G. ERTEL

Une partition du groupe des homographies bilatères de la droite projective, dans une algèbre de quaternions généralisés

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1967, tome 4, fascicule 2
, p. 75-144

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1967__4_2_A3_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1967 t.4-1

UNE PARTITION DU GROUPE DES HOMOGRAPHIES BILATERES DE LA DROITE PROJECTIVE, DANS UNE ALGEBRE DE QUATERNIONS GENERALISES

G. ERTEL

INTRODUCTION .

Une homographie de la droite projective quaternionienne est le couple formé d'une homographie à droite et d'une homographie à gauche liées par des relations déduites de la notion de point bilatère. On utilise ces relations pour étudier la structure du groupe homographique bilatère.

Dans le premier chapitre, après avoir défini une algèbre de quaternions généralisés, dans laquelle le corps de base K, supposé commutatif, de caractéristique zéro, contient deux éléments α et β non carrés, on rappelle les notions de point bilatère et d'homographie bilatère (1), introduites par R. PERNET, en continuation des travaux de Study et Pimiä. On démontre l'isomorphisme d'un groupe multiplicatif de matrices inversibles, d'ordre quatre, à coefficients dans le corps $K(\sqrt{\alpha})$, appelées $\tilde{K}$-matrices et d'un groupe multiplicatif de matrices inversibles, d'ordre deux, à coefficients dans l'anneau. sous-jacent de l'algèbre des quaternions (resp. dans l'anneau opposé). On définit une $\tilde{K}$-homographie de l'espace projectif à trois dimensions sur le corps $K(\sqrt{\alpha})$, par la donnée d'une $\tilde{K}$-matrice, déterminée à un élément près de K. On établit l'isomorphisme du groupe $\tilde{K}$-homographique et du groupe homographique à droite (resp. à gauche). On en déduit les isomorphismes fondamentaux du groupe $\tilde{K}$- omographique sur le groupe homographique bilatère, ainsi qu'un

(1) R. PERNET , bibliographie [1]

automorphisme Λ (resp. L) du premier de ces groupes (resp. du second).

On précise Λ au chapitre II, en déterminant l'image par cet auto-morphisme, d'une $\tilde{K}$-homographie donnée. On introduit pour cela l'opération de pseudo transposition d'une matrice d'ordre quatre, à coefficients dans un anneau. On démontre que Λ (resp. L) est involutif et on étudie L.

La décomposition de Λ en un produit permutable d'automorphismes involutifs permettrait d'obtenir un sous-groupe remarquable du groupe $\tilde{K}$-homographique (resp. du groupe homographique bilatère). Mais cette décomposition est valable seulement dans le cas des quaternions ordinaires, et plus généralement lorsque le corps de base est ordonné maximal. Le cas des quaternions généralisés étant le seul traité ici, la décomposition de Λ est exclue ; on étudie donc, au chapitre III, la structure du sous-groupe G constitué des $\tilde{K}$-homographies invariantes par Λ, ainsi que la structure du sous-groupe G constitué des homographies bilatères invariantes par L. Ces deux sous-groupes se correspondent par les isomorphismes fondamentaux définis au chapitre II .

L'ensemble des classes à droite (resp. à gauche), déduites de G, constitue une partition du groupe homographique bilatère. On démontre, au chapitre IV, que deux bijections lient cette partition à celle correspondante du groupe $\tilde{K}$-homographique définie à partir de G. L'automorphisme L détermine une permutation involutive dans l'ensemble des classes à droite (resp. à gauche) du groupe homographique bilatère. Tout élément double de cette permutation, est appelé classe double à droite (resp. à gauche) du groupe homographique bilatère. On définit de même à partir de Λ, les classes doubles du groupe $\tilde{K}$-homographique. On démontre une propriété caractéristique des classes doubles.

Au chapitre V, on généralise et complète un résultat indiqué par E. Cartan (1), dans le cas des quaternions sur R, selon lequel, une homographie à droite a pour image un déplacement, dans l'espace des antipolarités elliptiques permutables à une certaine antiinvolution. Tout d'abord on a supposé les antipolarités de type elliptique et le corps de base ordonné maximal. La notion de distance de deux antipolarités elliptiques, définie par E. Cartan, n'étant alors plus valable, on a introduit la notion plus générale d'"écart". Ensuite, en transformant la définition de l'"écart", on s'est libéré du caractère elliptique d'une antipolarité, et on s'est placé dans le cas des quaternions généralisés.

On rappelle donc d'abord, les notions de symétries projectives et certaines propriétés indiquées par E. Cartan. On définit ensuite l'"écart" de deux antipolarités quelconques. L'ensemble des antipolarités, muni de l'"écart" devient l'espace E. On démontre l'existence d'applications de E dans E, appelées E-isométries, qui conservent le "écart". D'autre part, les $\tilde{K}$-homographies étant permutables à une certaine antiinvolution, on détermine la structure du sous-espace E' des antipolarités permutables à cette antiinvolution. On établit l'existence d'un groupe de E'-isométries, et on convient d'appeler E'-déplacements, les éléments de l'un des sous-groupes du groupe précédent. Un sous-groupe de E'-déplacements se révèle isomorphe au groupe $\tilde{K}$-homographique, et permet d'obtenir une interprétation de la partition du groupe homographique bilatère, définie au chapitre IV.

---

(1) E. CARTAN, bibliographie [2].

S O M M A I R E

CHAPITRE I : Les isomorphismes fondamentaux F et F^* du groupe $\tilde{K}$-homographique R sur le groupe homographique bilatère H.

1.1 L'algèbre des quaternions sur K (Rappel (1))

1.1.1. Soit K un corps commutatif, nommé corps des scalaires de caratéristique zéro, possédant deux éléments α et β non carrés (d'éléments de K). Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre des quaternions sur K. Un quaternion s'écrit : $A = (x_1+x_2u) + (x_3+x_4u)v$;

$$x_i \in K \ (1 \leq i \leq 4) \quad ; \ u, v \in \mathcal{A} \ ; \ u^2 = \alpha \ ; \ v^2 = \beta \ ; \ vu = -uv.$$

$$x_1 \text{ s'appelle la trace de } A : \ \{A\} = x_1 .$$

1.1.2. Les éléments de $\mathcal{A}$ de la forme x_1+x_2u constituent un corps commutatif noté $K(\sqrt{\alpha})$. Si on pose $a = x_1+x_2u$ et $\bar{a} = x_1-x_2u$, l'application $a \longrightarrow \bar{a}$ est un automorphisme involutif de $K(\sqrt{\alpha})$. On a :

(1) $\quad va = \bar{a}v$ pour tout $a \in K(\sqrt{\alpha})$.

1.1.3. A étant un élément générique de $\mathcal{A}$, on peut écrire d'une manière unique :

$$A = a+bv \ , \ ab \in K(\sqrt{\alpha}).$$

1.1.4. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on pose :

$$\bar{A} = \bar{a}-bv \ , \ NA = A\bar{A} = \bar{A}A = a\bar{a} - \beta b\bar{b} = Na - \beta Nb \in K.$$

on a : $\overline{AB} = \bar{B}\bar{A}$ et $N(AB) = NA\,NB$ quels que scient $A,B \in \mathcal{A}$. $A \in \mathcal{A}$ est inversible si, et seulement si : $NA \neq 0$. On a alors : $A^{-1} = (NA)^{-1}\bar{A}$.

$NA \neq 0$ est aussi la condition de régularité de A. On dit que A est irrégulier, lorsque $NA = 0$ et $A \neq 0$.

1.1.5. Si $A \in \mathcal{A}$ est irrégulier on a : $AX = 0 \Longleftrightarrow X = \bar{A}B$, B étant un élément quelconque de $\mathcal{A}$. De même : $XA = 0 \Longleftrightarrow X = B\bar{A}$.

---

(1) Bibliographie : [1] p. 1 à 4.

1.2 Groupes homographiques (rappel (1))

1.2.1 Entre les couples ordonnés (A_1,A_2) d'éléments de Λ, on définit l'équivalence R :

$$(A_1,A_2)\ R(A_1',A_2') \Longleftrightarrow \exists\, U(U \quad \Lambda\ , NU \neq 0\ ,\ A_1' = A_1U\ ,\ A_2' = A_2U\ ).$$

On appelle point à droite, une classe d'équivalence dont un élément (A_1,A_2), dit indicateur du point à droite, ne vérifie pas simultanément les relations $NA_1 = NA_2 = A_1\bar{A}_2 = 0$, compatibles avec R.

Le système :

$$(2) \qquad \begin{aligned} X_1' &= A_{11}X_1 + A_{12}X_2\,, \\ X_2' &= A_{21}X_1 + A_{22}X_2\,, \end{aligned}$$

définit une transformation S dans l'ensemble des points à droite, appelée homographie à droite. Sa matrice $(A_{ij})1\leqslant i\ ,\ j\leqslant 2$ est à coefficients dans l'anneau sous-jacent de Λ. L'homographie S est bijective (on dit encore non dégénérée) si, et seulement si :

$$\nabla(S) \neq 0 \text{ avec : } \nabla(S) = N(A_{11}A_{22}) + N(A_{12}A_{21}) - 2\{A_{11}\bar{A}_{21}A_{22}\bar{A}_{12}\} \in K.$$

Cette relation exprime aussi l'inversibilité du système (2).

Le produit des homographies à droite S et T, de matrices respectives $(A_{ij})1\leqslant i\ ,\ j\leqslant 2$ et $(B_{ij})1\leqslant i\ ,\ j\leqslant 2$, est l'homographie à droite TS, dont la matrice $(C_{ij})1\leqslant i\ ,\ j\leqslant 2$ est le produit $(B_{ij})(A_{ij})$, donc est définie par la relation :

$C_{ij} = B_{i}\ A_{1j} + B_{i2}A_{2j}$ $(1\leqslant i\ ,\ j\leqslant 2)$. En effet (2), soient les matrices $M' = (m'_{ij})1\leqslant i\leqslant p,\ 1\leqslant j\leqslant q$ et $M'' = (m''_{jk})1\leqslant j\leqslant q\ ,\ 1\leqslant k\leqslant r$, à coefficients dans un anneau quelconque, dont le nombre de colonnes de M' est égal au nombre de lignes de M''. On appelle produit de M' et M'' la matrice $M'M'' = (m_{ik})1\leqslant i\leqslant p\ ,\ 1\leqslant k\leqslant r$ dont les coefficients sont donnés par la relation :

$$m_{ik} = \sum_{j=1}^{q} m'_{ij}.m''_{jk} \quad (1\leqslant i\leqslant p\ ,\ 1\leqslant k\leqslant r).$$

(1) Bibliographie : [1], p. 5 à 10.

(2) Bourbaki : Algèbre , ch. 2.

L'ensemble des homographies à droite non dégénérées, muni de la loi multiplicative précédente, constitue un groupe H appelé groupe homographique à droite.

1.2.2. On définit de même un point à gauche par l'équivalence R :

$$(A_1^*, A_2^*)\ R^*(A_1'^*, A_2'^*) \Longleftrightarrow \exists\, U\,(U \in \Lambda,\ NU \neq 0,\ A_1'^* = U A_1^*,\ A_2'^* = UA_2^*)$$

et les relations $NA_1^* = NA_2^* = A_1^* A_2^* = 0$, supposées non simultanément vérifiées.

Une homographie à gauche S^*, définie par le système :

$$X_1'^* = X_1^* A_{11}^* + X_2^* A_{12}^*$$

$$X_2'^* = X_1^* A_{21}^* + X_2^* A_{22}^*$$

est non dégénérée si, et seulement si : $\nabla^*(S^*) \neq 0$ avec :

$$\nabla^*(S^*) = N(A_{11}^* A_{22}^*) + N(A_{12}^* A_{21}^*) - 2\{\overline{A_{11}^*} A_{21}^* \overline{A_{22}^*} A_{12}^*\} \in K.$$

Sa matrice $(A_{ij}^*)_{1\leq i\ ,\ j\leq 2}$ est à coefficients dans l'anneau opposé à l'anneau sous-jacent de Λ. Rappelons (1) que si A désigne un anneau, l'anneau opposé A^o est composé des mêmes éléments que A ; la loi additive est la même dans les deux anneaux, mais si xy désigne le produit de l'élément x par l'élément y dans A et $x \perp y$ le produit de ces mêmes éléments dans A^o, on a $x \perp y = yx$.

Le produit des homographies à gauche S^* et T^* de matrices respectives $(A_{ij}^*)_{1\leq i\ ,\ j\leq 2}$ et $(B_{ij}^*)_{1\leq i\ ,\ j\leq 2}$, est l'homographie à gauche T^*S^*, dont la matrice $(C_{ij}^*)_{1\leq i\ ,\ j\leq 2}$ est le produit $(B_{ij}^*)(A_{ij}^*)$, donc est définie par les relations :

$$C_{ij}^* = B_{i1}^* \perp A_{1j}^* + B_{i2}^* \perp A_{2j}^* \qquad (1\leq i\ ,\ j\leq 2),$$

$$\text{i.e. } C_{ij}^* = A_{1j}^*\, B_{i1}^* + A_{2j}^*\, B_{i2}^* \qquad (1\leq i\ ,\ j\leq 2).$$

L'ensemble des homographies à gauche non dégénérées, muni de la loi multiplicative précédente, constitue un groupe H^*, appelé groupe homographique à gauche.

(1) Bourbaki, Alg. ch. 1.

1.2.3. On appelle point bilatère, l'ensemble d'un point à droite d'indicateur (A_1,A_2), et d'un point à gauche d'indicateur $(\overset{*}{A}_1,\overset{*}{A}_2)$, liés bijectivement par la relation : $\overset{*}{A}_1A_2 = \overset{*}{A}_2A_1$.

L'ensemble des points bilatères constitue la droite projective quaternionienne ou d.p.q.

Une homographie bilatère est le couple $\mathcal{S} = (S^*,S)$, formé d'une homographie à gauche S^* (composante à gauche), de matrice $(\overset{*}{A}_{ij})$, et d'une homographie à droite S (composante à droite), de matrice (A_{ij}), liées bijectivement par les relations

$$\overset{*}{A}_{11}A_{21}-\overset{*}{A}_{21}A_{11} = \overset{*}{A}_{12}A_{22}-\overset{*}{A}_{22}A_{12} = 0 \ ,$$
$$\overset{*}{A}_{11}A_{22}-\overset{*}{A}_{21}A_{12} = \overset{*}{A}_{22}A_{11}-\overset{*}{A}_{12}A_{21} = \lambda \text{ pour tout } \lambda \in K-\{0\},$$
$$\nabla(A_{ij}) \neq 0.$$

$K-\{0\}$ désigne l'ensemble formé par le corps K privé de son élément nul. Ces relations ont pour conséquence : $\overset{*}{\nabla}(\overset{*}{A}_{ij}) \neq 0$.

L'homographie bilatère $\mathcal{S}$ définit une bijection dans l'ensemble des points bilatères.

Soient $\mathcal{S} = (S^*,S)$ et $\mathcal{T} = (T^*,T)$ deux homographies bilatères. On pose $\mathcal{ST} = (S^*T^*,ST)$. L'ensemble des homographies bilatères, muni de la loi multiplicative précédente, constitue un groupe $\mathcal{H}$, appelé groupe homographique bilatère.

1.3. Isomorphisme f.

1.3.1. Lemme : Posons (cf. 1.1.3) :

$$(3) \qquad \begin{cases} X_1 = x_1+\overline{x_2}v \ , \ X_2 = x_3+\overline{x_4}v \ , \\ X'_1 = x'_1+\overline{x'_2}v \ , \ X'_2 = x'_3+\overline{x'_4}v \ , \\ x_i,\ x'_i \in K(\sqrt{a}) \quad (1<i\leqslant 4), \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} A_{11} = a_{11}+\beta^{-1}a_{12}v \ , \ A_{12} = a_{13}+\beta^{-1}a_{14}v \ , \\ A_{21} = a_{31}+\beta^{-1}a_{32}v \ , \ A_{22} = a_{33}+\beta^{-1}a_{34}v \ , \\ a_{ij} \in K(\sqrt{\alpha}) \quad (1\leq i \ , \ j\leq 4). \end{cases}$$

Les relations :

$$(5)\begin{cases} X'_1 = A_{11}X_1 + A_{12}X_2 \ , \\ X'_2 = A_{21}X_1 + A_{22}X_2 \ , \end{cases}$$

et :

$$(6)\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \ , \\ x'_2 = \beta^{-1}\bar{a}_{12}x_1 + \bar{a}_{11}x_2 + \beta^{-1}\bar{a}_{14}x_3 + \bar{a}_{13}x_4 \ , \\ x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \ , \\ x'_4 = \beta^{-1}\bar{a}_{32}x_1 + \bar{a}_{31}x_2 + \beta^{-1}\bar{a}_{34}x_3 + \bar{a}_{33}x_4 \ , \end{cases}$$

sont équivalentes.

En effet, (5) s'écrit :

$$x'_1 + \overline{x'_2}v = (a_{11}+ \beta^{-1}a_{12}v)(x_1+\overline{x}_2v) + (a_{13}+\beta^{-1}a_{14}v)(x_3+\bar{x}_4v),$$

$$x'_3 + \overline{x'_4}v = (a_{31}+ \beta^{-1}a_{32}v)(x_1+\overline{x}_2v) + (a_{33}+\beta^{-1}a_{34}v)(x_3+\bar{x}_4v).$$

d'après la relation (1) de 1.1.2. on a :

$$(a_{11}+\beta^{-1}a_{12}v)(x_1+\bar{x}_2v) = a_{11}x_1+a_{11}\bar{x}_2v+\beta^{-1}a_{12}\bar{x}_1v+\beta^{-1}a_{12}x_2v^2.$$

Le corps $K(\sqrt{\alpha})$ étant commutatif (1.1.2), en remplaçant v^2 par β (cf.1.1.1) on obtient :

$$(a_{11}+\beta^{-1}a_{12}v)(x_1+\overline{x}_2v) = a_{11}x_1+ a_{11}\overline{x}_2v + \beta^{-1}a_{12}\overline{x}_1v + a_{12}x_2.$$

On calcule de même les autres produits. Donc (1.1.3), les relations (5) équivalent à :

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \ , \\ \overline{x'_2} &= a_{11}\overline{x}_2 + \beta^{-1}a_{12}\overline{x}_1 + a_{13}\overline{x}_4 + \beta^{-1}a_{14}\overline{x}_3 \ , \\ x'_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \ , \\ \overline{x'_4} &= a_{31}\overline{x}_2 + \beta^{-1}a_{32}\overline{x}_1 + a_{33}\overline{x}_4 + \beta^{-1}a_{34}\overline{x}_3 \ , \end{aligned}$$

d'où le lemme.

1.3.2. <u>Définition</u> : On appelle $\tilde{K}$-matrice, toute matrice d'ordre quatre, à coefficients dans $K(\sqrt{\alpha})$, telle que :

$$a_{21} = \beta^{-1}\bar{a}_{12}\ ,\ a_{22} = \bar{a}_{11}\ ,\ a_{23} = \beta^{-1}\bar{a}_{14}\ ,\ a_{24} = \bar{a}_{13}\ ,$$
$$a_{41} = \beta^{-1}\bar{a}_{32}\ ,\ a_{42} = \bar{a}_{31}\ ,\ a_{43} = \beta^{-1}\bar{a}_{34}\ ,\ a_{44} = \bar{a}_{33}\ .$$

La $\tilde{K}$-matrice (a_{ij}) s'écrit donc :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \beta^{-1}\bar{a}_{12} & \bar{a}_{11} & \beta^{-1}\bar{a}_{14} & \bar{a}_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \beta^{-1}\bar{a}_{32} & \bar{a}_{31} & \beta^{-1}\bar{a}_{34} & \bar{a}_{33} \end{pmatrix}$$

1.3.3 <u>Lemme</u> : Le déterminant d'une $\tilde{K}$-matrice est un élément du corps de base K.

En effet, en utilisant l'espression explicite de la $\tilde{K}$-matrice (a_{ij}) (1.3.2); on obtient :

$$\text{dét}\ (a_{ij}) = (Na_{11} - \beta^{-1}Na_{12})(Na_{33} - \beta^{-1}Na_{34}) +$$
$$(Na_{31} - \beta^{-1}Na_{32})(Na_{13} - \beta^{-1}a_{14}) + m + \bar{m} \in K, \text{ en posant :}$$

$$m = \beta^{-1}a_{11}a_{32}\bar{a}_{34}\bar{a}_{13} + \beta^{-1}\bar{a}_{31}a_{11}\bar{a}_{14}a_{34} - a_{11}\bar{a}_{31}a_{33}\bar{a}_{13} - \beta^{-1}a_{11}\bar{a}_{33}a_{32}\bar{a}_{14} -$$
$$\beta^{-1}a_{12}a_{31}\bar{a}_{34}\bar{a}_{13} - \beta^{-2}a_{12}\bar{a}_{32}\bar{a}_{14}\bar{a}_{34} + \beta^{-1}a_{12}\bar{a}_{32}a_{33}\bar{a}_{13} + \beta^{-1}a_{12}\bar{a}_{33}a_{31}\bar{a}_{14}\ .$$

1.3.4 <u>Lemme</u> : Les $\tilde{K}$-matrices forment un espace vectoriel sur K de dimension seize.

