PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

P. JANIN

Une généralisation des structures booléiennes

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1967, tome 4, fascicule 1
, p. 1-89
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1967__4_1_1_0>

TABLE DES MATIERES

UNE GENERALISATION DES STRUCTURES BOOLEIENNES

par P. JANIN

Dans un premier travail (Rapport de recherches de D.E.A., Fac. Sc. Lyon, juin 1965), nous avons étudié succintement les treillis convexes dans un anneau booléien. Ce travail est résumé ci-après par la définition 6, p. 11, les propositions 5 et 18, p. 12 et 24, et le debut de la remarque 12, p. 25, dont la lecture préalable est souhaitable.

Il apparaît vite que ces sous-structures conservent de nombreuses propriétés de l'anneau entier. On pouvait donc tenter d'en donner une définition algèbrique intrinsèque et de généraliser la notion d'anneau booléien.

Nous avons ainsi défini à l'aide d'une opération ternaire, les préanneaux booléiens, structures prequotient qui peuvent donner par passage au quotient des préanneaux, ou des anneaux booléiens unitaires ou non. La notion de zero relatif s'y degage, faisant pendant à celle d'unité relative, classique dans les algèbres. On y généralise la notion d'équivalence modulo un idéal et le théorème de Stone.

En langage de structures d'ordre, les anneaux booléiens sont bien connus comme treillis distributifs complementés. Les treillis distributifs relativement complémentés, généralisant les précédents, ont été aussi définis et étudiés (voir par exemple, Birkhoff [1]). Nous avons montré ici que ces derniers peuvent recevoir naturellement une structure de préanneaux. Cela permet de donner de ces treillis une définition algèbrique, même dans le cas où ils n'ont pas de plus petit élément, et d'énoncer pour eux des théorèmes moins accessibles par d'autres voies. (Théorème de représentation, généralisation d'un théorème de Birkhoff [1], problèmes de partition et d'immersion).

Il restait à exprimer ces généralisations en langage topologique : le dernier chapitre étudie la notion d'espace localement booléien, après avoir précisé quelques propriétés générales des espaces topologiques non compacts, et résoud les problèmes de caractérisation et de liberté posées par la notion d'espace dual d'un préanneau.

Le § 5, chapitre 1, propose enfin quelques applications de la notion de treillis convexe. (Résolution d'équations booléiennes, étude des idéaux d'un anneau booléien, caractérisation du germe d'une partie d'un espace topologique suivant un filtre et de l'ensemble des germes de parties).

CHAPITRE I. PRE-ANNEAUX BOOLEIENS

§ 1 - Généralités :

Définition 1 : On appelle préanneau booléien (en abrégé préanneau) un ensemble P non vide muni des opérations suivantes :

1) Une loi de composition ternaire, ou application de P^3 dans P, appelée double addition, faisant correspondre au triplet (x,y,z) l'élément s dit double somme de x, y et z, noté $s = x+y+z$, et satisfaisant aux trois axiomes :

a) $\forall x\ \forall y\ \forall z$, $x+y+z = x+z+y = y+x+z$ (commutativité)

b) $\forall x\ \forall y\ \forall z\ \forall t\ \forall u$, $(x+y+z)+t+u = x+y+(z+t+u)$ (associativité)

c) $\forall x\ \forall y\ \forall z\ \forall t$, $x+y+z = x+y+t \Longrightarrow z = t$ (régularité à gauche d'un couple d'éléments).

2) Une multiplication notée., associative, commutative, idempotente, et distributive à gauche par rapport à la double addition, c'est-à-dire que : $t.(x+y+z) = t.x+t.y+t.z$

On supprimera en général le point, écrivant xy le produit x.y.

Exemples de préanneaux (N.B. Le présent travail généralise la notion classique d'anneau booléien. Nous la réintroduisons pourtant succintement (ici, à l'occasion d'exemples à donner) de façon à assurer (plus loin) la validité pour les anneaux des résultats obtenus pour les préanneaux). (voir remarque 9 et lemme 4)

1) Un anneau idempotent (Note 1), ou anneau booléien, dans lequel $s = x+y+z$ désignera la somme, au sens de l'anneau, des éléments x, y et z est un préanneau.

2) On sait qu'un tel anneau est de caractéristique 2. Il en résulte, en donnant de la double somme la même définition qu'en 1), que l'ensemble réduit

Note 1 : non généralement unitaire : voir remarque 9, in fine.

a un seul élément d'un anneau booléien est un préanneau.

3) h étant un homomorphisme d'anneaux booléiens et a un élément de l'image de h, l'ensemble $h^{-1}(a)$, image réciproque de a, est un préanneau. On vérifie immédiatement sa stabilité pour la multiplication et la double somme définie comme en 1).

