

Définition 3 : $\underline{U} \longleftrightarrow \{x : x = x\}$,

$\underline{C} \longleftrightarrow \{x : x \subset \underline{V}\}$,

$\emptyset \longleftrightarrow \{x : x \neq x\}$,

$\not\emptyset \longleftrightarrow \{x : x \not\!\neq x\}$.

Théorème 2 : $\vdash \forall x(x \in \underline{U})$; $\vdash \underline{U} \subset \underline{U}$; $\vdash \underline{U} \in \underline{U}$; $\vdash \underline{V} \in \underline{C}$; $\vdash \underline{V} \in \underline{U}$; $\vdash \underline{C} \in \underline{U}$;

$\vdash \underline{V} \subset \underline{C} \,\&\, \underline{C} \subset \underline{U}$; $\vdash \forall x(x \not\!\notin \not\!\emptyset)$; $\vdash \not\!\emptyset \subset \emptyset$; $\vdash \exists x(x \in \underline{C} \,\&\, x \not\!\notin \underline{V})$;

$\vdash \exists x(x \in \underline{U} \,\&\, x \not\!\notin \underline{C})$.

Définition 3 : α est une classe $\leftrightarrow \alpha \in \underline{U}$,

α est un ensemble $\leftrightarrow \alpha \in \underline{V}$,

α est une classe élémentaire $\longleftrightarrow \alpha \subset \underline{V}$,

α est une classe élémentaire propre $\longleftrightarrow \alpha \subset \underline{V} \,\&\, \alpha \not\!\notin \underline{V}$,

α est une classe propre $\longleftrightarrow \alpha \not\!\notin \underline{V}$,

α est une sous-classe de $\beta \longleftrightarrow \alpha \subset \beta$,

α est un sous-emsemble de $\beta \longleftrightarrow \alpha \subset \beta \,\&\, \alpha \in \underline{V}$.

Théorème 3 : $\vdash x \in y \,\&\, y$ est un ensemble $\supset x$ est un ensemble.

Définition 4 : $\alpha \cup \beta = \{\gamma : \gamma \in \alpha \vee \gamma \in \beta\}$

$\alpha \cap \beta = \{\gamma : \gamma \in \alpha \,\&\, \gamma \in \beta\}$

$\sim \alpha = \{\gamma : \gamma \notin \alpha\}$

$\approx \alpha = \{\gamma : \gamma \not\!\notin \alpha\}$

Théorème 4 : $\vdash x \cup y = y \cup x$; $\vdash x \cap y = y \cap x$; $\vdash x \cup x = x$; $\vdash x \cap x = x$; $\vdash x \cup (x \cap y) = x$;

$\vdash x \cap (x \cup y) = x$; $\vdash x \cup (y \cup z) = (x \cup y) \cup z$; $\vdash x \cap (y \cap z) = (x \cap y) \cap z$;

$\$\vdash x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x\ z)$; $\vdash x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$; $\vdash x \cup \underline{U} = \underline{U}$;

$\vdash x \cap \underline{U} = \underline{U}$; $\vdash x \cup \not\!\emptyset = x$; $\vdash x \cap \not\!\emptyset = \not\!\emptyset$; $\vdash \approx\approx x = x$; $\vdash x \cup \approx x = \underline{U}$;

$\vdash x \cap \approx x = \not\!\emptyset$; $\vdash \approx \underline{U} = \not\!\emptyset$; $\vdash \approx \not\!\emptyset = \underline{U}$; $\vdash \approx (x \cup y) = \approx x \cap \approx y$;

$\vdash \approx (x \cap y) = \approx x \cup \approx y$.

Remarque 1 : Il semble que ne sont pas valables en K_1 , entre autres, les formules :

$\sim (x \cup y) = \sim x \cap \sim y$, $\sim (x \cap y) = \sim x \cup \sim y$, $\sim\sim x = x$ et $\forall x(x \notin \emptyset)$.

Remarque 2 : K_1 est inconsistant ; par exemple, le paradoxe de Russell peut être dérivé dans ce système.

Nous pouvons définir les notions usuelles de la théorie des ensembles dans K_1 comme, par exemple, le fait Rosser [14] .

Les postulats qui définissent le comportement des ensembles sont les suivants :

Postulat des sous-ensembles :

(P5) $x \in \underline{V} \supset \exists y(y \in \underline{V} \ \& \ \forall z(z \in x \supset z \in y))$.

Postulat de l'union :

(P6) $x \in \underline{V} \ \& \ y \in \underline{V} \supset x \cup y \in \underline{V}$.