D'après 1.3.2, la somme de deux $\tilde{K}$-matrices est une $\tilde{K}$-matrice et le produit d'une $\tilde{K}$-matrice par un scalaire est une $\tilde{K}$-matrice. On en déduit que les $\tilde{K}$-matrices forment un espace vectoriel sur K. Une base de cet espace vectoriel est formé des matrices :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & u & 0 & 0 \\ \beta^{-1}u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et des douze matrices analogues.

1.3.5 Définition : On appelle f, l'application qui à toute $\tilde{K}$-matrice (a_{ij}) fait correspondre par les relations (4) de 1.3.1 :

$A_{11} = a_{11} + \beta^{-1}a_{12}\, v$, $A_{12} = a_{13} + \beta^{-1}a_{14}\, v$,

$A_{21} = a_{31} + \beta^{-1}a_{32}\, v$, $A_{22} = a_{33} + \beta^{-1}a_{34}\, v$,

la matrice $(A_{ij})1 \leq i\ , j \leq 2$, à coefficients dans l'anneau sous-jacent de Λ .

1.3.6. Lemme : L'espace vectoriel sur K des $\tilde{K}$-matrices et l'espace vectoriel sur K des matrices d'ordre deux, à coefficients dans l'anneau sous-jacent de Λ , sont isomorphes. L'application f (1.3.5) définit cet isomorphisme.

L'application f est surjective, car les a_{ij} figurant dans les relations (4) étant génériques de $K(\sqrt{\alpha})$, et d'après 1.3.2 n'étant liés par aucune relation les A_{ij} peuvent d'après (4) prendre des valeurs arbitrairement données dans A.

L'application f est aussi injective, et donc bijective. En effet, d'après (4), l'identité des matrices $(A_{ij}) = f(a_{ij})$ et $(A'_{ij}) = f((a'_{ij}))$ entraine l'identité des $\tilde{K}$-matrices (a_{ij}) et (a'_{ij}).

D'autre part, toujours d'après (4), les égalités :

$f((a_{ij})) = (A_{ij})$, $f((b_{ij})) = (B_{ij})$ entraînent : $f((a_{ij}) + (b_{ij})) = (A_{ij}) + (B_{ij})$ et les relations : $f((a_{ij})) = (A_{ij})$, $\lambda \in K$ ont pour conséquence : $f(\lambda(a_{ij})) = \lambda(A_{ij})$. Le lemme résulte alors de 1.3.4.

1.3.7 Proposition : L'algèbre sur K des $\tilde{K}$-matrices et l'algèbre sur K des matrices d'ordre deux, à coefficients dans l'anneau sous-jacent de $\mathcal{A}$, sont isomorphes. L'application f(1.3.5) définit cet isomorphisme.

Les matrices d'ordre deux, à coefficients dans l'anneau sous-jacent de $\mathcal{A}$, forment une algèbre sur K. En effet, d'après 1.3.6. elles forment un espace vectoriel sur K : d'autre part, elles constituent un anneau, car les matrices d'ordre n, à coefficients dans un anneau forment elles-mêmes un anneau (1) ; enfin quelles que soient les matrices d'ordre deux (A_{ij}) et (B_{ij}), à coefficients dans l'anneau sous-jacent de $\mathcal{A}$, et quel que soit $\lambda \in K$ on a :
$(\lambda(A_{ij}))(B_{ij}) = (A_{ij})(\lambda(B_{ij})) = \lambda(A_{ij})(B_{ij})$.

L'application f étant bijective d'après 1.3.6. l'application réciproque f^{-1} existe. Pour démontrer la proposition, il suffit donc de prouver que, si λ est générique de K, et si $(A_{ij}),(B_{ij}),(C_{ij})$ sont des matrices arbitraires d'ordre deux, à coefficients dans l'anneau sous-jacent de $\mathcal{A}$, on a :

$$f^{-1}(\lambda(A_{ij})) = \lambda f^{-1}((A_{ij})),$$
$$f^{-1}((A_{ij}) + (B_{ij})) = f^{-1}((A_{ij})) + f^{-1}((B_{ij})) ,$$
$$f^{-1}((A_{ij})\ (B_{ij})) = f^{-1}((A_{ij}))\ f^{-1}((B_{ij})) .$$

Les deux premières relations résultent de 1.3.6. Pour obtenir la troisième on pose : $(C_{ij}) = (A_{ij})\ (B_{ij})$; on désigne par (a_{ij}) , (b_{ij}) , (c_{ij}) les K-matrices, images respectives de (A_{ij}) , (B_{ij}) , (C_{ij}) par f^{-1} et on démontre que $(c_{ij}) = (a_{ij})(b_{ij})$, i.e. On démontre les égalités : $c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + a_{i4}b_{4j}$ $(1\leqslant i,j\leqslant 4)$.

En effet, la relation $(a_{ij}) = f^{-1}((A_{ij}))$ équivaut à (1.3.2 ; 1.3.5) :

$$A_{11} = a_{11} + \beta^{-1}a_{12}\, v \quad ; \quad A_{12} = a_{13} + \beta^{-1}a_{14}\, v ,$$
$$A_{21} = a_{31} + \beta^{-1}a_{32}\, v \quad , \quad A_{22} = a_{33} + \beta^{-1}a_{34}\, v ,$$

(1) Bourbaki : Algèbre ch. 2.

$$a_{21} = \beta^{-1}\bar{a}_{12}\ ,\ a_{22} = \bar{a}_{11}\ ,\ a_{23} = \beta^{-1}\bar{a}_{14}\ ,\ a_{24} = \bar{a}_{13}\ ,$$

$$a_{41} = \beta^{-1}\bar{a}_{32}\ ,\ a_{42} = \bar{a}_{31}\ ,\ a_{43} = \beta^{-1}\bar{a}_{34}\ ,\ a_{44} = \bar{a}_{33}\ .$$

On transforme de même $(b_{ij}) = f^{-1}((B_{ij}))$ et $(c_{ij}) = f^{-1}((C_{ij}))$.

L'égalité $(C_{ij}) = (A_{ij})(B_{ij})$ s'écrit :

$$C_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}\quad ,\quad C_{12} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}$$

$$C_{21} = A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}\quad ,\quad C_{22} = A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}$$

ou encore :

$$c_{11} + \beta^{-1}c_{12}v = (a_{11} + \beta^{-1}a_{12}v)(b_{11} + \beta^{-1}b_{12}v)+(a_{13} + \beta^{-1}a_{14}v)(b_{31} + \beta^{-1}b_{32}v),$$

$$c_{13} + \beta^{-1}c_{14}v = (a_{11} + \beta^{-1}a_{12}v)(b_{13} + \beta^{-1}b_{14}v)+(a_{13} + \beta^{-1}a_{14}v)(b_{33} + \beta^{-1}b_{34}v)\ ,$$

$$c_{31} + \beta^{-1}c_{32}v = (a_{31} + \beta^{-1}a_{32}v)(b_{11} + \beta^{-1}b_{12}v)+(a_{33} + \beta^{-1}a_{34}v)(b_{31} + \beta^{-1}b_{32}v)\ ,$$

$$c_{33} + \beta^{-1}c_{34}v = (a_{31} + \beta^{-1}a_{32}v)(b_{13} + \beta^{-1}b_{14}v)+(a_{33} + \beta^{-1}a_{34}v)(b_{33} + \beta^{-1}b_{34}v).$$

On effectue les produits comme dans la démonstration 1.3.1 ; d'après 1.1.3 on obtient :

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + \beta^{-1}a_{12}\bar{b}_{12} + a_{13}b_{31} + \beta^{-1}a_{14}\bar{b}_{32}\quad ,\qquad \text{ou}$$

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + a_{14}b_{41}\ ,$$

ainsi que les égalités correspondant à c_{12} , c_{13} , c_{14} , c_{31} , c_{32} , c_{33} , c_{34}.

D'autre part on a :

$$c_{21} = \beta^{-1}\bar{c}_{12} = \beta^{-1}(\bar{a}_{11}\bar{b}_{12} + \bar{a}_{12}\bar{b}_{22} + \bar{a}_{13}\bar{b}_{32} + \bar{a}_{14}\bar{b}_{42})\ ,$$

$$= a_{22}b_{21} + a_{21}b_{11} + a_{24}b_{41} + a_{23}b_{31}\ ,$$

$$= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} + a_{24}b_{41}\ ,$$

et de même les égalités correspondants à c_{22} , c_{23} , c_{24} , c_{41} , c_{42} , c_{43} , c_{44}.

Q.E.D.

1.3.8. Il résulte de 1.3.7 que le groupe multiplicatif des $\tilde{K}$-matrices inversibles et dont les inverses sont des $\tilde{K}$-matrices, est isomorphe au groupe multiplicatif des matrices inversibles d'ordre deux, à coefficients dans l'anneau sous-jacent de A. f définit cet isomorphisme.

1.3.9 <u>Lemme</u> : La complémentaire (1) d'une $\tilde{K}$-matrice est une $\tilde{K}$-matrice.

La complémentaire de la $\tilde{K}$-matrice (a_{ij}) est la matrice (a'_{ij}) telle que $a'_{ij} = y_{ji}$ $(1 \leq i\ ,\ j \leq 4)$, y_{ji} désignant le cofacteur du terme a_{ji} dans le déterminant de la matrice (a_{ij}). En utilisant (cf. 1.3.2) l'expression explicite de la $\tilde{K}$-matrice (a_{ij}), on obtient :

$$a'_{21} = \beta^{-1}\bar{a}'_{12} = \beta^{-1}\bar{a}_{12}a_{33}\bar{a}_{33} - \beta^{-1}a_{31}\bar{a}_{34}\bar{a}_{13} - \beta^{-2}\bar{a}_{32}\bar{a}_{14}a_{34} + \beta^{-1}\bar{a}_{32}a_{33}\bar{a}_{13}$$
$$+ \beta^{-2}a_{34}\bar{a}_{34}\bar{a}_{12} + \beta^{-1}\bar{a}_{33}a_{31}\bar{a}_{14}.$$

$$a'_{22} = \bar{a}'_{11} = a_{11}a_{33}\bar{a}_{33} + \beta^{-1}a_{31}\bar{a}_{34}a_{14} + \beta^{-1}\bar{a}_{32}a_{13}a_{34} - \beta^{-1}\bar{a}_{32}a_{33}a_{14} - \beta^{-1}\bar{a}_{34}a_{34}a_{11}$$
$$- \bar{a}_{33}a_{31}a_{13}$$

$$a'_{23} = \beta^{-1}\bar{a}'_{14} = -\beta^{-1}a_{11}\bar{a}_{14}\bar{a}_{33} - \beta^{-2}\bar{a}_{12}\bar{a}_{34}a_{14} - \beta^{-1}\bar{a}_{32}a_{13}\bar{a}_{13} + \beta^{-2}\bar{a}_{32}\bar{a}_{14}a_{14}$$
$$+ \beta^{-1}\bar{a}_{34}\bar{a}_{13}a_{11} + \beta^{-1}\bar{a}_{33}\bar{a}_{12}a_{13} .$$

$$a'_{24} = \bar{a}'_{13} = \beta^{-1}a_{11}\bar{a}_{14}a_{34} + \beta^{-1}\bar{a}_{12}a_{33}a_{14} + a_{31}a_{13}\bar{a}_{13} - \beta^{-1}a_{31}a_{14}\bar{a}_{14}$$
$$- a_{33}\bar{a}_{13}a_{11} - \beta^{-1}a_{34}\bar{a}_{12}a_{13} .$$

$$a'_{41} = \beta^{-1}\bar{a}'_{32} = -\beta^{-2}\bar{a}_{12}a_{32}\bar{a}_{34} - \beta^{-1}a_{31}\bar{a}_{31}\bar{a}_{14} - \beta^{-1}\bar{a}_{32}\bar{a}_{11}a_{33} + \beta^{-2}a_{32}\bar{a}_{32}\bar{a}_{14}$$
$$+ \beta^{-1}\bar{a}_{31}a_{33}\bar{a}_{12} + \beta^{-1}\bar{a}_{34}a_{31}\bar{a}_{11}.$$

$$a'_{42} = \bar{a}'_{31} = \beta^{-1}a_{11}a_{32}\bar{a}_{34} + a_{13}a_{31}\bar{a}_{31} + \beta^{-1}a_{12}\bar{a}_{32}a_{33} - \beta^{-1}a_{32}\bar{a}_{32}a_{13}$$
$$- \bar{a}_{31}a_{33}a_{11} - \beta^{-1}\bar{a}_{34}a_{31}a_{12} .$$

$$a'_{43} = \beta^{-1}\bar{a}'_{34} = -\beta^{-1}a_{11}\bar{a}_{11}\bar{a}_{34} - \beta^{-1}\bar{a}_{12}\bar{a}_{31}a_{13} - \beta^{-2}a_{12}\bar{a}_{14}\bar{a}_{32} + \beta^{-1}\bar{a}_{32}\bar{a}_{11}a_{13}$$
$$+ \beta^{-1}\bar{a}_{31}\bar{a}_{14}a_{11} + \beta^{-2}\bar{a}_{34}\bar{a}_{12}a_{12}.$$

$$a'_{44} = \bar{a}'_{33} = a_{11}\bar{a}_{11}a_{33} + \beta^{-1}\bar{a}_{12}a_{32}a_{13} + \beta^{-1}a_{31}a_{12}\bar{a}_{14} - a_{31}\bar{a}_{11}a_{13}$$
$$- \beta^{-1}a_{32}\bar{a}_{14}a_{11} - \beta^{-1}a_{33}a_{12}\bar{a}_{12}.$$

Q.E.D.

<u>1.3.10. Lemme</u> : L'inverse d'une K-matrice inversible est une K-matrice.

---

(1) Godement : cours d'algèbre.

En effet, si (a_{ij}) est une $\tilde{K}$-matrice inversible, on a : $0 \neq \ell = \text{dét}(a_{ij}) \in K$ (1.3.5). Donc, avec les notations du lemme 1.3.9, $(a_{ij})^{-1} = \ell^{-1}(a'_{ij})$ est une $\tilde{K}$-matrice, d'après 1.3.4 et 1.3.9.

1.3.11 <u>Proposition</u> : L'application f (1.3.5) est un isomorphisme du groupe multiplicatif des $\tilde{K}$-matrices inversibles, sur le groupe multiplicatif des matrices inversibles d'ordre deux, à coefficients dans l'anneau sous-jacent de A.

Conséquence de 1.3.8 et 1.3.10.

1.4 <u>Isomorphisme F</u>.

1.4.1 <u>Lemme</u> : Les matrices (A_{ij}) $1 \leq i$, $j \leq 2$ et (A'_{ij}) $1 \leq i$, $j \leq 2$ représentent la même homographie à droite non dégénérée si, et seulement si, $\nabla(A_{ij}) \neq 0$ et il existe $\lambda \in K - \{o\}$ tel que $(A'_{ij}) = \lambda(A_{ij})$.

La condition est suffisante. Démontrons qu'elle est nécessaire. Si les homographies non dégénérées définies respectivement par :

$$\begin{cases} X'_1 = A_{11}X_1 + A_{12}X_2 , \\ X'_2 = A_{21}X_1 + A_{22}X_2 , \\ \nabla(A_{ij}) \neq 0 , \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} X'_1 = A'_{11}X_1 + A'_{12}X_2 ; \\ X'_2 = A'_{21}X_1 + A'_{22}X_2 , \\ \nabla(A'_{ij}) \neq 0 , \end{cases}$$

sont identiques, en choisissant $X_1 = 1$, $X_2 = 0$, on obtient l'identité des points à droite (A_{11} , A_{21}) et (A'_{11} , A'_{21}) donc il existe $U \in A\,(NU \neq 0)$ tel que $A'_{11} = A_{11}U$, $A'_{21} = A_{21}U$.

De même, $X_1 = 0$, $X_2 = 1$, entraîne l'existence de $V \in A\,(NV \neq 0)$, tel que $A'_{12} = A_{12}V$, $A'_{22} = A_{22}V$.

Donc, à tout point à droite (X_1 , X_2) correspond $Q \in A\,(NQ \neq 0)$, tel que :

$$A_{11}UX_1 + A_{12}VX_2 = (A_{11}X_1 + A_{12}X_2)Q \quad ,$$

$$A_{21}UX_1 + A_{22}VX_2 = (A_{21}X_1 + A_{22}X_2)Q \quad ,$$

ou $$A_{11}Y + A_{12}Z = 0$$
$$A_{21}Y + A_{22}Z = 0$$

avec : $Y = UX_1 - X_1Q$, $Z = VX_2 - X_2Q$.

D'après la condition $\nabla(A_{ij}) \neq 0$, le système en Y et Z n'admet que la solution $Y = 0$, $Z = 0$ (1.2.1).

Donc, quels que soient X_1 , $X_2 \in A$, il existe $Q \in A$ ($NQ \neq 0$) tel que :

$$X_1Q = UX_1 \quad , \quad X_2Q = VX_2 \quad ,$$

U et V étant des quaternions réguliers déterminés.

En particulier, quels que soient X_1 , X_2 réguliers, le calcul de Q donne :

$$X_1^{-1}UX_1 = X_2^{-1}VX_2 \Longleftrightarrow (X_1X_2^{-1})^{-1}U(X_1X_2^{-1}) = V \; .$$

Posons $A = X_1X_2^{-1}$. A est un quaternion régulier arbitraire tel que $A^{-1}UA = V$.
En prenant $A = 1$ on a : $U = V$, donc $AU = UA$,quel que soit A régulier.

Par suite $U \in K$ (1). Le lemme est démontré.

1.4.2 <u>Définitions</u> : On note $P_3\ (K(\sqrt{\alpha}))$ (2) l'espace projectif défini à partir de l'espace vectoriel $(K(\sqrt{\alpha}))^4$.

On appelle $\tilde{K}$-homographie, toute homographie de $P_3(K(\sqrt{\alpha}))$ définie par une $\tilde{K}$-matrice, dans la base de $(K(\sqrt{\alpha}))^4$ considérée. Une telle $\tilde{K}$-homographie est dite non dégénérée si la $\tilde{K}$-matrice correspondante est inversible.

Les $\tilde{K}$-matrices inversibles formant un groupe multiplicatif (1.3.11), il en résulte que les $\tilde{K}$-homographies non dégénérées forment un groupe multiplicatif h appelé groupe $\tilde{K}$-homographique.

1.4.3 <u>Lemme</u> : Les $\tilde{K}$-matrices (a_{ij}) et (a'_{ij}) représentent la même $\tilde{K}$-homographie si, et seulement s'il existe $\lambda \in K - \{0\}$ tel que $(a'_{ij}) = \lambda(a_{ij})$.

(1) Bibliographie 3 : p. 7 - 9 .

(2) Bourbaki : Alg. ch. 2 .

En effet, d'une part les matrices (a_{ij}) et (a'_{ij}) représentent la même homographie de $P_3(K(\sqrt{a}))$ si, et seulement si, $(a'_{ij}) = \lambda(a_{ij})$, $\lambda \in K(\sqrt{a}) - \{0\}$.

D'autre part, si (a_{ij}) et (a'_{ij}) sont deux $\tilde{K}$-matrices, on a en particulier les relations $a_{22} = \bar{a}_{11}$ et $a'_{22} = \bar{a}'_{11}$ donc $\lambda a_{22} = \bar{\lambda} a_{11}$ et par suite $\lambda = \bar{\lambda} \Longleftrightarrow \lambda \in K$ (en supposant $a_{11} \neq 0$; démonstration analogue dans le cas contraire).

1.4.4 <u>Proposition</u> : L'application F, qui à toute $\tilde{K}$-homographie non dégénérée de matrice (a_{ij}), fait correspondre l'homographie à droite de matrice $f((a_{ij}))$ (1.3.5) , est un isomorphisme du groupe $\tilde{K}$-homographique h sur le groupe homographique à droite H.

F est surjective (résulte de 1.3.11). L'identité des homographies à droite de matrices $f((a_{ij}))$ et $f((a'_{ij}))$ entraine successivement :

$$f((a'_{ij})) = \lambda f((a_{ij})) \quad , \quad \lambda \in K - \{0\} \ (1.4.1)$$

$$(a'_{ij}) = \lambda (a_{ij}) \quad (1.3.7) \quad ;$$

Les $\tilde{K}$-homographies de matrices (a_{ij}) et (a'_{ij}) sont identiques (1.4.3). F est donc aussi injective, d'où on en déduit que F est bijective.

