PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

C. TISSERON

Objets quasi-injectifs dans une catégorie abélienne avec générateur et limites inductives exactes

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1967, tome 4, fascicule 2
, p. 145-148

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1967__4_2_A4_0>

OBJETS QUASI-INJECTIFS DANS UNE CATEGORIE ABELIENNE AVEC GENERATEUR ET LIMITES INDUCTIVES EXACTES

par C. TISSERON

Suivant une suggestion de G. Maury on remarque ici comment certains résultats obtenus directement en [3] sur les objets quasi-injectifs d'une catégorie abélienne avec générateur et limites inductives exactes peuvent se déduire de la caractérisation d'une telle catégorie donnée en [2] .

Rappelons que l'on démontre en [2] qu'une catégorie abélienne $\mathbb{D}$ avec un générateur U et des limites inductives exactes est équivalente à une sous-catégorie pleine $\mathbb{C}$ de la catégorie des modules à droite sur l'anneau $A = \text{End}(U)$, l'injection $I : \mathbb{C} \longrightarrow \text{Mod } A$ ayant un adjoint à gauche exact que l'on notera R, on a donc un isomorphisme $\hom(RM,N) \longrightarrow \hom(M,IN)$ pour des objets M de Mod A et N de $\mathbb{C}$, naturel en M et N qui induit un morphisme fonctoriel α : $1_{\text{Mod } A} \longrightarrow I.R$; comme $\mathbb{C}$ est une sous-catégorie pleine on peut toujours supposer que $\alpha_M : M \longrightarrow RM$ est l'identité pour les objets de $\mathbb{C}$, ce que l'on fera dans la suite.

Notons qu'un monomorphisme de $\mathbb{C}$ reste un monomorphisme dans Mod A et que I préserve les objets injectifs, ie un objet de C injectif dans $\mathbb{C}$ est aussi injectif dans Mod A.

Rappelons encore qu'un objet M d'une catégorie $\mathbb{A}$ est dit quasi-injectif si pour tout sous-objet $N \xrightarrow{i} M$ de M dans $\mathbb{A}$:

$$\hom(i,M) : \hom(M,M) \longrightarrow \hom(N,M) \text{ est surjective}$$

Les propositions suivantes sont bien connues pour une catégorie de modules et on les démontre pour $\mathbb{D}$ en se plaçant dans la sous-catégorie C de Mod A équivalente à $\mathbb{D}$.

1 - Lemme : " a) Un morphisme $N \longrightarrow M$ de $\mathbb{C}$ est une extension essen-
" tielle de N dans $\mathbb{C}$ si et seulement si $IN \longrightarrow IM$ est une extension
" essentielle de IN dans Mod A.
" b) Un objet M de $\mathbb{C}$ est quasi-injectif (dans $\mathbb{C}$) si et
" seulement si IM est un objet quasi-injectif de Mod A.

Les conditions suffisantes sont évidentes.

- Si $i : N \longrightarrow M$ est essentiel dans $\mathbb{C}$ soit $u : M \longrightarrow P$ un morphisme de Mod A tel que $u.i$ soit un monomorphisme, alors $R(u.i) = R(u).i$ est un monomorphisme donc $R(u)$ aussi et puisque $R(u) = \alpha_P.u$, u est un monomorphisme, ce qui prouve a).

- Soit $N \xrightarrow{i} M$ un sous-objet de M dans Mod A où M est un objet quasi-injectif de $\mathbb{C}$.

Le diagramme suivant où les flèches verticales sont des isomorphismes

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathbb{C}}(M,M) \arrow[r, "\hom(Ri,M)"] \arrow[d, dashed] & \hom_{\mathbb{C}}(RN,M) \arrow[d] \\
\hom_{\mathrm{Mod}\,A}(M,M) \arrow[r, "\hom(i,M)"] & \hom_{\mathrm{Mod}\,A}(N,M)
\end{tikzcd}$$

montre que $\hom(i,M)$ est surjective puisque $\hom(Ri,M)$ l'est, ce qui prouve b).

2 - Proposition : " Un objet M d'une catégorie $\mathbb{D}$ avec générateur et
" limites inductives exactes est quasi-injectif dès que pour tout
" sous-objet $N \xrightarrow{i} M$ dont M est extension essentielle
" $\hom(M,M) \longrightarrow \hom(N,M)$ est surjective.

Soit M un objet de $\mathbb{C}$ vérifiant la condition de la proposition et $N \xrightarrow{i} M$ un sous-objet de M dans Mod A dont M est extension essentielle, puisque $i = R(i).\alpha_N$ avec $R(i)$ et α_N moniques $R(i) : RN \longrightarrow M$ est une extension essentielle dans $\mathbb{C}$ donc par hypothèse $\hom(R(i),M)$ est surjective et le diagramme du lemme montre que $\hom(i,M)$ l'est aussi.

Ceci prouve que M est quasi-injectif dans Mod A, donc dans $\mathbb{C}$.

On sait que la catégorie $\mathbb{D}$ est à enveloppes injectives et on a :

3 - <u>Proposition</u> : "Un objet M de $\mathbb{D}$ est quasi-injectif si et seulement
" si il est stable par tout endomorphisme de son enveloppe
" injective.

Pour un objet M de $\mathbb{C}$ la proposition résulte immédiatement de 1 - b en remarquant que si $M \xrightarrow{i} J$ est l'enveloppe injective de M dans $\mathbb{C}$, c'est aussi une enveloppe injective de M considéré comme objet de Mod A.

4 - <u>Proposition</u> : "Tout objet d'une catégorie abélienne $\mathbb{D}$ à généra-
" teur et limites inductives exactes admet une enveloppe quasi-
" injective.

Soit M un objet de $\mathbb{C}$, $i : M \longrightarrow J$ son enveloppe injective dans $\mathbb{C}$.

Il est clair que toute famille de sous-objets d'un objet de $\mathbb{C}$ admet une borne inférieure dans $\mathbb{C}$ qui se calcule d'ailleurs comme dans Mod A, ie en prenant l'intersection ; et la famille F des sous-objets de J <u>dans $\mathbb{C}$</u> contenant M et stables par tout endomorphisme de J est stable par intersection ; si M' en est son plus petit élément M' est quasi-injectif et est extension essentielle de M.

Si P est un objet quasi-injectif de $\mathbb{C}$ extension essentielle de M on peut prendre pour enveloppe injective de M, celle de P et ainsi M' est inférieur à P ce qui précise le sens du résultat.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GABRIEL : Des catégories abéliennes. Bull. Soc. Math. de France 1962.

[2] POPESCO-GABRIEL : Caractérisation des catégories abéliennes à générateur et limites inductives exactes. (C R Acad. Sc. Paris, 27 avril 1964).

[3] G. MAURY : Objets quasi-injectifs dans une catégorie de Grothendieck. (Pub. Math. de Lyon, t. 3, fasc. 4, 1966).

[4] MITCHELL : Theory of categories (Academic Press, 1965).

TISSERON Claude
Assistant
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Lyon