Définition 5 : $<\alpha, \beta> \longleftrightarrow \{\{\alpha\}, \{\alpha, \beta\}\}$.

Définition 6 : dom $\alpha \longleftrightarrow \{ \beta : \exists \gamma(<\beta, \gamma> \in \alpha) \}$,

codom $\alpha \longleftrightarrow \{ \beta : \exists \gamma(<\gamma, \beta> \in \alpha) \}$.

Postulat de substitution :

(P7) x est une fonction & $x \in \underline{V}$ & dom $x \in \underline{V} \supset$ codom $x \in \underline{V}$.

Postulat de l'amalgamation :

(P8) $x \in \underline{V} \supset \bigcup x \in \underline{V}$.

Postulat de la régularité :

(P9) $x \in \underline{V} \ \& \ x \neq \emptyset \supset \exists z(z \in x \ \& \ x \cap z = \emptyset)$.

Postulat de l'infini :

(P10) $\exists y(y \in \underline{V} \ \& \ \emptyset \in y \ \& \ \forall x(x \in y \supset x \cup \{x\} \in y))$.

Théorème 5 : $\vdash \exists x(x \in \underline{V})$; $\vdash \underline{V} \neq \emptyset$.

Théorème 6 : $\vdash \underline{V} \notin \underline{V}$.

Postulat du choix :

(P11) $\exists x$(x est une fonction de choix & dom $x = \{y : y \neq \emptyset\}_{\underline{V}}$).

Remarque 3 : Apparemment K_1 n'est pas trivial.

Il est possible de démontrer que les classes élémentaires de K_1 ont la propriétés des classes du système de Kelley-Morse (cf. [12] , appendice), convenablement traduites. En conséquence, K_1 est plus forte que ce dernier système. Toutefois, seulement les développements futurs peuvent nous montrer si K_1 doit ou ne doit pas être modifié pour qu'il ne soit pas trivial ou pour qu'on puisse fonder sur lui de manière raisonnable, les mathématiques usuelles.

2 - La hiérarchie K_n , $o \leq n \leq \omega$.

Comme nous avons construit la hiérarchie de systèmes formels NF_n , $o \leq n \leq \omega$ (voir [1] , [7] et [8]), nous pouvons édifier une hiérarchie correspondante, K_n , $o \leq n \leq \omega$, en modifiant convenablement les postulats de K_1 .

K_o, en spécial, est un système suggéré par Dedecker et Ekresmann, de façon intuitive, pour servir de fondement à la théorie des catégories et que nous avons déjà considéré (voir [9]).

BIBLIOGRAPHIE

ARRUDA, A.I. et N.C.A. da COSTA

[1] : Sur une hiérarchie de systèmes formels, C.R. Acad. Sc. PARIS 259 (1964), 2943-2945.

COSTA, N.C.A. DA

[2] : Calculs propositionnels pour les systèmes formels inconsistants, ibiden, 257 (1963), 3790 - 3792.

[3] : Calculs de prédicats pour les systèmes formels inconsistants, ibidem 258 (1964), 27-29.

[4] : Calculs de prédicats avec égalité pour les systèmes formels inconsistants, ibidem 258 (1964), 1111-1113.

[5] : Calculs de descriptions pour les systèmes formels inconsistants, ibidem 258 (1964), 1366-1368.

[6] : Sur un système inconsistant de la théorie des ensembles, ibidem 258 (1964), 3144-3147.

[7] : Sur les systèmes formels C_i , C_i^* , $C_i^=$, $\mathcal{D}_i$ et NF_i, ibidem 260 ((1965), 5427-5430.

[8] : Sistemas formais inconsistentes (thèse), 1963.

[9] : On a set theory suggested by Dedecker and Ehresmann, Institut de Mathématiques, Université de Lille, 1967.

COSTA, N.C.A. da et M. GUILLAUME

[10] : Sur les calculs C_n, Anais Acad. Brasil. Ciências, 36, n° 4 (1964) 379-382.

[11] : Négations composées et loi de Peirce dans les systèmes C_n, Portugaliae Math. 24, Fasc. 4 (1965), 201-210.

KELLEY, J.L.

[12] : General topology, D. Van Nostrand, 1952.

KLEENE, S.C.

[13] : Introduction to metamathematics, D. Van Nostrand, 1952.

ROSSER, J.B.

[14] : Logic for mathematicians, Mac Graw-Hill, 1953.

Manuscrit remis le 31 janvier 1967.

N. CA. da COSTA
BRESIL.