Enfin, F est un isomorphisme, car l'image par F du produit des $\tilde{K}$-homographies de matrices (a_{ij}) et (b_{ij}) , i.e. la $\tilde{K}$-homographie de matrice (a_{ij}) (b_{ij}) est l'homographie à droite de matrice $f((a_{ij})(b_{ij})) = f((a_{ij}))\ f((b_{ij}))$, i.e. le produit des images par F des $\tilde{K}$-homographies données.

1.5. <u>Isomorphismes f^* et F^*</u>.

1.5.1 <u>Lemme</u> : Posons (cf. 1.1.3) :

$$X_1^* = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 v \quad , \quad X_2^* = \bar{x}_3 - \bar{x}_4 v \ ,$$

$$X_1'^* = \bar{x}'_1 - \bar{x}'_2 v \quad , \quad X_2'^* = \bar{x}'_3 - \bar{x}'_4 v \ ,$$

$$x_i \ , \ x'_i \in K(\sqrt{a}) \qquad (1 \leq i \leq 4) \quad ;$$

$$A^*_{11} = \bar{a}_{11} - \beta^{-1} a_{12} v \quad , \quad A^*_{12} = \bar{a}_{13} - \beta^{-1} a_{14} v \ ,$$

$$A^*_{21} = \bar{a}_{31} - \beta^{-1} a_{32} v \quad , \quad A^*_{22} = \bar{a}_{33} - \beta^{-1} a_{34} v \ ,$$

$$a_{ij} \in K(\sqrt{a}) \quad (1 < i \ , \ j < 4).$$

Les relations :

$$X_1'^* = X_1^* A_{11}^* + X_2^* A_{12}^* \quad ,$$
$$X_2'^* = X_1^* A_{21}^* + X_2^* A_{22}^* \quad ,$$

et

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \ ,$$
$$x_2' = \beta^{-1}\bar{a}_{12}x_1 + \bar{a}_{11}x_2 + \beta^{-1}\bar{a}_{14}x_3 + \bar{a}_{13}x_3 \quad ,$$
$$x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \quad ,$$
$$x_4' = \beta^{-1}\bar{a}_{32}x_1 + \bar{a}_{31}x_2 + \beta^{-1}\bar{a}_{34}x_3 + \bar{a}_{33}x_4 \ ,$$

sont équivalentes.

1.5.2 <u>Définition</u> : On appelle f^* , l'application qui, à toute $\tilde{K}$-matrice (a_{ij}) fait correspondre par les relations (1.5.1) :

$$A_{11}^* = \bar{a}_{11} - \beta^{-1}a_{12}v \quad , \quad A_{12}^* = \bar{a}_{13} - \beta^{-1}a_{14}v \quad ,$$
$$A_{21}^* = \bar{a}_{31} - \beta^{-1}a_{32}v \quad , \quad A_{22}^* = \bar{a}_{33} - \beta^{-1}a_{34}v \quad ,$$

la matrice (A_{ij}^*) $1 \leqslant i , j \leqslant 2$, à coefficients dans l'anneau opposé à l'anneau sous-jacent de Λ.

1.5.3 <u>Proposition</u> : L'application f^*(1.5.2) définit l'isomorphisme de deux algèbres sur K : l'algèbre des $\tilde{K}$-matrices et l'algèbre des matrices d'ordre deux, à coefficients dans l'anneau opposé à l'anneau sous-jacent de Λ.

1.5.4 <u>Proposition</u> : L'application f^*(1.5.2) est un isomorphisme du groupe multiplicatif des $\tilde{K}$-matrices inversibles, sur le groupe multiplicatif des matrices inversibles d'ordre deux, à coefficients dans l'anneau opposé à l'anneau sous-jacent de Λ.

1.5.5 <u>Lemme</u> : Les matrices (A_{ij}^*) et $(A_{ij}'^*)$ représentent la même homographie à gauche non dégénérée si, et seulement si, : $\nabla^*(A_{ij}^*) \neq 0$ et il existe $\lambda \in K - \{0\}$ tel que $(A_{ij}'^*) = \lambda(A_{ij}^*)$.

1.5.6 <u>Proposition</u> : L'application F^*, qui, à toute $\tilde{K}$-homographie de matrice (a_{ij}), fait correspondre l'homographie à gauche de matrice $f^*((a_{ij}))$ (1.5.2), est un isomorphisme du groupe $\tilde{K}$-homographique sur le groupe homographique à gauche H^*.

1.6 <u>Les isomorphismes fondamentaux F et F.</u>

1.6.1 <u>Définition</u> : On appelle F (resp. F^*), l'application qui, à toute $\tilde{K}$-homographie de matrice (a_{ij}), fait correspondre l'homographie bilatère dont la composante à droite (resp. à gauche) a pour matrice $f((a_{ij}))$ (resp. $f^*((a_{ij}))$) (1.3.5 ; 1.5.2) .

1.6.2 <u>Théorème</u> : F (resp. F^*) (1.6.1) est un isomorphisme du groupe $\tilde{K}$-homographique h sur le groupe homographique bilatère H. L'application $\Lambda = (F^*)^{-1} F$ (resp. $L = F^* F^{-1}$) est un automorphisme de h (resp. de H)

Donc, à toute homographie bilatère de la d.p.q. correspond par F^{-1} et $(F^*)^{-1}$, un couple de $\tilde{K}$-homographies non dégénérées de matrices respectives (a_{ij}) et (b_{ij}), tel que l'application, qui à la $\tilde{K}$-homographie de matrice (a_{ij}), fait correspondre la $\tilde{K}$-homographie de matrice (b_{ij}); est l'automorphisme Λ.

En effet , F (resp. F^*) est composé de l'isomorphisme F (resp. F^*) (1.4.4 ; 1.5.6) et de l'isomorphisme qui, à toute homographie à droite S (resp. S), associe l'homographie bilatère dont la composante à droite (resp. à gauche) est S (resp. S^*).

CHAPITRE II : Les automorphismes L du groupe homographique bilatère H et Λ du groupe $\tilde{K}$-homographique h.

2.1. Calcul de la $\tilde{K}$-matrice (b_{ij}) $1 \leq i$, $j \leq 4$ définie au théorème 1.6.2.

On se propose, connaissant la $\tilde{K}$-matrice inversible (a_{ij}) ($\mathcal{L}$ = dét $(a_{ij}) \neq 0$), de calculer la $\tilde{K}$-matrice inversible (b_{ij}) définie au théorème 1.6.2. On utilise les relations :

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} A^*_{11}A_{21} - A^*_{21}A_{11} = 0 , \\ A^*_{11}A_{22} - A^*_{21}A_{12} = \lambda , \end{cases} \quad \lambda \in K - \{0\} ,$$

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} A^*_{12}A_{22} - A^*_{22}A_{12} = 0 , \\ - A^*_{12}A_{21} + A^*_{22}A_{11} = \lambda , \end{cases} \quad \lambda \in K - \{0\} ,$$

qui définissent une homographie bilatère (1.2.3), ainsi que les relations :

$$A_{11} = a_{11} + \beta^{-1}a_{12}v \quad , \qquad A_{12} = a_{13} + \beta^{-1}a_{14}v \quad ,$$

$$A_{21} = a_{31} + \beta^{-1}a_{32}v \quad , \qquad A_{22} = a_{33} + \beta^{-1}a_{34}v \quad ,$$

$$A^*_{11} = \bar{b}_{11} - \beta^{-1}b_{12}v \quad , \qquad A^*_{12} = \bar{b}_{13} - \beta^{-1}b_{14}v \quad ,$$

$$A^*_{21} = \bar{b}_{31} - \beta^{-1}b_{32}v \quad , \qquad A^*_{22} = \bar{b}_{33} - \beta^{-1}b_{34}v \quad ,$$

qui définissent respectivement F et F^* (1.6.1).

Le système (I) détermine b_{11} , b_{12} , b_{31} , b_{32} en fonction des a_{ij}.
En effet, en effectuant les calculs comme dans le lemme 1.3.1, et en utilisant 1.1.3 , le système (I) s'écrit successivement :

$$(\bar{b}_{11} - \beta^{-1}b_{12}v)(a_{31} + \beta^{-1}a_{32}v)-(\bar{b}_{31} - \beta^{-1}b_{32}v)(a_{11} + \beta^{-1}a_{12}v) = 0 ,$$

$$(\bar{b}_{11} - \beta^{-1}b_{12}v)(a_{33} + \beta^{-1}a_{34}v)-(\bar{b}_{31} - \beta^{-1}b_{32}v)(a_{13} + \beta^{-1}a_{14}v) = \lambda \quad ,$$

$$\bar{b}_{11}a_{31} + \beta^{-1}\bar{b}_{11}a_{32}v - \beta^{-1}b_{12}\bar{a}_{31}v - \beta^{-1}b_{12}\bar{a}_{32} - \bar{b}_{31}a_{11} - \beta^{-1}\bar{b}_{31}a_{12}v + \beta^{-1}b_{32}\bar{a}_{11}v$$
$$+ \beta^{-1}b_{32}\bar{a}_{12} = 0 \quad ,$$

$\bar{b}_{11}a_{33} + \beta^{-1}\bar{b}_{11}a_{34}v - \beta^{-1}b_{12}\bar{a}_{33}v - \beta^{-1}b_{12}\bar{a}_{34} - \bar{b}_{31}a_{13} - \beta^{-1}\bar{b}_{31}a_{14}v + \beta^{-1}b_{32}\bar{a}_{13}v$
$+ \beta^{-1}b_{32}\bar{a}_{14} = \lambda$,

$\bar{b}_{11}a_{31} - \beta^{-1}b_{12}\bar{a}_{32} - \bar{b}_{31}a_{11} + \beta^{-1}b_{32}\bar{a}_{12} = 0$,

$\bar{b}_{11}a_{32} - b_{12}\bar{a}_{31} - \bar{b}_{31}a_{12} + b_{32}\bar{a}_{11} = 0$,

$\bar{b}_{11}a_{33} - \beta^{-1}b_{12}\bar{a}_{34} - \bar{b}_{31}a_{13} + \beta^{-1}b_{32}\bar{a}_{14} = \lambda$,

$\bar{b}_{11}a_{34} - b_{12}\bar{a}_{33} - \bar{b}_{31}a_{14} + b_{32}\bar{a}_{13} = 0$,

le déterminant du système (I) est :

$$\begin{vmatrix} a_{31} & -\beta^{-1}\bar{a}_{32} & -a_{11} & \beta^{-1}\bar{a}_{12} \\ a_{32} & -\bar{a}_{31} & -a_{12} & \bar{a}_{11} \\ a_{33} & -\beta^{-1}\bar{a}_{34} & -a_{13} & \beta^{-1}\bar{a}_{14} \\ a_{34} & -\bar{a}_{33} & -a_{14} & \bar{a}_{13} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \beta^{-1}\bar{a}_{32} & \bar{a}_{31} & \beta^{-1}\bar{a}_{34} & \bar{a}_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \beta^{-1}\bar{a}_{12} & \bar{a}_{11} & \beta^{-1}\bar{a}_{14} & \bar{a}_{13} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \beta^{-1}\bar{a}_{12} & \bar{a}_{11} & \beta^{-1}\bar{a}_{14} & \bar{a}_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \beta^{-1}\bar{a}_{32} & \bar{a}_{31} & \beta^{-1}\bar{a}_{34} & \bar{a}_{33} \end{vmatrix} = \mathcal{L} \text{ avec } 0 \neq \mathcal{L} = \text{dét}(a_{ij}) \in K \quad (1.3.3)$$

En désignant par y_{ij} le cofacteur du terme a_{ij} dans le déterminant de la $\tilde{K}$-matrice (a_{ij}) (cf. 1.3.9), on obtient :

$$\bar{b}_{11} = \mathcal{L}^{-1} \begin{vmatrix} 0 & -\beta^{-1}\bar{a}_{32} & -a & \beta^{-1}\bar{a}_{12} \\ 0 & -\bar{a}_{31} & -a_{12} & \bar{a}_{11} \\ \lambda & -\beta^{-1}\bar{a}_{34} & -a_{13} & \beta^{-1}\bar{a}_{14} \\ 0 & -\bar{a}_{33} & -a_{14} & \bar{a}_{13} \end{vmatrix} = \lambda\mathcal{L}^{-1} \begin{vmatrix} -\beta^{-1}\bar{a}_{32} & -a_{11} & \beta^{-1}\bar{a}_{12} \\ -\bar{a}_{31} & -a_{12} & \bar{a}_{11} \\ -\bar{a}_{33} & -a_{14} & \bar{a}_{13} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda\ell^{-1} \begin{vmatrix} \beta^{-1}\bar{a}_{32} & a_{11} & \beta^{-1}\bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{31} & a_{12} & \bar{a}_{11} \\ \bar{a}_{33} & a_{14} & \bar{a}_{13} \end{vmatrix} = \lambda\ell^{-1} \begin{vmatrix} \beta^{-1}\bar{a}_{32} & \bar{a}_{31} & \bar{a}_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ \beta^{-1}\bar{a}_{12} & \bar{a}_{11} & \bar{a}_{13} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda\ell^{-1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ \beta^{-1}\bar{a}_{12} & \bar{a}_{11} & \bar{a}_{13} \\ \beta^{-1}\bar{a}_{32} & \bar{a}_{31} & \bar{a}_{33} \end{vmatrix} = \lambda\ell^{-1}(-1)^{3+3} y_{33}$$

Donc $b_{11} = \lambda\ell^{-1}\bar{y}_{33}$.

On trouve de même : $b_{12} = -\lambda\ell^{-1}y_{43}$, $b_{31} = -\lambda\ell^{-1}\bar{y}_{13}$, $b_{32} = \lambda\ell^{-1}y_{23}$

Le système (II) se transforme de façon analogue. On obtient :

$$(b_{ij}) = \lambda\ell^{-1} \begin{pmatrix} \bar{y}_{33} & -y_{43} & -\bar{y}_{31} & y_{41} \\ -\beta^{-1}\bar{y}_{43} & y_{33} & \beta^{-1}\bar{y}_{41} & -y_{31} \\ -\bar{y}_{13} & y_{23} & \bar{y}_{11} & -y_{21} \\ \beta^{-1}\bar{y}_{23} & -y_{13} & -\beta^{-1}\bar{y}_{21} & y_{11} \end{pmatrix} ; \lambda,\ell \in K - \{0\}$$

2.2. <u>Simplification de l'expression de (b_{ij}). Propriétés de l'automorphisme A</u>

2.2.1. De 1.3.9 résultent les relations :

$$y_{12} = \beta^{-1}\bar{y}_{21} \ , \ y_{22} = \bar{y}_{11} \ , \ y_{32} = \beta^{-1}\bar{y}_{41} \ , \ y_{42} = \bar{y}_{31} \ ,$$

$$y_{14} = \beta^{-1}\bar{y}_{23} \ , \ y_{24} = \bar{y}_{13} \ , \ y_{34} = \beta^{-1}\bar{y}_{43} \ , \ y_{44} = \bar{y}_{33} \ .$$

Donc :

$$(b_{ij}) = \lambda \ell^{-1} \begin{pmatrix} y_{44} & -y_{43} & -y_{42} & y_{41} \\ -y_{34} & y_{33} & y_{32} & -y_{31} \\ -y_{24} & y_{23} & y_{22} & -y_{21} \\ y_{14} & y_{13} & -y_{12} & y_{11} \end{pmatrix} ; \ \lambda, \ell \in K - \{0\}$$

2.2.2. Définition : On appelle pseudo-transposée de la matrice (a_{ij}) $1\leq i, j\leq 4$ à coefficients dans un anneau , la matrice $^{\sigma}(a_{ij}) = (a'_{ij})$ $1\leq i, j\leq 4$ telle que :

$$a'_{ij} = (-1)^{1+\delta_{ij}+\delta_{ij'}} a_{i'j'} \quad (1\leq i, j\leq 4),$$

avec $i' = 5-i$, $j' = 5-j$, $\delta_{ij} = 1$ et $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ si $i\neq j$.

2.2.3. Lemme : Si (a_{ij}) est une matrice d'ordre quatre, à coefficients dans un anneau, on a : $^{\sigma}(^{\sigma}(a_{ij})) = (a_{ij})$.

Posons $^{\sigma}(a_{ij}) = (a'_{ij})$ et $^{\sigma}(a'_{ij}) = (a''_{ij})$. Pour tout $i, j \in \{1,2,3,4\}$ on a :

$$a''_{ij} = (-1)^{1+\delta_{ij}+\delta_{ij'}} a'_{i'j'} ,$$

$$= (-1)^{1+\delta_{ij}+\delta_{ij'}} (-1)^{1+\delta_{i'j'}+\delta_{i'j}} a_{ij} = a_{ij} ,$$

car $\delta_{i'j'} = \delta_{ij}$ et $\delta_{ij'} = \delta_{i'j}$.

q.e.d.

2.2.4. Lemme : Si (a_{ij}) est une matrice d'ordre quatre, à coefficients dans un anneau, on a : $^{\sigma}(^{t}(a_{ij})) = {}^{t}(^{\sigma}(a_{ij}))$.

Posons $^{\sigma}(a_{ij}) = (a'_{ij})$ et $^{t}(a'_{ij}) = (b'_{ij})$. On a :

$$b'_{ij} = a'_{ji} = (-1)^{1+\delta_{ji}+\delta_{ji'}} a_{j'i'} \quad (1\leq i, j\leq 4).$$

Posons encore ${}^t(a_{ij}) = (c_{ij})$ et ${}^\sigma(c_{ij}) = (c'_{ij})$; on obtient :

$$c'_{ij} = (-1)^{+\delta_{ij}+\delta_{ij'}} c_{i'j'} = (-1)^{+\delta_{ij}+\delta_{ij'}} a_{j'i'} \quad (1<i \ , \ j<4).$$

Donc pour tout $i \ , \ j \in \{1,2,3,4\}$ on a : $b'_{ij} = c'_{ij}$, car $\delta_{ji} = \delta_{ij}$ et $\delta_{ji'} = \delta_{ij'}$. q.e.d.

2.2.5 <u>Lemme</u> : Si (a_{ij}) et (b_{ij}) sont des matrices d'ordre quatre, à coefficients dans un anneau on a : ${}^\sigma((a_{ij})\ (b_{ij})) = {}^\sigma(a_{ij})\ {}^\sigma(b_{ij})$.

Posons $(c_{ij}) = (a_{ij})(b_{ij})$, ${}^\sigma(a_{ij}) = (a'_{ij})$, ${}^\sigma(b_{ij}) = (b'_{ij})$, ${}^\sigma(c_{ij}) = (c'_{ij})$. On a : $c_{ij} = \sum_{\ell=1}^{4} a_{i\ell}\, b_{\ell j}$. Il s'agit de démontrer l'égalité : $(c'_{ij}) = (a'_{ij})(b'_{ij})$, i.e. : $c'_{ij} = \sum_{k=1}^{4} a'_{ik}\, b'_{kj}$, ou :

$$(-1)^{1+\delta_{ij}+\delta_{ij'}} c_{i'j'} = \sum_{k=1}^{4} (-1)^{1+\delta_{ik}+\delta_{ik'} + 1 + \delta_{kj}+\delta_{kj'}}$$

$$a_{i'k'}\, b_{k'j'} \ , \text{ pour tous } i \ , \ j \in \{1,2,3,4\}.$$

Cela revient à prouver que les entieres : $n = 1 + \delta_{ij} + \delta_{ij'}$ et $n = \delta_{ik} + \delta_{ik'} + \delta_{kj} + \delta_{kj'}$, sont de même parité pour tout $i, j, k \in \{1,2,3,4,\}$.

Si $k = i$, $n_1 = \delta_{ii} + \delta_{ii'} + \delta_{ij} + \delta_{ij'}$

$$= 1 + \delta_{ij} + \delta_{ij'} = n \quad \text{car} \quad \delta_{ii'} = 0.$$

Si $k = i'$, $n_1 = \delta_{ii'} + \delta_{ii} + \delta_{i'j} + \delta_{i'j'}$

$$= 1 + \delta_{ij'} + \delta_{ij} = n \ .$$

Si $k = j$ ou si $k = j'$, on obtient de même $n = n_1$.

D'autre part, on a : $i \neq i'$ et $j \neq j'$, donc les entiers i , i', j, j' ne sont distincts deux à deux que dans le cas où $i \neq j$ et $i \neq j'$. Il en résulte que dans cette hypothèse, k est égal à l'un des nombres i, j, i', j' , donc $n = n_1$.

Si $i = j$: $n = 1 + \delta_{ii} + \delta_{ii'} = 2$,

$$n_1 = \delta_{ik} + \delta_{ik'} + \delta_{ki} + \delta_{ki'} = 2(\delta_{ik} + \delta_{ik'}).$$

Si $i = j'$: $n = 1 + \delta_{j'j} + \delta_{j'j'} = 2$

$$n = \delta_{j'k} + \delta_{j'k'} + \delta_{kj} + \delta_{kj'} ,$$
$$= 2\ (\delta_{j'k} + \delta_{kj}).$$

Dans tous les cas n et n_1 sont de même parité.

q.e.d.

2.2.6. <u>Lemme</u> : Si (a_{ij}) est une matrice inversible d'ordre quatre à coefficients dans un anneau on a :

$$({}^{\sigma}(a_{ij}))^{-1} = {}^{\sigma}((a_{ij})^{-1}).$$

En effet, la relation $(a_{ij})\ (a_{ij})^{-1} = (j_4)$ ((j_4) désigne la matrice unité d'ordre quatre) entraîne : ${}^{\sigma}(a_{ij})\ {}^{\sigma}((a_{ij})^{-1}) = {}^{\sigma}(j_4) = (j_4)$.

2.2.7 <u>Proposition</u> : Soit A un anneau commutatif. L'application $(a_{ij}) \to {}^{\sigma}(a_{ij})$ est un automorphisme involutif de l'algèbre sur A des matrices d'ordre quatre, à coefficients dans A.

Cette application est bijective puisque, d'après 2.2.3, elle est involutive. La proposition résulte alors de 2.2.5 et des relations :

$${}^{\sigma}((a_{ij}) + (b_{ij})) = {}^{\sigma}(a_{ij}) + {}^{\sigma}(b_{ij}) \text{ et } {}^{\sigma}(m(a_{ij})) = m({}^{\sigma}(a_{ij})) \text{ pour}$$

tout $m \in A$, déduites de la définition 2.2.2.

2.2.8. <u>Proposition</u> : A la $\tilde{K}$-homographie de matrice (a_{ij}), l'automorphisme Λ (1.6.2), fait correspondre la $\tilde{K}$-homographie de matrice (b_{ij}) =
$(b_{ij}) = {}^{\sigma}({}^{t}(a_{ij})^{-1})$.

D'après 2.2.1 et 2.2.2 on a $(b_{ij}) = \lambda\ell^{-1}{}_{\times}\sigma(y_{ij})$ avec $\lambda,\ \ell \in K - \{0\}$
La relation $(a_{ij})^{-1} = \ell^{-1}{}_{\times}{}^{t}(y_{ij})$ donne : $(y_{ij}) = \ell{\times}{}^{t}((a_{ij})^{-1})$.
Donc : $(b_{ij}) = \lambda\ell^{-1}{\times}{}^{\sigma}(\ell \times {}^{t}((a_{ij})^{-1})) = {\times}{}^{\sigma}({}^{t}(a_{ij})^{-1})$ (2.2.7).

Mais (b_{ij}) étant la matrice d'une $\tilde{K}$-homographie, est définie à un facteur près de $K - \{0\}$ (1.4.3) ; on peut prendre :

$$(b_{ij}) = {}^{\sigma}({}^{t}((a_{ij})^{-1})).$$

Les opérations de transposition et d'inversion étant permutables, on pose : $({}^{t}(a_{ij}))^{-1} = {}^{t}((a_{ij})^{-1}) = {}^{t}(a_{ij})^{-1}$ (1)

Donc : $(b_{ij}) = {}^{\sigma}({}^{t}(a_{ij})^{-1})$.

2.2.9 Proposition : L'automorphisme A (1.6.2) est involutif.

En effet, de 2.2.3 , 2.2.4 , 2.2.6 résulte que :

$(b_{ij}) = {}^{\sigma}({}^{t}(a_{ij})^{-1}) \Longrightarrow (a_{ij}) = {}^{\sigma}({}^{t}(b_{ij})^{-1})$.

2.3 Propriétés de l'automorphisme L . Définition des groupes G et G .

2.3.1 Proposition : A toute homographie bilatère, dont la composante à droite a pour matrice (A_{ij}), l'automorphisme L (1.6.2) fait correspondre l'homographie bilatère, dont la composante à gauche a pour matrice $(A^{*}_{ij}) = (\bar{A}_{ij})$.

In résulte de 1.6.2. et de 1.3.5 et 1.5.2.

2.3.2 Proposition : Deux $\tilde{K}$-homographies s et s' s'échangent par A (1.6.2 ; 2.2.9) si, et seulement si, l'une des conditions suivantes est réalisée :

(1) $F(s) = F^{*}(s')$

(2) $F(s) = L(F(s'))$

(3) $F^{*}(s) = L(F^{*}(s'))$

La relation $s' = A(s)$ s'écrit : $s' = (F^{*})^{-1}F(s)$ (1.6.2) ; elle équivaut à (1).

(2) devient : $F(s) = F^{*}F^{-1}(F(s'))$ (1.6.2) et se ramène à (1).

D'après (1), (3) s'écrit : $F(s') = L(F(s))$, égalité qui n'est autre que (2).

---

(1) Bourbaki : Alg. ch. 2.

2.3.3 <u>Corollaire</u> : L'automorphisme L est involutif.

En effet, d'après 2.3.2, de $F(s) = L(F(s'))$ et $F(s') = L(F(s))$, on déduit $F(s) = L(L(F(s)))$, et si s est générique du groupe $\tilde{K}$-homographique h, $F(s)$ est aussi générique du groupe homographique bilatère (1.6.2).

2.3.4 <u>Proposition</u> : Par restriction, F (resp. F^*) définit un isomorphisme du sous-groupe G formé des éléments du groupe $\tilde{K}$-homographique h, invariants par l'automorphisme Λ, sur le sous-groupe G formé des éléments du groupe homographique bilatère H, invariants par l'automorphisme L. F et F^* s'identifient sur G.

G est un sous-groupe de h. En effet, $s \in G$ équivaut à $\Lambda(s) = s$, donc d'une part : $s \in G$ entraîne $\Lambda(s^{-1}) = (\Lambda(s))^{-1} = s^{-1}$ i.e. $s^{-1} \in G$.

D'autre part : $s \in G$ et $s' \in G$ ont pour conséquence $\Lambda(s s') = \Lambda(s)\Lambda(s') = ss'$ i.e. $ss' \in G$.

La relation $s \in G$ équivaut à $\Lambda(s) = s$ i.e. à $F(s) = F^*(s)$ ou à $F(s) = L(F(s))$, d'après 2.3.2. Donc F et F^* s'identifient sur G, et l'image de G par F est G.

2.3.5 On démontrera au chapitre III que les sous-groupes G et G sont non triviaux, et on étudiera leur structure.

CHAPITRE III : Structure du groupe G constitué des homographies bilatères invariantes par l'automorphisme L et structure du groupe G constitué des $\tilde{K}$-homographies invariantes par l'automorphisme Λ .

3.1. Structure de G.

3.1.1. Lemme : Soient A et C deux quaternions irréguliers tels que $AC = 0$.

Il existe un élément unique c de $K(\sqrt{\alpha})$ tel que $C = \bar{A}c$.

En effet, d'après 1.1.5 , il existe $B \in A$ tel que $C = \bar{A}B$.

Posons : $A = a_1 + a_2 v$, $B = b_1 + b_2 v$ $(a_1 , a_2 , b_1 , b_2 \in K(\sqrt{\alpha}))$. A étant irrégulier, on a $NA = 0$ et $A \neq 0$. On en déduit : $a_2 \neq 0$, car dans le cas contraire, A appartiendrait au corps $K(\sqrt{\alpha})$ et la relation $NA = 0$ entraînerait $A = 0$, ce qui est exclu.

On peut donc poser : $c = B - A\bar{b}_2 (\bar{a}_2)^{-1}$.

On a : $c = (b_1 + b_2 v) - (a_1 + a_2 v) \bar{b}_2 (\bar{a}_2)^{-1} = b_1 - a_1\bar{b}_2(\bar{a}_2)^{-1} \in K(\sqrt{\alpha})$ et $\bar{A}c = \bar{A}B - (NA) \bar{b}_2 (\bar{a}_2)^{-1} = \bar{A}B = C$.

c est unique, car s'il existait $c' \in K(\sqrt{\alpha})$ tel que $c' \neq c$ et $C = \bar{A}c'$, on aurait $\bar{A} (c-c') = 0$. Donc, $c - c' \in K(\sqrt{\alpha})$ étant régulier $(c - c' \neq 0)$, on en déduirait $A = 0$, contrairement à l'hypothèse.

q.e.d.

3.1.2 Lemme : Un élément S de G est défini par les matrices (A_{ij}) et $(\bar{A}_{ij})$, qui représentent respectivement sa composante à droite et sa composante à gauche, si, et seulement si, les coefficients sont liés par les relations :

$$(E) \begin{cases} (1) \quad \bar{A}_{11}A_{21} = \lambda_1, \lambda_1 \text{ élément arbitraire de } K , \\ (2) \quad \bar{A}_{12}A_{22} = \lambda_2, \lambda_2 \text{ élément arbitraire de } K, \\ (3) \quad \bar{A}_{11}A_{22} = \bar{A}_{21}A_{12} = \lambda_3, \lambda_3 \text{ élément arbitraire de } K - \{0\} \end{cases}$$

avec la condition $\nabla(A_{ij}) \neq 0$.

Il résulte de la définition de G (2.3.4) , de la proposition 2.3.1 et de 1.2.3 , les relations nécessaires et suffisantes :

$$\bar{A}_{11}A_{21} - \bar{A}_{21}A_{11} = \bar{A}_{12}A_{22} - \bar{A}_{22}A_{12} = 0 \quad ,$$

$$\bar{A}_{11}A_{22} - \bar{A}_{21}A_{12} = \bar{A}_{22}A_{11} - \bar{A}_{12}A_{21} = \lambda_3 \text{ pour tout } \lambda_3 \in K - \{0\} \quad ,$$

$\nabla(A_{ij}) \neq 0$. D'où le lemme.

3.1.3 <u>Lemme</u> : Lorsque $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 \neq 0$, on déduit de (E) (cf. 3.1.2) :

$A_{11} = 0$, $A_{21} \neq 0$ ou $A_{11} \neq 0$, $A_{21} = 0$. De même lorsque $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 = 0$ on a $A_{12} = 0$, $A_{22} \neq 0$. ou $A_{12} \neq 0$, $A_{22} = 0$.

Supposons $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$ (même démonstration dans l'autre cas). D'après (3), on ne peut avoir simultanément $A_{11} = 0$ et $A_{21} = 0$. Il suffit donc de démontrer que les relations simultanées $A_{11} \neq 0$ et $A_{21} \neq 0$ sont exclues.

En effet, si on avait $A_{11} \neq 0$ et $A_{21} \neq 0$, (1) entrainerait $NA_{11} = NA_{21} = 0$ ainsi que l'existence de $Q \in A$ (cf. 1.1.4) tel que $\bar{A}_{11} = Q\bar{A}_{21}$. Cette dernière égalité et les relations $NA_{22} \neq 0$, $A_{12} = \lambda_2(NA_{22})^{-1}A_{22}$ déduites de (2), permettraient d'écrire (3) sous la forme :

$$Q\bar{A}_{21}A_{22} - \bar{A}_{21}\,\lambda_2(NA_{22})^{-1}A_{22} = \lambda_3 \ , \quad \lambda_3 \in K - \{0\} \ ,$$

ou
$$(Q - \lambda_2\,(NA_{22})^{-1})\,\bar{A}_{21}A_{22} = \lambda_3, \quad \lambda_3 \in K - \{0\} \ ,$$

ce qui est impossible, car le premier membre de cette égalité est un quaternion irrégulier puisque $NA_{21} = 0$, et le deuxième membre est régulier.

3.1.4 <u>Lemme</u> : Si l'un des quatre quaternions contenus dans (E) (cf. 3.1.2) est tel que $A_{ij} = 0$ ou $NA_{ij} \neq 0$, les trois autres vérifient la même relation.

Supposons $A_{11} = 0$ ou $NA_{11} \neq 0$. La démonstration est la même dans les autres cas.

1°) Supposons $A_{11} = 0$.

(3) entraîne $NA_{21} \neq 0$ et $NA_{12} \neq 0$. Donc de (2) résulte que $A_{22} = 0$ si $\lambda_2 = 0$ et $NA_{22} \neq 0$ si $\lambda_2 \neq 0$, le lemme est démontré dans ce cas.

2°) Supposons $NA_{11} \neq 0$ quatre cas sont possibles :

si $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 \neq 0$ on a : $NA_{22} \neq 0$, $NA_{12} \neq 0$, $NA_{21} \neq 0$.

si $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 \neq 0$ on a d'une part $NA_{12} \neq 0$, $NA_{22} \neq 0$; d'autre part, d'après 3.1.3 : $A_{21} = 0$.

si $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 = 0$ les conclusions sont analogues pour les mêmes raisons.

Enfin, si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, (1) entraîne $A_{21} = 0$. Donc de (3) résulte : $NA_{22} \neq 0$, et par suite de (2) : $A_{12} = 0$. Le lemme est vrai dans chaque cas.

3.1.5. <u>Lemme</u> : Les solutions du système (E) (cf. 3.1.2, inconnues A_{ij}, $1 \leq i$, $j \leq 2$) sont obtenues en réunissant les solutions des systèmes (E') et (E") :

$$(E')\quad \begin{cases} (1) & \bar{A}_{11}A_{21} = \lambda_1,\ \lambda_1 \in K, \\ (2) & \bar{A}_{12}A_{22} = \lambda_2,\ \lambda_2 \in K \\ (3) & \bar{A}_{11}A_{22} - \bar{A}_{21}A_{12} = \lambda_3,\quad \lambda_3 \in K - \{0\}, \\ (4') & NA_{ij} \neq 0 \text{ ou } A_{ij} = 0\ (1 \leq i,\ j \leq 2), \end{cases}$$

$$(E'')\quad \begin{cases} (1) & \bar{A}_{11}A_{21} = \lambda_1,\quad \lambda_1 \in K, \\ (2) & \bar{A}_{12}A_{22} = \lambda_2,\quad \lambda_2 \in K, \\ (3) & \bar{A}_{11}A_{22} - \bar{A}_{21}A_{12} = \lambda_3,\quad \lambda_3 \in K - \{0\}, \\ (4'') & NA_{ij} = 0 \quad \text{et} \quad A_{ij} \neq 0\ \ (1 \leq i,\ j \leq 2). \end{cases}$$

En effet, d'après 3.1.4, toute solution de (E) est solution de (E') ou de (E"). Réciproquement, toute solution de (E') ou de (E") est solution de (E).

3.1.6. <u>Proposition</u> : Les solutions du système (E') (cf. 3.1.5) sont :

$A_{11} = aA$, $A_{12} = bA$,

$A_{21} = cA$, $A_{22} = dA$,

où A quaternion régulier ($NA \neq 0$) et a, b, c, $d \in K$ vérifient les relations : $ad - bc \neq 0$, $ac\,(NA) = \lambda_1$, $bd\,(NA) = \lambda_2$, $(ad - bc)\,(NA) = \lambda_3$.

A cause de la condition $\lambda_3 \neq 0$ les seules formes possibles de (4') sont :

(4_1)	$NA_{11} \neq 0$,	$NA_{12} \neq 0$,	$NA_{21} \neq 0$,	$NA_{22} \neq 0$,
(4_2)	$A_{11} = 0$,	$NA_{12} \neq 0$,	$NA_{21} \neq 0$,	$NA_{22} \neq 0$,
(4_3)	$NA_{11} \neq 0$,	$A_{12} = 0$,	$NA_{21} \neq 0$,	$NA_{22} \neq 0$,
(4_4)	$NA_{11} \neq 0$,	$NA_{12} \neq 0$,	$A_{21} = 0$,	$NA_{22} \neq 0$,
(4_5)	$NA_{11} \neq 0$,	$NA_{12} \neq 0$,	$NA_{21} \neq 0$,	$A_{22} = 0$,
(4_6)	$A_{11} = 0$,	$NA_{12} \neq 0$,	$NA_{21} \neq 0$,	$A_{22} = 0$,
(4_7)	$NA_{11} \neq 0$,	$A_{12} = 0$,	$A_{21} = 0$,	$NA_{22} \neq 0$,

Démontrons la proposition dans le cas de (4_1) et de (4_2) (la démonstration est analogue dans les autres cas).

1° <u>Dans le cas 4_1</u> , A_{11} étant régulier, pour la symétrie des notations, on peut écrire : $A_{11} = aA$ avec $A \in \mathcal{A}$, $NA \neq 0$, $a \in K - \{0\}$.

(1) devient : $\overline{aA}A_{21} = \lambda_1 \Longleftrightarrow A_{21} = cA$ avec $c = \lambda_1\, a^{-1}\,(NA)^{-1} \in K - \{0\}$.

(2) équivaut à $\bar{A}_{22}A_{12} = \lambda_2 \Longleftrightarrow A_{12} = \lambda_2\,(NA_{22})^{-1}A_{22}$ puisque $NA_{22} \neq 0$.

En remplaçant A_{11} , A_{21} , A_{12} par les valeurs trouvées, (3) s'écrit :

$\dot{A}A_{22}\,(a - c\lambda_2(NA_{22})^{-1}) = \lambda_3$, et puisque $\lambda_3 \neq 0$, (3) équivaut à :

$a - c\lambda_2(NA_{22})^{-1} \neq 0$. Et $A_{22} = dA$ avec $d = \lambda_3(NA)^{-1}(a - c\lambda_2(NA_{22})^{-1})^{-1}$ $K - \{0\}$

La relation $A_{12} = \lambda_2 \, (NA_{22})^{-1}A_{22}$ s'écrit : $A_{12} = bA$, avec b
$b = \lambda_2(NA_{22})^{-1}d \in K - \{0\}$. Il en résulte que $bd^{-1} = \lambda_2(NA_{22})^{-1}$, donc la relation $a - c\,\lambda_2\,(NA_{22})^{-1} \neq 0$ s'écrit : $a - c\,bd^{-1} \neq 0$ i.e. $ad - bc \neq 0$.

Ainsi, toute solution de (E') est de la forme :

$$A_{11} = aA \quad , \quad A_{12} = bA \quad ,$$

$$A_{21} = cA \quad , \quad A_{22} = dA \quad ,$$

où A est un quaternion régulier et a, b, c, d des scalaires tels que $ad - bc \neq 0$.

En substituant dans les premiers membres de (1) , (2) , (3) on obtient les conditions : $ac(NA) = \lambda_1$, $bd(NA) = \lambda_2$ $(ad - bc)\,(NA) = \lambda_3$, ce qui achève la démonstration dans le cas 4}.

2° <u>Dans le cas 4}</u> , on peut encore poser pour la symétrie des notations : $A_{11} = aA$, $A_{12} = bA$ avec $NA \neq 0$, a , $b \in K$, $a = 0$, $b \neq 0$ puisque $A_{11} = 0$ et $NA_{12} \neq 0$.

De (2) résulte $A_{22} = \lambda_2(NA_{12})^{-1}A_{12} = dA$ avec $d = \lambda_2(NA_{12})^{-1}b \in K - \{0\}$.
On déduit de (3) :

$$\bar{A}_{21}A_{12} = -\lambda_3 \text{ , i.e. } \bar{A}_{12}A_{21} = -\lambda_3, \text{ donc } A_{21} = -\lambda_3\,(NA_{12})^{-1}A_{12} = cA$$

avec $c = -\lambda_3(NA_{12})^{-1}b \in K - \{0\}$.

La démonstration s'achève comme dans le 1°.

3.1.7. <u>Lemme</u> : Le système (E") (cf. 3.1.5) équivaut à (E''_1) :

(4") $NA_{ij} = 0$ et $A_{ij} \neq 0$ $(1 \leq i\ ,\ j \leq 2)$,

(5) $A_{21} = A_{11}\,c$, $c \in K(\sqrt{\alpha})$,

(6) $A_{22} = A_{12}\,c'$, $c' \in K(\sqrt{\alpha})$,

(7) $(\bar{A}_{11}A_{12})c' - \tilde{c}\,(\bar{A}_{11}A_{12}) = \lambda_3$, $\lambda_3 \in K - \{0\}$.

Remarquons d'abord que dans le système (E"), la condition $NA_{ij} = 0$ $(1 \leq i\ ,\ j \leq 2)$, entraîne : $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Il en résulte que compte tenu de (4") , (5) se déduit de (1) (d'après 3.1.1) et (1) se déduit de (5) ; de même, (2) équivaut à (6).

Par suite, (E") entraîne (E''_1) et réciproquement (E''_1) entraîne (E"), ce qui démontre le lemme.

3.1.8 : Lemme : Posons :

(8) $\bar{A}_{11}A_{12} = x_1 + x_2 v$, x_1 , $x_2 \in K(\sqrt{\alpha})$.

Le système (E''_1) (3.1.7) équivaut à (E''_2) :

(4") $\quad NA_{ij} = 0$ et $A_{ij} \neq 0 \quad (1 \leq i , j \leq 2)$,

(5) $\quad A_{21} = A_{11}c$, $\quad c \in K(\sqrt{\alpha})$,

(6) $\quad A_{22} = A_{12}c$, $\quad c \in K(\sqrt{\alpha})$

(10) $\quad x_1 (c - \bar{c}) = \lambda_3$, $\lambda_3 \in K - \{0\}$.

(6') étant la conjonction de (6) et :

(9) $c' = c$,

Il suffit de démontrer :

1° (4") et (7) $\Longrightarrow$ (9) et (10) ,

2° (9) et (10) $\Longrightarrow$ (7) ,

car il résulte du 1) : (E''_1) $\Longrightarrow$ (E''_2) et du 2° : (E''_2) $\Longrightarrow$ (E''_1).

Remarquons d'abord que (7) s'écrit :

$(x_1 + x_2 v)\, c' - \bar{c}\,(x_1 + x_2 v) = \lambda_3$, $\lambda_3 \in K - \{0\}$,

donc équivaut à la conjonction des relations :

(11) $x_1 c' - \bar{c} x_1 = \lambda_3$, $\lambda_3 \in K - \{0\}$,

(12) $x_2 (\bar{c}' - \bar{c}) = 0$.

1° Supposons vérifiées les relations (4") et (7).

On a d'une part (11) et (12), d'autre part $N(\bar{A}_{11}A_{12}) = 0$, i.e. d'après (8) :

(13) $Nx_1 - \beta N x_2 = 0$.

Il en résulte : $x_1 \neq 0$ et $x_2 \neq 0$, car dans le cas contraire, (13) entraîne $x_1 = x_2 = 0$, donc (8) entraîne $\bar{A}_{11}A_{12} = 0$, en contradiction avec (7).

$x_2 \in K(\sqrt{\alpha}) - \{0\}$ étant régulier , (9) se déduit de (12), et (10) se déduit de (11) et (9).

2° (9) et (10) $\Longrightarrow$ (11) et (12) $\Longrightarrow$ (7) q.e.d.

3.1.9. Lemme : Posons :

(14) $A_{ij} = a_{ij} + b_{ij}v$, $a_{ij}, b_{ij} \in K(\sqrt{\alpha})$ $(1 \leq i,j \leq 2)$.

La relation :

(4") $NA_{ij} = 0$ et $A_{ij} \neq 0$ $(1 \leq i,j \leq 2)$, entraîne :

(15) $Na_{ij} - \beta Nb_{ij} = 0$ $(1 \leq i,j \leq 2)$,

(16) $a_{ij} \neq 0$, $b_{ij} \neq 0$ $(1 \leq i,j \leq 2)$,

(17) $a_{12} = ba_{11}$, $b_{12} = b'b_{11}$, b , $b' \in K(\sqrt{\alpha})$,

(18) $x_1 = Na_{11}(b - \bar{b}')$.

x_1 est défini par la relation (8) (cf. 3.1.8).

(15) résulte de (14) et de la relation $NA_{ij} = 0$, contenue dans (4").

La négation de (16) entraîne, d'après (14) et (15), $A_{ij} = 0$, contrairement à (4").

On peut poser $a_{12}(a_{11})^{-1} = b \in K(\sqrt{\alpha})$ et $b_{12}(b_{11})^{-1} = b' \in K(\sqrt{\alpha})$, puisque $a_{11} \neq 0$ et $b_{11} \neq 0$. On obtient (17).

D'après (8) et (14) on a : $\bar{A}_{11}A_{12} = x_1 + x_2v = (\bar{a}_{11} - b_{11}v)(a_{12} + b_{12}v)$, donc $x_1 = \bar{a}_{11}a_{12} - \beta b_{11}\bar{b}_{12}$.

(17) entraîne : $x_1 = (Na_{11})b - \beta(Nb_{11})\bar{b}'$, et la relation $Na_{11} = \beta Nb_{11}$ déduite de (15) donne (18).

3.1.10. Lemme : Le système (E_2'') (3.1.8) équivaut à (E_3'') :

(4") $NA_{ij} = 0$ et $A_{ij} \neq 0$, $(1 \leq i,j \leq 2)$,

(5) $A_{21} = A_{11}c$, $c \in K(\sqrt{\alpha})$,

(6') $A_{22} = A_{12}c$, $c \in K(\sqrt{a})$,

(19) $A_{12} = bA_{11}$, $b \in K(\sqrt{a})$,

(20) $(Na_{11})(b-\bar{b})(c-\bar{c}) = \lambda_3$, $\lambda_3 \in K - \{0\}$.

Il suffit de démontrer

1° (4") et (10) $\Longrightarrow$ (19) et (20)

2° (4"), (19), (20) $\Longrightarrow$ (10),

car il résulte du 1° : $(E''_2) \Longrightarrow (E''_3)$ et du 2° : $(E''_3) \Longrightarrow (E''_2)$.

1°) Supposons vraies les relations (4"), (10) ; démontrons (19) et (20).

D'après 3.1.9 : (15), (16), (17), (18) sont valables. Il résulte de (10) : $c-\bar{c} \neq 0$ et $\bar{x}_1\ (\bar{c}-c) = \lambda_3$. On a donc : $x_1(c-\bar{c}) = \bar{x}_1(\bar{c}-c)$ i.e. $(x_1 + \bar{x}_1)(c-\bar{c}) = 0$. La régularité de $c-\bar{c} \in K(\sqrt{a}) - \{0\}$ entraîne :

(21) $x_1 + \bar{x}_1 = 0$.

De (18) et (21) on déduit : $(Na_{11})\ (b-\bar{b}'+\bar{b}-b') = 0$ et d'après (16), par suite de la régularité de $a_{11} \in K(\sqrt{a}) - \{0\}$:

(22) $b+\bar{b} = b'+\bar{b}'$.

(15) et (17) entraînent successivement :

$$Na_{12} - \beta Nb_{12} = 0 \text{ et } (Na_{11})(Nb) - \beta(Nb_{11})(Nb') = 0 .$$

Appliquons à nouveau (15), on obtient : $(Na_{11})(Nb - Nb') = 0$ i.e :

(23) $Nb = Nb'$.

De (22) et (23) résulte : $b' = b$ ou $b' = \bar{b}$. Démontrons que la relation $b' = \bar{b}$ est exclue. Pour cela remarquons d'abord que d'après (14), l'égalité $A_{12} = bA_{11}$ s'écrit : $a_{12} + b_{12}v = b(a_{11} + b_{11}v)$. Elle équivaut à $a_{12} = ba_{11}$ et $b_{12} = bb_{11}$, i.e d'après (17), équivaut à $b'b_{11} = bb_{11}$. Donc :

(24) $A_{12} = ba_{11} \Longleftrightarrow b' = b$,

car d'après (16) : $b_{11} \in K(\sqrt{a}) - \{0\}$ est régulier. De même $A_{12} = A_{11}b \Longleftrightarrow b' = \bar{b}$.

La relation $b' = \bar{b}$ entraînerait successivement : $A_{12} = A_{11}b$,

$\bar{A}_{11}A_{12} = (NA_{11})b = 0$, $x_1 = 0$ (d'après (8)), en contradiction avec (10).

On a donc :

(25) $b' = b$,

ce qui démontre (19) d'après (24).

(20) résulte de (10) , (18) et (25).

2°) Supposons vraies les relations (4") , (19), (20) démontrons (10).

D'après 3.1.9 : (15), (16), (17), (18) sont valables ;

(19) s'écrit : $a_{12} + b_{12}v = b(a_{11} + b_{11}v)$ (cf. (14)) donc entraîne :

$a_{12} = ba_{11}$ et $b_{12} = bb_{11}$. D'après (17) on a : $b'b_{11} = bb_{11}$ et d'après (16) : $b = b'$. La relation $x_1 = (Na_{11})(b-\bar{b})$ résulte alors de (18), et (10) se déduit de (20).

3.1.11. <u>Lemme</u> : Le système E" (3.1.5) équivaut à (E''_4) :

$A_{12} = bA_{11}$, $A_{21} = A_{11}c$, $A_{22} = bA_{11}c$, $b, c \in K(\sqrt{a})$

(4") $A_{ij} \neq 0$ et $NA_{ij} = 0$ $(1\leq i,j\leq 2)$,

(20) $N(a_{11})(b-\bar{b})(c-\bar{c}) = \lambda_3$, $\lambda_3 \in K - \{0\}$.

On a posé (3.1.9. relation (14)) :

$A_{11} = a_{11} + b_{11}v$, a_{11} , $b_{11} \in K(\sqrt{a})$.

Cela résulte des lemmes 3.1.7, 3.1.8 , 3.1.10, car les systèmes (E''_3) et (E''_4) sont identiques.

3.1.12. <u>Proposition</u> : Les solutions du système (E") (3.1.5) sont :

$A_{11} = A$, $A_{12} = bA$,

$A_{21} = Ac$, $A_{22} = bAc$,

où le quaternion $A = m+nv$ $(m,n \in K(\sqrt{a}))$, et $b, c \in K(\sqrt{a}) - K$ (i.e, $b, c \in K(\sqrt{a})$ et $b,c \notin K$) vérifient les relations :

$(Nm)(b-\bar{b})(c-\bar{c}) = \lambda_3$, $NA = Nm - \beta Nn = 0$, $m \neq 0$, $n \neq 0$.

En effet, d'après 3.1.11, on est ramené à résoudre (E_4'').

Pour la symétrie des notations on pose : $A_{11} = m+nv$, m , $n \in K(\sqrt{\alpha})$.
D'après (14), cela revient à écrire : $a_{11} = m$ et $b_{11} = n$. On obtient :
$A_{12} = bA$, $A_{21} = Ac$, $A_{22} = bAc$.

a_{11} étant égal à m, la relation (20) est vérifiée si, et seulement si, :
$(Nm)(b-\bar{b})(c-\bar{c}) = \lambda_3$, $m \neq 0$, $b \neq \bar{b}$, $c \neq \bar{c}$. En effet, m , $b-\bar{b}$, $c-\bar{c}$ appartenant au corps $K(\sqrt{\alpha})$, on ne peut avoir $\lambda_3 = 0$ que si $m = 0$ ou $b-\bar{b} = 0$ ou $c-\bar{c} = 0$. Donc (20) équivaut à $(Nm)(b-\bar{b})(c-\bar{c}) = \lambda_3$, $m \neq 0$, $b,c \in K(\sqrt{\alpha}) - K$.

b et c étant réguliers, la relation (4") est vérifiée si, et seulement si, $NA = Nm - \beta Nn = 0$ et $A \neq 0$ (donc $m \neq 0$ et $n \neq 0$), ce qui achève la démonstration.

3.1.13. <u>Proposition</u> : Les solutions du système (E) (3.1.2) sont :

1° $A_{11} = aA$, $A_{12} = bA$,

$A_{21} = cA$, $A_{22} = dA$,

où A, quaternion régulier ($NA \neq 0$) et $a, b, c, d \in K$ vérifient les relations : $ad - bc \neq 0$, $ac(NA) = \lambda_1$, $bd(NA) = \lambda_2$, $(ad-bc)NA = \lambda_3$.

Lorsque λ_1, λ_2 , λ_3 décrivent respectivement K en entier pour les deux premiers et $K - \{0\}$ en entier pour le troisième, A décrit tout l'ensemble des quaternions réguliers et a, b, c, d prennent sur K toutes les valeurs compatibles avec la relation : $ad-bc \neq 0$.

2° $A_{11} = A$, $A_{12} = bA$,

$A_{21} = Ac$, $A_{22} = bAc$,

où le quaternion $A = m+nv (m, n \in K(\sqrt{\alpha}))$ et $b, c \in K(\sqrt{\alpha}) - K$ (i.e $b, c \in K(\sqrt{\alpha})$ et b , $c \notin K$) vérifient les relations :
$Nm(b-\bar{b})(c-\bar{c}) = \lambda_3$, $NA = Nm - \beta Nn = 0$, $m \neq 0$, $n \neq 0$.

Lorsque λ_1 , λ_2 , λ_3 décrivent respectivement K en entier pour les deux premiers et $K - \{0\}$ en entier pour le troisième, A décrit tout l'ensemble des quaternions irréguliers et b, c prennent des valeurs arbitraires dans $K(\sqrt{a}) - K$.

Dans le 1° on a : $Ac = cA$ puisque $c \in K$; dans le 2° on a toujours : $Ac \neq cA$.

Cela résulte des propositions 3.1.6 et 3.1.12.

En outre, lorsque λ_1, λ_2 décrivent K et lorsque λ_3 décrit $K - \{0\}$, dans le 1°, les relations $ac(NA) = \lambda_1$, $bd(NA) = \lambda_2$, $(ad-bc)(NA) = \lambda_3$, permettent de choisir arbitrairement NA dans $K - \{0\}$ et de choisir arbitrairement dans K : a , b , c , d liés par la relation $ad-bc \neq 0$; avec les mêmes hypothèses sur λ_1 , λ_2 , λ_3, dans le 2°, la relation $Nm(b-\bar{b})(c-\bar{c}) = \lambda_3$, permet de choisir arbitrairement m dans $K - \{0\}$ et arbitrairement b et c dans $K(\sqrt{a}) - K$.

Dans le 2°, la relation $Ac = cA$ s'écrit :

$(m+nv)c = c(m+nv)$ i.e. $mc+n\bar{c}v = cm+cnv$.

Elle équivaut à $n\bar{c} = cn$, i.e $n(c-\bar{c}) = 0$, en contradiction avec : $n, c-\bar{c} \in K(\sqrt{a}) - \{0\}$, ce qui achève la démonstration.

3.1.14. <u>Lemme</u> : Soit la matrice (A_{ij}) $1 \leq i,j \leq 2$ dont les éléments sont :

$$A_{11} = aA \quad , \qquad A_{12} = bA \quad ,$$
$$A_{21} = cA \quad , \qquad A_{22} = dA \quad ,$$

où A est un quaternion régulier ($NA \neq 0$) et a, b, c, $d \in K$ sont liées par $ad-bc \neq 0$. On a : $\nabla(A_{ij}) \neq 0$.

En effet (1.2.1) :

$$\begin{aligned}\nabla(A_{ij}) &= N(aA)N(dA) + N(cA)N(bA) - 2\,\{(aA)(\overline{cA})(dA)(\overline{bA})\} \\ &= (NA)^2a^2d^2 + (NA)^2b^2c^2 - 2\,abcd(NA)^2 \,, \\ &= (NA)^2(ad-bc)^2 \neq 0.\end{aligned}$$

3.1.15. <u>Lemme</u> : Soit la matrice (A_{ij}) $1 \leq i,j \leq 2$ dont les éléments sont :

$A_{11} = A$, $A_{12} = bA$,

$A_{21} = Ac$, $A_{22} = bAc$,

où A est un quaternion irrégulier ($NA = 0$, $A \neq 0$) et b , c des éléments de $K(\sqrt{\alpha}) - K$. On a $\nabla(A_{ij}) \neq 0$.

A étant irrégulier ($NA = 0$, $A \neq 0$), on a (1.2.1) :

$\nabla(A_{ij}) = -2\,\{A\bar{c}\,\bar{A}b\,Ac\,\bar{A}\bar{b}\}$. Le lemme est démontré si on prouve que $\{X\} \neq 0$ avec $X = A\bar{c}\,\bar{A}b\,Ac\,\bar{A}\bar{b}$.

On a posé (3.1.12 ; 3.1.13) : $A = m+nv$, $m, n \in K(\sqrt{\alpha})$.

Les relations $NA = 0$ et $A \neq 0$ équivalent à :

(26) $Nm - \beta Nn = 0$

(27) $m \neq 0$, $n \neq 0$

On a : $X = (m+nv)\,\bar{c}\,(\bar{m}-nv)\,b\,(m+nv)\,c\,(\bar{m}-nv)\,\bar{b}$,

$= (m+nv)(\bar{m}\bar{c}b-n\bar{c}\bar{b}v)(m+nv)(\bar{m}c\bar{b}-ncbv)$;

$= YZ$,

en posant : $Y = (m+nv)(\bar{m}\bar{c}b-n\bar{c}\bar{b}v)$,

$= (Nm)\bar{c}b - \beta(Nn)\,cb + (nmc\bar{b}-mn\bar{c}\bar{b})v$,

$= (Nm)\,b\,(\bar{c}-c) + nm\bar{b}(c-\bar{c})v$, d'après (26),

$= (m+nv)\bar{m}b(\bar{c}-c)$,

et

$Z = (m+nv)(\bar{m}c\bar{b}-ncbv)$,

$= (Nm)c\bar{b} - \beta(Nn)\bar{c}\bar{b} + (n\bar{m}cb - mncb)v$,

$= (Nm)\,\bar{b}\,(c-\bar{c}) + mnb(\bar{c}-c)v$, d'après (26) ,

$= (m+nv)\,\bar{m}\bar{b}\,(c-\bar{c})$.

Donc : $X = (m+nv)\,\bar{m}b\,(\bar{c}-c)(m+nv)\,\bar{m}\bar{b}\,(c-\bar{c})$,

$= (m+nv)(-\bar{m}(Nm)(Nb)(c-\bar{c})^2 + n(Nm)\,b^2\,(\bar{c}-c)^2v)$.

D'après (27), on a $N\,m \in K - \{0\}$ et d'après l'hypothèse $c \in K(\sqrt{a}) - K$, on peut poser (1.1.1) : $c = \mu + \mu' u$ avec μ , $\mu' \in K$, $\mu' \neq 0$, u étant l'un des éléments de base de A . On a : $(c-\bar{c})^2 = (2\mu' u)^2 = 4a\mu'^2 \in K - \{0\}$, donc :

$$(28) \qquad (Nm)(c-\bar{c})^2 \in K - \{0\} .$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} X &= (Nm)(c-\bar{c})^2(m+nv)(-\bar{m}(Nb) + nb^2v) , \\ &= (Nm)(c-\bar{c})^2(-(Nm)(Nb) + \beta(Nn)\,(\bar{b})^2 + (mnb^2 - mn(Nb))v) , \\ &= (Nm)(c-\bar{c})^2((Nm)\,\bar{b}\,(\bar{b}-b) + mnb(b-\bar{b})v), \text{ d'après (26).} \end{aligned}$$

Donc d'après (28) :

$$\begin{aligned} \{X\} &= (Nm)(c-\bar{c})^2 \quad \{(Nm)\bar{b}\,(\bar{b}-b) + mnb(b-\bar{b})v\} , \\ &= (Nm)(c-\bar{c})^2 \quad \{(Nm)\bar{b}(\bar{b}-b)\} , \\ &== (Nm)^2(c-\bar{c})^2\{\bar{b}(\bar{b}-b)\} ,. \end{aligned}$$

Comme d'après (28) : $(Nm)^2(c-\bar{c})^2 \in K - \{0\}$, pour démontrer que $\{X\} \neq 0$, il suffit de prouver que : $\{\bar{b}(\bar{b}-b)\} \neq 0$. Or $\{(\bar{b})^2 - Nb\} = \{(\bar{b})^2\} - Nb$ car $Nb \in K$, et d'après l'hypothèse $b \in K(\sqrt{a}) - K$ on peut poser (1.1.1) : $b = \lambda + \lambda' u$, $\lambda,\ \lambda' \in K$, $\lambda' \neq 0$. On a : $\bar{b} = \lambda - \lambda' u$, $Nb = \lambda^2 - a\lambda'^2$, $(\bar{b})^2 = \lambda'^2 + a\lambda'^2 - 2\lambda\lambda' u$, $\{(\bar{b})^2\} - Nb = 2a\lambda'^2 \neq 0$.

q.e.d.

3.1.16 : <u>Théorème</u> : Une matrice (A_{ij}) $1 \leqslant i,j \leqslant 2$, représente la composante à droite d'un élément S du sous-groupe G, constitué des homographies bilatères invariantes par l'automorphisme $\mathcal{L}$(1.6.2), si, et seulement si :

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix} ,$$

pour tout $A \in A$ tel que $NA \neq 0$ et pour tout a, b, c, $d \in K$ tels que $ad - bc \neq 0$,

$$\text{ou } (A_{ij}) = \begin{pmatrix} A & bA \\ Ac & bAc \end{pmatrix},$$

pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $NA = 0$, $A \neq 0$, et pour tout $b, c \in K(\sqrt{a}) - K$.

Dans le premier cas on a : $Ac = cA$ car $c \in K$, dans le deuxième on a toujours : $Ac \neq cA$.

$(\vec{A}_{ij})$ représente la matrice de la composante à gauche de S.

Conséquence de 3.1.2, 3.1.13, 3.1.14, 3.1.15.

3.1.17 : Corollaire : L'ensemble des éléments de G dont les composantes à à droites sont définies par les matrices :

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix}$$

$A \in \mathcal{A}$, $NA \neq 0$, $a, b, c, d \in K$, $ad - bc \neq 0$,

constitue un sous-groupe G' de G.

En effet, soient S et S' des éléments de G dont les composantes à droite sont définies respectivement par les matrices :

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix} \quad \text{et } (A'_{ij}) = \begin{pmatrix} a'A' & b'A' \\ c'A' & d'A' \end{pmatrix}$$

$A, A' \in \mathcal{A}$, $NA \neq 0$, $NA' \neq 0$, $a, b, c, d, a', b', c', d' \in K$, $ad-bc \neq 0$, $a'd' - b'c' \neq 0$.

D'une part, la composante à droite de SS' est définie par la matrice :

$$(A_{ij})(A'_{ij}) = \begin{pmatrix} (aa' + bc')AA' & (ab' + bd')AA' \\ (ca' + dc')AA' & (cb' + dd')AA' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1AA' & b_1AA' \\ c_1AA' & d_1AA' \end{pmatrix}$$

avec $AA' \in \mathcal{A}$ $N(AA') = NA.\ NA' \neq 0$, $a_1, b_1, c_1, d_1 \in K$,

$a_1d_1 - b_1c_1 = (ad - bc)(a'd' - b'c') \neq 0$.

D'autre part, la composante à droite de S^{-1} est définie par la matrice $(A_{ij})^{-1}$ i.e :

$$(B_{ij}) = \begin{pmatrix} d(ad - bc)^{-1}A^{-1} & -b(ad - bc)^{-1}A^{-1} \\ \\ -c(ad - bc)^{-1}A^{-1} & a(ad - bc)^{-1}A^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2A^{-1} & b_2A^{-1} \\ \\ c_2A^{-1} & d_2A^{-1} \end{pmatrix}$$

car le produit $(A_{ij})(B_{ij})$ est la matrice unité. On a :

$$A^{-1} \in A \ , \ N(A^{-1}) = (NA)^{-1} \neq 0 \ , \quad a_2, b_2, c_2, d_2 \in K$$

$$a_2d_2 - b_2c_2 = (ad - bc)^{-1} \neq 0.$$

q.e.d.

3.2. Structure de G.

3.2.1. Théorème : Une $\tilde{K}$-matrice représente un élément s du sous-groupe G constitué des $\tilde{K}$-homographies invariantes par l'automorphisme Λ (1.6.2), si, et seulement si ;

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} am & \beta an & bm & \beta bn \\ a\bar{n} & a\bar{m} & b\bar{n} & b\bar{m} \\ \\ cm & \beta cn & dm & \beta dn \\ c\bar{n} & c\bar{m} & d\bar{n} & d\bar{m} \end{pmatrix},$$

pour tout $m, n \in K(\sqrt{\alpha})$ tel que $Nm - \beta Nn \neq 0$ et pour tout a, b, c, a, b, c, $d \subset K$ tels que $ad - bc \neq 0$.

$$\text{ou } (a_{ij}) = \begin{pmatrix} m & \beta n & bm & \beta bn \\ \bar{n} & \bar{m} & \bar{b}\bar{n} & \bar{b}\bar{m} \\ \\ cm & \beta\bar{c}n & bmc & \beta bn\bar{c} \\ c\bar{n} & \bar{c}\bar{m} & \bar{b}\bar{n}c & \bar{b}\bar{m}\bar{c} \end{pmatrix},$$

pour tout $m, n \in K(\sqrt{\alpha}) - \{0\}$ tels que $Nm - \beta Nn = 0$ et pour tout $b, c \in K(\sqrt{\alpha}) - K$.

On a posé (3.1.12 , 3.1.13, 3.1.15) : $\Lambda = m + nv$, $m, n \in K(\sqrt{\alpha})$, ce qui entraîne $N\Lambda = Nm - \beta Nn$.

En utilisant la matrice (A_{ij}) $1 \leq i,j \leq 2$ de la composante à droite de l'élément générique S de G , dont les éléments sont d'après 3.1.16 :

$$A_{11} = a\Lambda = am + anv \quad , \qquad A_{12} = b\Lambda = bm + bnv \; ,$$

$$A_{21} = c\Lambda = cm + cnv \quad , \qquad A_{22} = d\Lambda = dm + dnv \; ,$$

ou :

$$A_{11} = \Lambda = m + nv \; , \qquad A_{12} = b\Lambda = bm + bnv \; ,$$

$$A_{21} = \Lambda c = cm + \bar{c}nv \; , \qquad A_{22} = b\Lambda c = bm + bn\bar{c}v \; ,$$

et au moyen des relations qui définissent F^{-1} (1.6.1 et 1.3.5) :

$$A_{11} = a_{11} + \beta^{-1}a_{12}v \quad , A_{12} = a_{13} + \beta^{-1}a_{14}v \; ,$$

$$A_{21} = a_{31} + \beta^{-1}a_{32}v \quad , A_{22} = a_{33} + \beta^{-1}a_{34}v \; ,$$

on fait correspondre, d'après 2.3.4, la $\tilde{K}$-matrice (a_{ij}) de l'élément générique $s = F^{-1}(S)$ de G.

Lorsque $N\Lambda = Nm = \beta Nn = 0$, la condition $\Lambda \neq 0$ se traduit par $m \neq 0$ et $n \neq 0$. Le théorème est démontré.

3.2.2. <u>Corollaire</u> : L'ensemble G' des éléments de G définis par les $\tilde{K}$-matrices :

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} am & \beta an & bm & \beta bn \\ a\bar{n} & a\bar{m} & b\bar{n} & b\bar{m} \\ & & & \\ cm & \beta cn & dm & \beta dn \\ c\bar{n} & c\bar{m} & d\bar{n} & d\bar{m} \end{pmatrix}$$

$m, n \in K(\sqrt{\alpha})$, $Nm - \beta Nn \neq 0$, $a, b, c, d \in K$, $ad - bc \neq 0$, constitue un sous-groupe de G, isomorphe à G'.

En effet, d'après la démonstration du théorème 3.2.1, l'isomorphisme F^{-1} transforme G' en G' et le résultat se déduit de 3.1.17.

CHAPITRE IV : Classes d'homographies bilatères.

4.1. Classes de h.

4.1.1. Définition : On appelle classes à droite (resp. à gauche) du groupe $\tilde{K}$-homographique h, les classes à droite (resp. à gauche) de G dans h (2.3.4).

4.1.2. Proposition : L'application Λ_d (resp. Λ_g) qui, à la classe à droite (resp. à gauche) de h contenant la $\tilde{K}$-homographie s, fait correspondre la classe à droite (resp. à gauche) de h contenant la $\tilde{K}$-homographie $\Lambda(s)$ (1.6.2), est une permutation involutive dans l'ensemble des classes à droite (resp. à gauche) de h.

En effet, si s_1 est un élément générique du sous-groupe G de h, et s un élément quelconque de h, la classe à droite (resp. à gauche) de s est l'ensemble des éléments $s_1\ s$ (resp. $s\ s_1$). Or

Or $\Lambda(s_1 s) = \Lambda(s_1)\ \Lambda(s) = s_1\Lambda(s)$. Donc Λ transforme la classe à droite de s en la classe à droite de $\Lambda(s)$, (même résultat à gauche). On peut donc définir l'application Λ_d (resp. Λ_g) ; Λ étant involutive, il en résulte la même propriété pour Λ_d (resp. Λ_g), d'où la bijectivité de Λ_d (resp. Λ_g) et le lemme.

4.1.3. Définition : On appelle classe double à droite (resp. à gauche) de h, tout élément double de Λ_d (resp. Λ_g), i.e. toute classe à droite (resp. à gauche) de h invariante par Λ.

4.2. Classes d'homographies bilatères.

4.2.1. Définition : On appelle classes à droite (resp. à gauche) de H, ou classes à droite (resp. à gauche) d'homographies bilatères, les classes à droite (resp. à gauche) de G dans H (2.3.4).

4.2.2. Proposition : L'application L_d (resp. L_g) qui, à la classe à droite (resp. à gauche) de H contenant l'homographie bilatère S, fait correspondre la classe à droite (resp. à gauche) de H, contenant l'homographie bilatères $L(S)$ (1.6.2), est une permutation involutive dans l'ensemble des classes à droite (resp. à gauche) de H.

Même démonstration qu'à la proposition 4.1.2.

4.2.3. Définition : On appelle classe double à droite (resp. à gauche) de H tout élément double de L_d(resp.L_g), i.e toute classe bilatère à droite (resp. à gauche) invariante par L.

4.2.4. Proposition : L'application F_d (resp. F_d^*) qui, à la classe à droite de h contenant la $\tilde{K}$-homographie s, fait correspondre la classe à droite de H contenant l'homographie bilatère $F(s)$ (resp. $F^*(s)$), est une bijection de l'ensemble des classes à droite de h sur l'ensemble des classes à droite de H.

En effet, soit s_1 un élément générique de G et s un élément générique de h. F étant un isomorphisme de h sur H (1.6.2), qui transforme G en G (2.3.4) on a : $F(s_1\ s) = F(s_1)\ \ F(s)$, où $F(s_1)$ est un élément générique de G ; Donc F transforme la classe à droite de h contenant s, en la classe à droite de H contenant $F(s)$, ce qui permet de définir F_d.$F(s)$ est aussi un élément générique de H, donc l'application F_d est surjective. Elle est injective, donc bijective, car si les classes à droite de H contenant respectivement $F(s)$ et $F(s')$ sont identiques, il en est de même des classes à droite de h contenant respectivement s et s'. En effet affirmer l'identité des classes à droite de H contenant respectivement $F(s)$ et $F(s')$, c'est affirmer l'existence de $S_1 \in G$ tel que $F(s') = S_1\ F(s)$. Comme il existe $s_1 \in$ G tel que $S_1 = F(s_1)$, on a $F(s') = F(s_1)\ F(s)$, i.e $F(s') = F(s_1\ s)$, donc $s' = s_1\ s$: les classes à droite de h contenant s et s' sont identiques.

Le raisonnement est le même pour F_d^*. q.e.d.

De même :

4.2.5. <u>Proposition</u> : L'application F_g (resp. F_g^*) qui, à la classe à gauche de h contenant la $\tilde{K}$-homographie s, fait correspondre la classe à gauche de H contenant l'homographie bilatère F (s) (resp. F^*(s)), est une bijection de l'ensemble des classes à gauche de h sur l'ensemble des classes à gauche de H.

4.2.6. <u>Proposition</u> : Si deux classes à droite de h s'échangent par Λ_d, leurs transformées par F_d (resp. F_d^*) s'échangent par L_d. De même, si deux classes à gauche de h s'échangent par Λ_g, leurs transformées par F_g (resp. F_g^*) s'échangent par L_g.

Cela résulte de 2.3.2, relations (2) et (3).

4.2.7. <u>Proposition</u> : Par restriction, F_d (resp. F_d^*) est une bijection de l'ensemble des classes doubles à droite de h sur l'ensemble des classes doubles à droite de H. F_d et F_d^* s'identifient sur l'ensemble des classes doubles à droite de h.

De même par restriction, F_g (resp. F_g^*) est une bijection de l'ensemble des classes doubles à gauche de h sur l'ensemble des classes doubles à gauche de H. F_g et F_g^* s'identifient sur l'ensemble des classes doubles à gauche de h.

En effet, d'après 4.2.6, F_d transforme toute classe double à droite de h en une classe double à droite de H. Réciproquement toute classe à droite de H est l'image par F_d d'une classe à droite de h et d'une seule, d'après 4.2.4. Cette classe à droite de h et sa transformée par Λ_d ont la même image par F_d, d'après 4.2.6, donc elles coïncident, et toute classe double à droite de H est l'image par F_d d'une classe double à droite de h et d'une seule. Par restriction, F_d est donc une bijection de l'ensemble des classes doubles à droite de h sur l'ensemble des classes doubles à droite de H. Le même raisonnement est valable pour F_g, F_d^*, F_g^*.

Si la $\tilde{K}$-homographie s appartient à une classe double à droite de h, $s' = \Lambda(s)$ appartient à cette même classe, d'après 4.1.3. La relation (1) de 2.3.2 traduit l'identité des images de cette classe par F_d et F_d^* respectivement. Donc F_d et F_d^* s'identifient sur l'ensemble des classes doubles à droite de h. Même raisonnement pour F_g et F_g^*. q.e.d.

4.3. Classes doubles :

Démontrons, en particulier, l'existence de classes doubles à droite (resp. à gauche) de H, distinctes de G. D'après 4.2.7, les mêmes résultats sont vrais pour h et G.

4.3.1. Proposition : La classe à droite de H, contenant l'homographie S, dont la composante à droite est définie par la matrice $(A_{ij})1\leq i,j\leq 2$, $\nabla(A_{ij}) \neq 0$, est double dans l'un ou l'autre des deux seuls cas suivants :

1°) il existe $A \in A'$ et a, b, c, $d \in K$ tels que :

(1') $\bar{A}_{11}(cAA_{11} + dAA_{21}) - \bar{A}_{21}(aAA_{11} + bAA_{21}) = 0$,

(2') $\bar{A}_{12}(cAA_{12} + dAA_{22}) - \bar{A}_{22}(aAA_{12} + bAA_{22}) = 0$,

(3') $\bar{A}_{11}(cAA_{12} + dAA_{22}) - \bar{A}_{21}(aAA_{12} + bAA_{22}) = \mu$, $\mu \in K - \{0\}$,

(4') $\bar{A}_{22}(aAA_{11} + bAA_{21}) - \bar{A}_{12}(cAA_{11} + dAA_{21}) = \mu$, $\mu \in K - \{0\}$,

(5') $NA \neq 0$, $ad - bc \neq 0$.

2°) il existe $A \in A$ et b, $c \in K(\sqrt{\alpha}) - K$ tels que :

(1") $\bar{A}_{11}(AcA_{11} + bAcA_{21}) - \bar{A}_{21}(AA_{11} + bAA_{21}) = 0$,

(2") $\bar{A}_{12}(AcA_{12} + bAcA_{22}) - \bar{A}_{22}(AA_{12} + bAA_{22}) = 0$, (3") $\bar{A}_{11}(AcA_{12} + bAcA_{22}) - \bar{A}_{21}(AA_{12} + bAA_{22}) = \mu,\ \mu \in K - \{0\}$,

(4") $\bar{A}_{22}(AA_{11} + bAA_{21}) - \bar{A}_{12}(AcA_{11} + bAcA_{21}) = \mu\ ,\ \mu \in K - \{0\}$,

(5") $NA = 0\ ,\ A \neq 0$.

La classe à droite de H contenant S est double si, et seulement si, les deux classes à droite contenant respectivement S et $L(S)$ sont identiques (4.2.3), i.e s'il existe $S_1 \in G$ tel que $L(S) = S_1\ S$, donc si la composante à droite de $L(S)$ est $S_1 S$ en posant $S = (S^*, S)$, $S_1 = (S_1^*, S_1)$. D'après 3.1.16, $S_1\ S$ est définie par la matrice :

$$(B_{ij}) = \begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aAA_{11} + bAA_{21} & aAA_{12} + bAA_{22} \\ cAA_{11} + dAA_{21} & cAA_{12} + dAA_{22} \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathcal{A}$, $NA \neq 0$, $a, b, c, d \in K$, $ad - bc \neq 0$, ou :

$$(B_{ij}) = \begin{pmatrix} A & bA \\ Ac & bAc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA_{11} + bAA_{21} & AA_{12} + bAA_{22} \\ AcA_{11} + bAcA_{21} & AcA_{12} + bAcA_{22} \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathcal{A}$, $NA = 0$, $A \neq 0$, $b, c \in K(\sqrt{a}) - K$.

Or (2.3.1), la composante à gauche de $L(S\ )$ est définie par la matrice $(B_{ij}^*) = (\bar{A}_{ij})$. La condition s'écrit donc (1.2.3) :

$$B_{11}^*B_{21} - B_{21}^*B_{11} = B_{12}^*B_{22} - B_{22}^*B_{12} = 0\ ,$$

$$B_{11}^*B_{22} - B_{21}^*B_{12} = B_{22}^*B_{11} - B_{12}^*B_{21} = \mu,\ \mu \in K - \{0\}\ ,$$

$$\nabla(B_{ij}) \neq 0.$$

En remplaçant B_{ij} et B_{ij}^* par les valeurs trouvées, on obtient les relations indiquées. En outre, d'après 3.1.14, on a :

$$\nabla \begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix} \neq 0 \text{ si } A \in \mathcal{A},\ NA \neq 0\ ,\ a, b, c, d \in K\ ,$$
$$ad - bc \neq 0$$

et d'après 3;1.15 :

$$\nabla\begin{pmatrix} A & bA \\ Ac & bAc \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{si} \quad A \in \mathcal{A},\ NA = 0,\ A \neq 0\ ,\quad b,\ c \in K(\sqrt{\alpha}) - K.$$

$$\text{Donc :}\quad \nabla(B_{ij}) \neq 0 \Longleftrightarrow \nabla\begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix} \nabla(A_{ij}) \neq 0 \quad \text{ou}$$

$$\nabla\begin{pmatrix} A & bA \\ Ac & bAc \end{pmatrix} \nabla(A_{ij}) \neq 0\ ;$$

$$\Longleftrightarrow \nabla(A_{ij}) \neq 0.$$

q.e.d.

4.3.2. <u>Proposition</u> : La classe à gauche de $\mathcal{H}$, contenant l'homographie S dont la composante à droite est définie par la matrice $(A_{ij})1\leqslant i,j\leqslant 2$, $\nabla(A_{ij}) \neq 0$, est double dans l'un ou l'autre des deux seuls cas suivants :

1°) il existe $A \in \mathcal{A}$ et a, b, c, $d \in K$

tels que :

(6') $\bar{A}_{11}(aA_{21}A + cA_{22}A) - \bar{A}_{21}(aA_{11}A + cA_{12}A) = 0,$

(7') $\bar{A}_{12}(bA_{21}A + dA_{22}A) - \bar{A}_{22}(bA_{11}A + dA_{12}A) = 0\ ,$

(8') $\bar{A}_{11}(bA_{21}A + dA_{22}A) - \bar{A}_{21}(bA_{11}A + dA_{12}A) = \mu,\ \mu \in K - \{0\}\ ,$

(9') $\bar{A}_{22}(aA_{11}A + cA_{12}A) - \bar{A}_{12}(aA_{21}A + cA_{22}A) = \mu,\ \mu \in K - \{0\}\ ,$

(5') $NA \neq 0,\quad ad - bc \neq 0$;

2°) Il existe $A \in \mathcal{A}$ et b, $c \in K(\sqrt{\alpha}) - K$ tels que :

(6") $\bar{A}_{11}(A_{21}A + A_{22}Ac) - \bar{A}_{21}(A_{11}A + A_{12}Ac) = 0,$

(7") $\bar{A}_{12}(A_{21}bA + A_{22}bAc) - \bar{A}_{22}(A_{11}bA + A_{12}bAc) = 0\ ,$

(8") $\bar{A}_{11}(A_{21}bA + A_{22}bAc) - \bar{A}_{21}(A_{11}bA + A_{12}bAc) = \mu, \mu \in K - \{0\}\ ,$

(9") $\bar{A}_{22}(A_{11}A + A_{12}Ac) - \bar{A}_{12}(A_{21}A + A_{22}Ac) = \mu,\ \mu \in K - \{0\}\ ,$

(5") $NA = 0\ ,\quad A \neq 0$.

Même démonstration qu'à la proposition 4.3.1 avec :

$$(B_{ij}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA_{11}A + cA_{12}A & bA_{11}A + dA_{12}A \\ aA_{21}A + cA_{22}A & bA_{21}A + dA_{22}A \end{pmatrix}$$

si $A \in A$, $NA \neq 0$, $a, b, c, d \in K$, $ad - bc \neq 0$,

$$\text{ou } (B_{ij}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & bAA \\ Ac & bAc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}A + A_{12}Ac & A_{11}bA + A_{12}bAc \\ A_{21}A + A_{22}A & A_{21}bA + A_{22}bAc \end{pmatrix}$$

si $A \in A$, $NA = 0$, $A \neq 0$, $b, c \in K(\sqrt{a}) - K$.

4.3.3. <u>Proposition</u> : Il existe des classes doubles à droite (resp. à gauche de H distinctes de G .

La matrice $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, où u désigne l'un des éléments de base de $A(1.1.1)$, est telle que $\nabla(A_{ij}) = -\alpha \neq 0$, donc elle définit la composante à droite d'une homographie bilatère S .

D'après le théorème 3.1.16 on a : $S \notin G$. Les conditions (1'), (2'), (3'), (4'), (5') et (5'), (6'), (7'), (8'), (9') sont vérifiées avec $A = u$, $a = 1$, $b = c = 0$, $d = -1$.

q.e.d.

4.3.4. Toute classe à droite (resp. à gauche) de H n'est pas double.

En effet la matrice $(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B' & 0 \end{pmatrix}$ avec $B = (1+v)(1-u) = 1 - u + v + uv$ et $B' = 1 - u$, définit la composante à droite d'une homographie S , car on a : $NB = 1 - \alpha - \beta + \alpha\beta = (1-\beta)(1-\alpha) \neq 0$ et $NB' = 1 - \alpha \neq 0$ donc $\nabla(A_{ij}) = NB.\, NB' \neq 0$.

Pour montrer que S n'est contenue ni dans une classe double à droite de H, ni dans une classe double à gauche de H, il suffit de démontrer qu'en prenant $A_{11} = 0$, $A_{12} = B$, $A_{21} = B'$, $A_{22} = 0$, les relations (1'), (2'), (3'), (4'), (5') sont incompatibles, de même (1"), (2"), (3"), (4"), (5"), (prop. 4.3.1) ainsi que (5'), (6'), (7'), (8'), (9'), et (5"), (6"), (7"), (8"), (9") (prop. 4.3.2).

Les relations :

$(3'') \quad -\bar{B}'AB = \mu \quad , \qquad \mu \in K - \{0\}$,

$(5'') \quad NA = 0 \text{ , } A \neq 0$,

sont contradictoires, car le premier membre de (3") est un quaternion irrégulier et le deuxième membre est régulier.

D'autre part :

$(3') \quad -\bar{B}'aAB = \mu \quad , \; \mu \in K - \{0\} \text{ , } a \in K$,

$(4') \quad -\bar{B}dAB' = \mu \quad , \; \mu \in K - \{0\} \text{ , } d \in K$,

entraînent respectivement :

$a \in K - \{0\}$ et $A = -ua^{-1}(NB')^{-1}(NB)^{-1}B'\hat{B} = -\mu a^{-1}(NB')^{-1}(NB)^{-1} \, (1-\alpha)(1-v)$,

$d \in K - \{0\}$ et $A = -\mu d^{-1}(NB)^{-1}(NB')^{-1}B\bar{B}' = -\mu d^{-1}(NB)^{-1}(NB')^{-1} \, (1-\alpha)(1+v)$,

donc $a^{-1} \, (1-v) = d^{-1} \, (1+v)$. On obtient : $(1-v)^2 = ad^{-} \; (1-\beta) \in K$,

i.e : $1-2v + \beta \in K \Longleftrightarrow v \in K$. (3') et (4') sont contradictoires.

On démontre de même que (8") et (5") sont contradictoires ainsi que (8') et (9'). q.e.d.

CHAPITRE V : L'espace des antipolarités.

5.1. Rappel de résultats connus (1)

5.1.1. Notations : Soit x un point de l'espace projectif $P_3(K(\sqrt{\alpha}))$ (cf. 1.4.2). Soit (x_1, x_2, x_3, x_4) un système de coordonnées homogènes de ce point, par rapport à une base déterminée de l'espace vectoriel $(K(\sqrt{\alpha}))^4$. On désigne par $M(x)$ (2) la matrice à une colonne, formée de ces coordonnées homogènes. La matrice $M(x)$, comme le système de coordonnées homogènes de x, est définie à un facteur non nul près de $K(\sqrt{\alpha})$.

Un plan W de $P_3(K(\sqrt{\alpha}))$ est défini par une équation linéaire homogène $\sum_1^4 W_i x_i = 0$ entre les coordonnées homogènes d'un point $P_3(K(\sqrt{\alpha}))$. $M(W)$ désigne la matrice à une colonne, définie à un facteur non nul près de $K(\sqrt{\alpha})$, formée des coordonnées homogènes W_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ de W.

Soit A une matrice à coefficients dans le corps $K(\sqrt{\alpha})$. On désigne par $\bar{A}$ la matrice dont les coefficients sont les conjugués (cf. 1.1.2) de ceux de A ; en particulier $\bar{M}(x)$ (resp. $\bar{M}(W)$) désigne la matrice à une colonne formée des conjugués des coordonnées homogènes du point x (resp. du plan W) de $P_3(K(\sqrt{\alpha}))$.

5.1.2. Définitions :

1°) Soit A une matrice carrée d'ordre 4, à coefficients dans $K(\sqrt{\alpha})$. Soient x, x' (resp. W, W') des points (resp. des plans) de $P_3(K(\sqrt{\alpha}))$. La relation $M(x') = A\,M(x)$ (resp. $M(x') = A.\,\bar{M}(x)$, $M(W') = A.\bar{M}(x)$, $M(W') = AM(x)$) définit une homographie (resp. une antihomographie, une corrélation, une anticorrélation). La matrice A est toujours définie à un facteur non nul près de $K(\sqrt{\alpha})$, puisqu'il en est ainsi de $M(x)$ et $M(x')$, $M(W)$, $M(W')$.

---

(1) Bibliographie 2 : 2ème partie, ch. 1

(2) Bourbaki , Alg.. ch. 2

2°) Les homographies et les corrélations (resp. les antihomographies et les anticorrélations) constituent les projectivités (resp. les antiprojectivités). Une projectivité ou une antiprojectivité quelconque est dite non dégénérée, si la matrice A correspondante est inversible. Il en sera toujours ainsi ultérieurement.

3°) Une homographie (resp. une corrélation) réciproque s'appelle une involution (resp. une polarité). On définit de même une antiinvolution et une antipolarité.

5.1.3. Toute projectivité ou antiprojectivité de $P_3(K(\sqrt{\alpha}))$ peut être représentée dualistiquement par deux matrices carrées inversibles d'ordre quatre, à coefficients dans $K(\sqrt{\alpha})$, A et ${}^tA^{-1}$. Ainsi, à toute homographie de $P_3(K(\sqrt{\alpha}))$, il correspond deux matrices carrées inversibles d'ordre quatre, à coefficients dans $K(\sqrt{\alpha})$, A et ${}^tA^{-1}$, telles que l'une d'elles représente l'homographie comme bijection dans l'ensemble des points de $P_3(K(\sqrt{\alpha}))$, selon la relation $M(x') = A.M(x)$, et l'autre représente la même homographie comme bijection dans l'ensemble des plans de $P_3(K(\sqrt{\alpha}))$, selon la relation $M(W') = {}^tA^{-1}.M(W)$.

5.1.4. Une antipolarité de $P_3(K(\sqrt{\alpha}))$ peut toujours être représentée par une matrice hermitienne, inversible, définie à un facteur près de $K - \{0\}$.

5.2. Définition d'un écart.

5.2.1. Définition : Soient p_1 et p_2 deux antipolarités dont les matrices respectives P_1 et P_2, inversibles, hermitiennes, sont définies à un facteur près de $K - \{0\}$ (5.1.4).

D'après 5.1.3, on a les relations $M(W') = P_1.\bar{M}(x)$ et $M(x'')\ {}^tP_2^{-1}.\bar{M}(W')$.

Donc le produit de p_2p_1 est l'homographie s définie par la relation $M(x'') = {}^tP_2^{-1}.\bar{P}_1.M(x)$, i.e par la matrice $S = {}^tP_2^{-1}.\bar{P}_1$ déterminée à un facteur près de $K - \{0\}$. Les valeurs propres m_1, m_2, m_3, m_4 de S, considérée comme matrice à coefficients dans le corps K', clôture algèbrique de $K(\sqrt{\alpha})$, sont donc les éléments de K' déterminés eux aussi à un facteur près de $K - \{0\}$. On désigne par $\ell_j \in K'$ $(1 \leqslant j \leqslant 4)$ les racines quatrièmes de $\left(\prod_{i=1}^{4} m_i\right)^{-1}$ (m_1, m_2, m_3, m_4 étant un système particulier de valeurs propres). L'écart de p_1 à p_2 est égal à :

$$\Delta(p_1, p_2) = \prod_{j=1}^{4} \left(\sum_{i=1}^{4} (\ell_j m_i - (\ell_j m_i)^{-1})^2\right) \in K'.$$

Cet écart est indépendant du système de Valeurs propres considéré, car si on remplace m_i par λm_i $(\lambda \in K - \{0\}$. $1 \leqslant i \leqslant 4)$, ℓ_j est remplacé par $\lambda^{-1}\ell_j$ $(1 \leqslant j \leqslant 4)$ donc $\ell_j m_i$ reste invariant, de même l'écart.

5.2.2. <u>Lemme</u> : L'écart de p_1 à p_2 est indépendant de la base de $(K(\sqrt{\alpha}))^4$ considérée.

Si Q désigne la matrice de passage de la base e à la base e', la matrice S de l'homographie s : $p_2\, p_1$ devient $Q^{-1}SQ$, elle est semblable à S ; elle admet donc les mêmes valeurs propres : l'écart reste inchangé.

5.2.3. <u>Lemme</u> : L'écart est défini pour tout couple d'antipolarités p_1 et p_2 .

En effet, si P_1 et P_2 désignent les matrices de p_1 et p_2 respectivement, l'homographie $s = p_2\, p_1$ est définie par la matrice $S = {}^t P_2^{-1}\, \bar{P}_1$(5.2.1). P_1 et P_2 étant inversibles (5.1.2, 2°), on a $\det(S) \neq 0$. Dét(S) étant le terme constant du polynôme caractéristique de S, il en résulte que $m_i \neq 0$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$. Donc, $\left(\prod_{i=1}^{4} m_i\right)^{-1}$, ℓ_j , et $\Delta(p_1,p_2)$ existent.

5.2.4. <u>Proposition</u> : On a $\Delta(p_1, p_2) = \Delta(p_2, p_1)$ quelles que soient les antipolarités p_1 et p_2 .

En effet, les antipolarités p_1 et p_2 étant des applications involutives (5.1.2, 3°), les homographies s : $p_2\, p_1$ et $s' = p_1 p_2$ sont inverses ; il en est de même de leurs matrices ainsi que des valeurs propres respectives de celles-ci.

Par suite, on passe de $\Delta(p_1,p_2)$ à $\Delta(p_2,p_1)$ en changeant m_i en $(m_i)^{-1}$, donc ℓ_j en $(\ell_j)^{-1}$ et $m_{i\ell j}$ en $(m_{i\ell j})^{-1}$ $(1\leq i,j\leq 4)$, ce qui laisse l'écart inchangé.

5.2.5. <u>Proposition</u> : $p_1 = p_2 \Longrightarrow \Delta(p_1, p_2) = 0$ quelles que soient les anti polarités p_1 et p_2.

En effet, p_1 et p_2 étant des applications involutives, si $p_1 = p_2$, l'homographie $s = p_2p_1$ est l'identité.

Donc $m_i = 1$ $(1\leq i\leq 4)$, $\left(\prod_{i=1}^{4} m_i\right)^{-1} = 1$ et l'un des éléments ℓ_j, soit $\ell_1$est égal à 1. Il en résulte que $\sum_{i=1}^{4} (\ell_1 m_i - (\ell_1 m_i)^{-1}) = 0$. La proposition est démontrée.

5.2.6. Il existe des couples d'antipolarités distinctes dont l'écart est nul.

En effet, soient p_1 et p'_1 les antipolarités définies par les matrices diagonales d'éléments respectifs λ_i et λ'_i $(1\leq i\leq 4)$ tels que

$$\lambda_i\ ,\ \lambda'_i \in K - \{0\}\ ,\ \lambda_1 = \lambda'_1 \quad \lambda_2 = \lambda'_2\ ,\ \lambda_3 = -\lambda_3, \lambda_4 = -\lambda_4.$$

L'homographie $p_1\, p'_1$ est définie par la matrice (cf. 5.2.1) :

$$ {}^{t}P_1'^{-1}.\ \bar{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont $m_1 = m_2 = 1$, $m_3 = m_4 = -1$. On a $\left(\prod_{i=1}^{4} m_i\right)^{-1} = 1$ et le raisonnement se poursuit comme dans la proposition précédente.

5.2.7. A toute antipolarité p_1, on peut faire correspondre une antipolarité p'_1, distincte de p_1, telle que $\Delta(p_1,p'_1) = 0$. En effet, à $p_1$on peut faire correspondre une forme hermitienne (5.1.4). En prenant une base de $(K(\sqrt{c}))^4$ orthogonale par rapport à cette forme, la matrice de p_1 devient diagonale et il suffit d'appliquer 5.2.6.

5.2.8. Lorsque K est ordonné maximal, en considérant des antipolarités particulières, on peut définir un écart tel que $\Delta(p_1,p_2) = 0 \Longleftrightarrow p_1 = p_2$ quels que soient p_1 et p_2 . Ces antipolarités particulières, dites elliptiques, sont caractérisées par le fait que la forme hermitienne correspondante est définie. On démontre que les Valeurs propres λ_i de l'homographie $s = p_2 p_1$ appartiennent au corps de base K et peuvent être choisies, d'une manière unique, positives et de produit égal à 1. On pose alors : $\Delta(p_1, p_2) = \sum_{i=1}^{4} (\lambda_i - (\lambda_i)^{-1})^2$.

5.3. E-isométries.

5.3.1. Définition : L'espace E est l'ensemble des antipolarités muni de l'écart (5.2.1).

5.3.2. Définition : On appelle E-isométrie, toute application de E dans E qui conserve l'écart.

5.3.3. Proposition : Soit q une projectivité (5.1.2. 2°) arbitraire, mais fixe, de $P_3(K(\sqrt{\alpha}))$. L'application de E dans E : $p \longrightarrow qpq^{-1}$ est une E-isométrie.

Que q soit une homographie ou une corrélation, qpq^{-1} est une application de $P_3(K(\sqrt{\alpha}))$ dans lui-même, définie par une relation de la forme $M(W') = A.\bar{M}(x)$. Le carré de p étant l'identité, il en est de même de celui de qpq^{-1} . Donc qpq^{-1} est une antipolarité, et $p \longrightarrow qpq^{-1}$ est une application de E dans E. Il faut démontrer en outre la relation :

(1) $\Delta(p,p') = \Delta(qpq^{-1}, qp'q^{-1})$ quels que soient $p, p' \in E$. Dans ce but, on compare les Valeurs propres de la matrice S_1 de l'homographie $s_1 = p'p$ et celles de la matrice S_2 de l'homographie $s_2 = qp'q^{-1}. qpq^{-1} = qs\, q^{-1}$.

Si q est une homographie de matrice Q on a $S_2 = QS_1Q^{-1}$. Donc, S_2 étant semblable à S_1 , admet les mêmes Valeurs propres. La relation (1) est démontrée dans ce cas.

Si q est une corrélation de matrice Q, cette corrélation est définie par la relation $M(W_1') = Q.\ M(x_1)$. Donc Q^{-1} est la corrélation définie par la relation $M(x_1) = Q^{-1}.\ M(W_1')$ i.e., d'après 5.1.3, par les matrices corrélatives Q^{-1} et ${}^t(Q^{-1})^{-1} = {}^tQ$. Donc, au point x, q^{-1} fait correspondre le plan W' tel que $M(W') = {}^tQ.M(x)$. Au plan W', l'homographie s_1 fait correspondre le plan W" tel que $M(W'') = {}^tS_1^{-1}\ .\ M(W')$. Au plan W", q fait correspondre le point x''' tel que $M(x''') = {}^tQ^{-1}.\ M(W'')$. On a : $M(x''') = {}^tQ^{-1}.{}^tS_1^{-1}.{}^tQ.M(x)$. Donc $S_2 = {}^tQ^{-1}.{}^tS_1^{-1}.{}^tQ$. Les matrices S_2 et ${}^tS_1^{-1}$ étant semblables, admettent les mêmes valeurs propres. Or la matrice ${}^tS_1^{-1}$ a les mêmes valeurs propres que S_1^{-1} , donc les inverses de celles de S_1. La relation (1) est encore vraie (même raisonnement qu'à 5.2.4).

5.4. <u>L'espace E' des antipolarités permutables à l'antiinvolution r.</u>

5.4.1. <u>Proposition</u> : Les $\tilde{K}$-homographies sont permutables à l'antiinvolution r définie par la matrice :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \beta^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Au point x, la $\tilde{K}$-homographie s, définie par la $\tilde{K}$-matrice S, fait correspondre le point x' tel que $M(x') = S.M(x)$.

Au point x', l'antiinvolution r, fait correspondre le point x" tel que $M(x'') = R.\bar{M}(x')$. Il en résulte que $M(x'') = R.\ \bar{S}\ \bar{M}(x)$, donc r s est l'antihomographie de matrice $R\bar{S}$. De même, sr est l'antihomographie de matrice SR.

On a :

$$R\bar{S} = SR = \begin{pmatrix} \beta^{-1}a_{12} & a_{11} & \beta^{-1}a_{14} & a_{13} \\ \beta^{-1}\bar{a}_{11} & \beta^{-1}\bar{a}_{12} & \beta^{-1}\bar{a}_{13} & \beta^{-1}\bar{a}_{14} \\ \beta^{-1}a_{32} & a_{31} & \beta^{-1}a_{34} & a_{33} \\ \beta^{-1}\bar{a}_{31} & \beta^{-1}\bar{a}_{32} & \beta^{-1}\bar{a}_{33} & \beta^{-1}\bar{a}_{34} \end{pmatrix}$$

donc $rs = sr$, quelle que soit la $\tilde{K}$-homographie s, ce qui démontre la proposition

5.4.2. <u>Définition</u> : On appelle E', le sous-espace de E constitué des antipolarités permutables à l'antiinvolution r définie par la matrice R (cf. 5.4.1). Les éléments de E' sont appelés des points.

5.4.3. <u>Proposition</u> : L'espace E' (5.4.2) est constitué de deux sous-espaces disjoints dont les éléments sont définis respectivement par les matrices inversibles de la forme :

$$(2)\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \bar{a}_{12} & \beta a_{11} & \bar{a}_{14} & \beta\bar{a}_{13} \\ \bar{a}_{13} & a_{14} & a_{33} & a_{34} \\ \bar{a}_{14} & \beta a_{13} & \bar{a}_{34} & \beta a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a & a_{13} & a_{14} \\ 0 & -\beta a_{11} & -\bar{a}_{14} & -\beta\bar{a}_{13} \\ \bar{a}_{13} & -a_{14} & a_{33} & 0 \\ \bar{a}_{14} & -\beta a_{13} & 0 & -\beta a_{33} \end{pmatrix}\ (3)$$

$a_{11}, a_{33} \in K$, $a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{34} \in K(\sqrt{\alpha})$.

L'antiinvolution r est définie par la matrice R (5.4.1). On a $R^2 = \beta^{-1}I$, I désignant la matrice unité d'ordre quatre. Donc $R^{-1} = \beta R$ et ${}^tR^{-1} = \beta\,{}^tR$. Soit p une antipolarité définie par la matrice hermitienne inversible (5.1.4) :

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \bar{a}_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \bar{a}_{13} & \bar{a}_{23} & a_{33} & a_{34} \\ \bar{a}_{14} & \bar{a}_{24} & \bar{a}_{34} & a_{44} \end{pmatrix},\ a_{ii} \in K.$$

Au point x, p fait correspondre le plan W' tel que $M(W') = P.\bar{M}(x)$;
au plan W', r fait correspondre le plan W" tel que $M(W'') = {}^tR^{-1}.\bar{M}(W') = \beta\,{}^tR.\bar{M}(W')$.
Donc r p est la corrélation $M(W'') = \beta\,{}^tR.\bar{P}.M(x)$ définie par la matrice :

$$\beta\,{}^tR.\bar{P} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} & \bar{a}_{23} & \bar{a}_{24} \\ \beta a_{11} & \beta\bar{a}_{12} & \beta\bar{a}_{13} & \beta\bar{a}_{14} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \\ \beta a_{13} & \beta a_{23} & \beta a_{33} & \beta\bar{a}_{34} \end{pmatrix}$$

De même, pr est la corrélation définie par la matrice :

$$PR = \begin{pmatrix} \beta^{-1}a_{12} & a_{11} & \beta^{-1}a_{14} & a_{13} \\ \beta^{-1}a_{22} & \bar{a}_{12} & \beta^{-1}a_{24} & a_{23} \\ \beta^{-1}\bar{a}_{23} & \bar{a}_{13} & \beta^{-1}a_{34} & a_{33} \\ \beta^{-1}\bar{a}_{24} & \bar{a}_{14} & \beta^{-1}a_{44} & \bar{a}_{34} \end{pmatrix}$$

La condition pr = rp, qui exprime l'appartenance de p à E' (5.4.2), équivaut à l'existence de $m \in K(\sqrt{\alpha})$ tel que $P\bar{R} = m\,\beta\,{}^tR.\bar{P}$, i.e :

$$\frac{a_{11}}{a_{22}} = \frac{\beta^{-1}a_{22}}{\beta a_{11}} = \frac{\beta^{-1}a_{12}}{a_{12}} = \frac{\bar{a}_{12}}{\beta\bar{a}_{12}} = \frac{\beta^{-1}a_{24}}{\beta\beta\bar{a}_{13}} = \frac{\bar{a}_{13}}{a_{24}} = \frac{a_{23}}{\beta\bar{a}_{14}} = \frac{\bar{a}_{14}}{\beta a_{23}} = \frac{\beta^{-1}a_{14}}{\bar{a}_{23}}$$

$$= \frac{\beta^{-1}\bar{a}_{23}}{a_{14}} = \frac{a_{13}}{\bar{a}_{24}} = \frac{\beta^{-1}\bar{a}_{24}}{\beta a_{13}} = \frac{\beta^{-1}a_{34}}{a_{34}} = \frac{\bar{a}_{34}}{\beta\bar{a}_{34}} = \frac{a_{33}}{a_{44}} = \frac{\beta^{-1}a_{44}}{\beta a_{33}} = m \in K(\sqrt{\alpha}).$$

On a $m^2 = \beta^{-2}$ i.e. $m = \beta^{-1}$ ou $m = -\beta^{-1}$ et on obtient respectivement les matrices de la forme (2) ou (3). Les éléments de E' sont donc définis par les matrices inversibles de la forme (2) ou (3). Le sous-espace de E' défini par les matrices inversibles de la forme (2) et le sous-espace de E' défini par les matrices inversibles de la forme (3) sont disjoints, car seule la matrice nulle est commune à l'ensemble des matrices de la forme (2) et à l'ensemble des matrices de la forme (3).

5.5 Le groupe fondamental de E'.

5.5.1. Définition : On appelle E'-isométrie, toute application de E' dans E' qui conserve l'écart.

5.5.2. Proposition : Soit q une projectivité (5.1.2) de $P_3(K(\sqrt{\alpha}))$, permutable à l'antiinvolution r (5.4.1). L'application de E' dans E' : $p \longrightarrow qpq^{-1}$, définie par q, est une E'-isométrie.

D'après 5.3.2, 5.3.3, 5.4.2, 5.5.1, il suffit de démontrer que la relation $p \in E'$, qui équivaut à $pr = rp$, entraîne $qpq^{-1} \in E'$, i.e. $(qpq^{-1})r = r(qpq^{-1})$. Cette dernière relation résulte de la permutabilité de r et q, donc de r et q^{-1}, ainsi que de la permutabilité de r et p.

5.5.3. Proposition : le groupe des projectivités de $P_3(K(\sqrt{\alpha}))$ permutables à l'antiinvolution r (cf. 5.4.1), définit (cf. 5.5.2) un groupe de E'-isométries, appelé groupe fondamental de E', En particulier, le groupe des homographies permutables à r, définit le groupe des E'-déplacements, et le groupe $\mathcal{K}$-homographique h définit un sous-groupe de E'-déplacements.

Soient q et q' deux projectivités permutables à r.q'q et q^{-1} sont également des projectivités permutables à r. Il en résulte d'une part, que les projectivités permutables à r forment un groupe : d'autre part (cf. 5.5.2) le produit des E'-isométries $p \rightarrow qpq^{-1}$ et $p \rightarrow q'pq^{-1}$ est la E'-isométrie $p \rightarrow (q'q)p(q'q)^{-1}$ et l'inverse de la E'-isométrie $p \rightarrow qpq^{-1}$ est la E'-isométrie $p \rightarrow q^{-1}pq$. L'existence du groupe fondamental est démontrée.

Lorsque q et q' sont des homographies permutables à r, q' q et q^{-1} sont aussi des homographies permutables à r. Donc, comme précédemment, le groupe des homographies permutables à r, définit un sous-groupe du groupe fondamental.

Remarquons que le produit de deux corrélations permutables à r, étant une homographie permutable à r, on peut qualifier de E'-déplacements la E'-isométrie $p \to qpq^{-1}$ lorsque q est une homographie permutable à r, et de E'-antidéplacement, la même E'-isométrie, lorsque q est une corrélation permutable à r. En effet, les E'-déplacements ainsi définis forment un groupe et le produit de deux E'-antidéplacements est un E'-déplacement.

Enfin, comme au début de la démonstration, on déduit de 5.4.1, que le groupe $\tilde{K}$-homographique h définit un sous-groupe de E'-déplacements.

Q.E.D.

5.5.4. <u>Lemme</u> : Si la relation ps = sp est vérifiée pour tout $p \in E'$ (5.4.3), la $\tilde{K}$-homographie s est l'identité.

Soient la $\tilde{K}$-homographie s, définie par la $\tilde{K}$-matrice inversible S, et l'antipolarité p, dont la matrice P inversible est égale à (2) ou (3) (5.4.3). Les relations $M(W') = P.\bar{M}(x)$ et $M(W'') = {}^{t}S^{-1}.M(W')$, définissent respectivement p et s. Le produit sp, défini par la relation $M(W'') = {}^{t}S^{-1}.P.\bar{M}(x)$ est donc l'anticorrélation de matrice ${}^{t}S^{-1}.P$. De même, ps est l'anticorrélation de matrice $P\bar{S}$. La relation ps = sp, vraie pour tout $p \in E'$, équivaut donc à l'existence de $m \in K(\sqrt{\alpha}) . \{0\}$ tel que :

$$(4) \qquad {}^{t}S^{-1}.P = mP\bar{S} \quad ,$$

quelle que soit la matrice P inversible de la forme (2) ou (3) (5.4.3). On a (1.3.2) :

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \beta^{-1}\bar{a}_{12} & \bar{a}_{11} & \beta^{-1}\bar{a}_{14} & \bar{a}_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \beta^{-1}\bar{a}_{32} & \bar{a}_{31} & \beta^{-1}\bar{a}_{34} & \bar{a}_{33} \end{pmatrix} \text{ donc } \bar{S} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} & \bar{a}_{14} \\ \beta^{-1}a_{12} & a_{11} & \beta^{-1}a_{14} & a_{13} \\ \bar{a}_{31} & \bar{a}_{32} & \bar{a}_{33} & \bar{a}_{34} \\ \beta^{-1}a_{32} & a_{31} & \beta^{-1}a_{34} & a_{33} \end{pmatrix}$$

En utilisant les notations de 1.3.9 et 1.3.10, la $\tilde{K}$-matrice S^{-1} s'écrit :

$$S^{-1} = \ell^{-1}(y_{ji}) = \ell^{-1}\begin{pmatrix} y_{11} & y_{21} & y_{31} & y_{41} \\ \beta^{-1}\bar{y}_{21} & \bar{y}_{11} & \beta^{-1}\bar{y}_{41} & \bar{y}_{31} \\ y_{13} & y_{23} & y_{33} & y_{43} \\ \beta^{-1}\bar{y}_{23} & \bar{y}_{13} & \beta^{-1}\bar{y}_{43} & \bar{y}_{33} \end{pmatrix}, \ \ell \in K - \{0\}.$$

Donc :

$${}^tS^{-1} = \ell^{-1}\begin{pmatrix} y_{11} & \beta^{-1}\bar{y}_{21} & y_{13} & \beta^{-1}\bar{y}_{23} \\ y_{21} & \bar{y}_{11} & y_{23} & \bar{y}_{13} \\ y_{31} & \beta^{-1}\bar{y}_{41} & y_{33} & \beta^{-1}\bar{y}_{43} \\ y_{41} & \bar{y}_{31} & y_{43} & \bar{y}_{33} \end{pmatrix}.$$

Prenons successivement :

$$P = P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}; \ P = P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}; \ P = P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

(4) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} y_{11} & \bar{y}_{21} & y_{13} & \bar{y}_{23} \\ y_{21} & \beta\bar{y}_{11} & y_{23} & \beta\bar{y}_{13} \\ y_{31} & \bar{y}_{41} & y_{33} & \bar{y}_{43} \\ y_{41} & \beta\bar{y}_{31} & y_{43} & \beta\bar{y}_{33} \end{pmatrix} = m_1 \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} & \bar{a}_{14} \\ a_{12} & \beta a_{11} & a_{14} & \beta a_{13} \\ \bar{a}_{31} & \bar{a}_{32} & \bar{a}_{33} & \bar{a}_{34} \\ a_{32} & \beta a_{31} & a_{34} & \beta a_{33} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_{11} & -\overleftarrow{y}_{21} & y_{13} & -\overleftarrow{y}_{23} \\ y_{21} & -\beta\overleftarrow{y}_{11} & y_{23} & -\beta\overleftarrow{y}_{13} \\ y_{31} & -\overleftarrow{y}_{41} & y_{33} & -\overleftarrow{y}_{43} \\ y_{41} & -\beta\overleftarrow{y}_{31} & y_{43} & -\beta\overleftarrow{y}_{33} \end{pmatrix} = m_2 \begin{pmatrix} \overleftarrow{a}_{11} & \overleftarrow{a}_{12} & \overleftarrow{a}_{13} & \overleftarrow{a}_{14} \\ -a_{12} & -\beta a_{11} & -a_{14} & -\beta a_{13} \\ \overleftarrow{a}_{31} & \overleftarrow{a}_{32} & \overleftarrow{a}_{33} & \overleftarrow{a}_{34} \\ -a_{32} & -\beta a_{31} & a_{34} & -\beta a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_{11} & -\overrightarrow{y}_{21} & -y_{13} & \overrightarrow{y}_{23} \\ y_{21} & -\beta\overrightarrow{y}_{11} & -y_{23} & \beta\overrightarrow{y}_{13} \\ y_{31} & -\overrightarrow{y}_{41} & -y_{33} & \overrightarrow{y}_{43} \\ y_{41} & -\beta\overrightarrow{y}_{31} & -y_{43} & \beta\overrightarrow{y}_{33} \end{pmatrix} = m_3 \begin{pmatrix} \overrightarrow{a}_{11} & \overrightarrow{a}_{12} & \overrightarrow{a}_{13} & \overrightarrow{a}_{14} \\ -a_{12} & -\beta a_{11} & -a_{14} & -\beta a_{13} \\ -\overrightarrow{a}_{31} & -\overrightarrow{a}_{32} & -\overrightarrow{a}_{33} & -\overrightarrow{a}_{34} \\ a_{32} & \beta a_{31} & a_{34} & \beta a_{33} \end{pmatrix}$$

1°) Supposons $a_{11} \neq 0$:

$$y_{11} = m_1\bar{a}_{11}\ ,\ y_{11} = m_2\overleftarrow{a}_{11} \Longrightarrow m_1 = m_2\ ,$$

$$m_1 = m_2\ ,\ \bar{y}_{21} = m_1\bar{a}_{12}\ ,\ -\overleftarrow{y}_{21} = m_2\overleftarrow{a}_{12} \Longrightarrow a_{12} = 0\ .$$

De même : $a_{14} = a_{32} = a_{34} = 0$.

$$y_{11} = m_1\bar{a}_{11}\ ,\ y_{11} = m_3\overrightarrow{a}_{11} \Longrightarrow m_1 = m_3\ ,$$

$$m_1 = m_3\ ,\ y_{13} = m_1\bar{a}_{13}\ ,\ -y_{13} = m_3\overrightarrow{a}_{13} \Longrightarrow a_{13} = 0\ .$$

De même : $a_{31} = 0$.

Donc si $a_{11} \neq 0$ on a :

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{a}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{a}_{33} \end{pmatrix}.$$

2°) Supposons $a_{12} \neq 0$:

$$\bar{y}_{21} = m_1\bar{a}_{12}\ ,\ -\overleftarrow{y}_{21} = m_2\overleftarrow{a}_{12} \Longrightarrow m_2 = -m_1\ ,$$

$$m_2 = -m_1\ ,\ y_{11} = m_1\bar{a}_{11}\ ,\ y_{11} = m_2\overleftarrow{a}_{11} \Longrightarrow a_{11} = 0.$$

De même : $a_{13} = a_{31} = a_{33} = 0$.

$$\bar{y}_{21} = m_2\bar{a}_{12}\ ,\quad -\bar{y}_{21} = m_3\bar{a}_{12} \Longrightarrow m_3 = -m_1\ ,$$

$$m_3 = -m_1\ ,\quad \bar{y}_{41} = m_1\bar{a}_{32}\ ,\quad -\bar{y}_{41} = m_3(-\bar{a}_{32}) \Longrightarrow a_{32} = 0.$$

De même : $a_{14} = 0$.

Donc, si $a_{12} \neq 0$ on a :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ \beta^{-1}\bar{a}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & \beta^{-1}\bar{a}_{34} & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Etude du cas</u> $a_{12} \neq 0$.

$$\text{on a : } S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \beta(\bar{a}_{12})^{-1} & 0 & 0 \\ (a_{12})^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta(\bar{a}_{34})^{-1} \\ 0 & 0 & (a_{34})^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Prenons :

$$P = P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_{13} & 0 \\ 0 & -\beta & 0 & -\beta\bar{b}_{13} \\ \bar{b}_{13} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\beta b_{13} & 0 & -\beta \end{pmatrix}$$

b_{13} étant un élément de $K(\sqrt{\alpha})$, tel que dét $(P_4) = \beta^2(1-Nb_{13}) \neq 0$, donc tel que $Nb_{13} \neq 1$.

(4) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\beta(a_{12})^{-1} & 0 & -\beta\bar{b}_{13}(a_{12})^{-1} \\ \beta(\bar{a}_{12})^{-1} & 0 & \beta(\bar{a}_{12})^{-1}b_{13} & 0 \\ 0 & -\beta b_{13}(a_{34})^{-1} & 0 & -\beta(a_{34})^{-1} \\ \bar{b}_{13}\beta(\bar{a}_{34})^{-1} & 0 & \beta(\bar{a}_{34})^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= m_4 \begin{pmatrix} 0 & \bar{a}_{12} & 0 & b_{13}\bar{a}_{34} \\ -a_{12} & 0 & -\bar{b}_{13}a_{34} & 0 \\ 0 & \bar{b}_{13}\bar{a}_{12} & 0 & \bar{a}_{34} \\ -b_{13}a_{12} & 0 & -a_{34} & 0 \end{pmatrix}$$

Donc : $\beta(\bar{a}_{12})^{-1} = m_4(a_{12}) \Longrightarrow m_4 = -\beta(Na_{12})^{-1}$,

$m_4 = -\beta(Na_{12})^{-1}$, $-\beta\bar{b}_{13}(a_{12})^{-1} = m_4 b_{13}\bar{a}_{34} \Longrightarrow \bar{b}_{13} = (\bar{a}_{12})^{-1}b_{13}\bar{a}_{34}$.

Cette dernière égalité est vraie quel que soit $b_{13} \in K(\sqrt{\alpha})$ tel que $N(b_{13}) \neq 1$. En prenant $b_{13} \in K - \{0\}$ on obtient : $(\bar{a}_{12})^{-1}\ \bar{a}_{34} = 1$. Donc $(\bar{a}_{12})^{-1}\bar{a}_{34} = 1$ et $\bar{b}_{13} = (\bar{a}_{12})^{-1}b_{13}a_{34} \Longrightarrow \bar{b}_{13} = b_{13} \Longrightarrow b_{13} \in K$, contrairement au fait que b_{13} appartient à $K(\sqrt{\alpha})$. Le cas $a_{12} \neq 0$ est donc exclu.

<u>Etude du cas</u> $a_{11} \neq 0$:

$$\text{on a } S^{-1} = \begin{pmatrix} (a_{11})^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\bar{a}_{11})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a_{33})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\bar{a}_{33})^{-1} \end{pmatrix}$$

Prenons :

$$P = P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\beta & -1 & -\beta \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -\beta & 0 & -\beta \end{pmatrix} \quad (\text{dét } P_5 \neq 0).$$

(4) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} (a_{11})^{-1} & 0 & (a_{11})^{-1} & (a_{11})^{-1} \\ 0 & -\beta(\bar{a}_{11})^{-1} & -(\bar{a}_{11})^{-1} & -\beta(\bar{a}_{11})^{-1} \\ (a_{33})^{-1} & -(a_{33})^{-1} & (a_{33})^{-1} & 0 \\ (\bar{a}_{33})^{-1} & -\beta(\bar{a}_{33})^{-1} & 0 & -\beta(\bar{a}_{33})^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= m_5 \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & 0 & \bar{a}_{33} & a_{33} \\ 0 & -\beta a_{11} & -\bar{a}_{33} & -\beta a_{33} \\ \bar{a}_{11} & -a a_{11} & \bar{a}_{33} & 0 \\ \bar{a}_{11} & -\beta a_{11} & 0 & -\beta a_{33} \end{pmatrix}$$

Donc : $(a_{11})^{-1} = m_5\bar{a}_{11} \Longrightarrow m_5 = (Na_{11})^{-1}$,

$m_5 = (Na_{11})^{-1}$, $(a_{11})^{-1} = m_5\bar{a}_{33} \Longrightarrow a_{11} = a_{33}$,

$m_5 = (Na_{11})^{-1}$, $(a_{11})^{-1} = m_5 a_{33} \Longrightarrow a_{11} = a_{33}$,

par suite $a_{11} = a_{33} \in K$ et l'homographie s est l'identité, ce qui démontre le lemme 5.5.4.

5.5.5. <u>Proposition</u> : Le groupe $\tilde{K}$-homographique h définit (cf. 5.5.2) un sous-groupe de E'-déplacements qui lui est isomorphe.

Soit s un élément générique de h. D'après la démonstration de 5.5.3, l'application $s \longmapsto (p \mapsto sps^{-1})$, est un homomorphisme de h sur le sous-groupe de E'-déplacements définis par les éléments de h. Cet homomorphisme est surjectif. Il Il est injectif, car d'après 5.5.4, le noyau est réduit à l'élément unité.

q.e.d.

5.5.6. <u>Théorème</u> : Le groupe des projectivités (cf. 5.1.2, 2°) de $P_3(K(\sqrt{\alpha}))$, permutables à l'antiinvolution r (5.4.1), définit (cf. 5.5.2) un groupe de E'-isométries, appelé groupe fondamental de E'. En particulier le groupe des homographies permutables à r, définit le sous-groupe des E'-déplacements, et le groupe $\tilde{K}$-homographique h définit un sous-groupe de E'-déplacements qui lui est isomorphe.

Résulte de 5.5.3 et 5.5.5.

5.5.7. Il résulte de 5.5.6 que l'on paut identifier un élément générique du groupe $\tilde{K}$-homographique h au E'-déplacement qu'il définit (cf. 5.5.2). On obtient ainsi le sous-groupe h des E'déplacements, l'automorphisme Λ de h (1.6.2), le sous-groupe G de h constitué des E'-déplacements invariants par Λ , les classes à droite (resp. les classes doubles à droite) et les classes à gauche (resp. les classes doubles à gauche) de h d'où :

5.5.8. <u>Théorème</u> : Les bijections $(F_d)^{-1}$ et $(F_d^{*})^{-1}$ (4.2.4) (resp. $(F_g)^{-1}$ et $(F_g^{*})^{-1}$ (4.2.5)) transforment la partition à droite (resp. à gauche) du groupe homographique bilatère H , en la partition à droite (resp. à gauche) du sous-groupe hn du groupe des E'-déplacements, toute classe double à droite (resp. à gauche) de H ayant pour image une classe double à droite (resp. à gauche) de h.

Les isomorphismes fondamentaux F^{-1} et $(F^{*})^{-1}$ (1.6.1) transforment un élément générique d'une classe à droite (resp. à gauche) de H en les E'-déplacements $s_1\,s$ et $s_1\,s'$ (resp. ss_1 et $s's_1$), s_1 désignant un élément générique du groupe G constitué des E'-déplacements invariants par l'automorphisme Λ , s et s', qui s'échangent par Λ étant les images par F^{-1} et $(F^{*})^{-1}$ d'un élément déterminé de la classe de H considérée. Lorsque la classe de H est une classe double à droite (resp. à gauche), s et s' appartiennent en outre à une même classe double à droite (resp. à gauche) de h.

La première partie du théorème résulte de 5.5.7, 4.2.4, 4.2.5, 4.2.7.

D'autre part, un élément générique de la classe à droite (resp. à gauche) de H, contenant l'homographie bilatère S, est l'homographie bilatère S_1S (resp. SS_1) où S_1 est un élément générique de G (4.2.1). En appliquant 1.6.2, et à nouveau 4.2.4, 4.2.5 et 4.2.7, on obtient la seconde partie du théorème.

BIBLIOGRAPHIE SPECIALISEE

[1] R. PERNET : Une géométrie conforme quaternionienne et son extension.
extension. Bulletin de la classe des Sciences.
Académie Royale de Belgique. 5e série, tome 49.

[2] E. CARTAN : Leçons sur la géométrie projective complexe.
Paris 1931. Gauthier-Villars.

[3] DEURING : Algebren. Leipzig 1935.

Manuscrit remis le
15 novembre 1966

G. ERTEL
Maitre - Assistant
C.S.U. ST-ETIENNE