4) En particulier, en citant ici la théorie des anneaux booléiens à titre de simple illustration, un ultrafiltre d'un anneau booléien est un préanneau. Réciproquement, nous démontrerons au § 4, que tout préanneau peut être immergé comme ultrafiltre dans un anneau booléien. (voir Remarque 9, in fine).

Définition 2 : Un sous-préanneau est un sous-ensemble d'un préanneau stable pour les deux opérations.

Propriétés des opérations :

1) La double somme peut s'écrire dans n'importe quel ordre. De la définition 1, 1,a), on tire :

$x_1+x_2+x_3 = x_{\sigma(1)}+x_{\sigma(2)}+x_{\sigma(3)}$ car toute permutation σ est un produit de transpositions.

2) Dans l'expression $(x+y+z)+t+u$, la parenthèse peut grouper trois termes successifs quelconques.

De la définition 1, 1,b) et de la précédente propriété 1, on tire :

$(x+y+z)+t+u = x+y+(z+t+u) = x+y+(u+z+t) =$

$(x+y+u)+z+t = (u+x+y)+z+t = u+x+(y+z+t) = x+(y+z+t)+u$

3) Il est dès lors clair que tout terme pouvant entrer dans la parenthèse ou en sortir, et commuter avec tout autre à l'intérieur ou à l'extérieur de la parenthèse, il pourra venir occuper une position quelconque. La somme multiple de 5 termes, et par une récurrence simple, d'un nombre impair de

termes, pourra donc s'écrire dans n'importe quel ordre et en supprimant les parenthèses.

4) Tout couple d'éléments est régulier à droite : cela résulte de la commutativité.

5) Pour tout x, $x+x+x = x$.

En effet, $(x+x+x)(x+x+x) = (x+x+x)$(idempotence) et en appliquant la double distributivité : $9x = 3x$ (où nx désigne la somme de n termes égaux à x) ou encore : $7x+x+x = x+x+x$.

La régularité entraîne $7x = x$. D'où $7x+7x+7x = x+x+x$ ou $21x = 3x$ (a).

En formant de même $(x+x+x+x+x)^2$, on tirera $25x = 5x$ ou :

$21x+(x+x+x)+x = x+(x+x+x)+x$ (b).

De (a) et (b), par régularité, on tire : $21x = x$ et enfin $3x = x$ ou $x+x+x=x$.

6) Pour tous x et y, $y+x+x = y$

D'après 5, $x+x+x = x$

D'où : $x+x+x+y+y = x+y+y$

La régularité entraîne : $x+x+y = y$.

7) On peut transférer tout groupe de 2 termes d'un membre à l'autre d'une égalité (donc tout groupe d'un nombre pair de termes).

$x+y+z = t+u+v$

$x+y+z+u+v = t+u+v+u+v$ et en appliquant 6 au membre de droite, deux fois,

$x+y+z+u+v = t$.

8) On peut échanger deux termes appartenant respectivement aux deux membres d'une égalité :

$x+y+z = t+u+v$

Appliquons 7) à u et v : $x+y+z+u+v = t$

puis à u et z : $x+y+v = t+u+z$

9) L'application $x \to a+b+x$ est bijective.

a) L'injectivité est entraînée par la régularité.

b) Soit y P et soit $x = a+b+y$

$a+b+x = a+b(a+b+y) = y$ (en appliquant 6) ce qui entraîne la surjectivité.

A fortiori, $a+P+P = P$ et $P+P+P = P$.

10) Remarque : Dans un anneau booléien, on sait que l'idempotence de la multiplication entraîne sa commutativité. Il n'en est rien pour un preanneau.

Soit en effet, un groupe booleien B (groupe additif de caractéristique 2, par exemple, le groupe additif d'un anneau booléien quelconque). Muni de la multiplication $xy = x$ et de la double addition $s = x+y+z$ au sens de l'addition du groupe, B satisfait à la definition 1, moins la commutativité. Celle-ci est donc une propriété indépendante (et le resterait même en adjoignant aux axiomes la distributivité à droite, qui est aussi satisfaite dans l'exemple ci-dessus).

11) La commutativite de la multiplication entraîne sa distributivité à droite par rapport à la double addition.

Définition 3 : On définira dans les préanneaux booléiens une seconde opération binaire, dite disjonction et notée v, par la relation $x \vee y = x+y+xy$. Tout sous-preanneau est stable pour la disjonction. Tout homomorphisme de préanneaux, conservant la multiplication et la double somme, conserve la disjonction.

Proposition 1 : La disjonction est idempotente, commutative, associative, distributive par rapport à la multiplication, elle-même distributive par rapport à la disjonction. (Les démonstrations sont de routine, de même que celle de la proposition 2). On démontre enfin que la disjonction est distributive par rapport à la double addition, ce qui donne aux deux opérations de multiplication et disjonction une symétrie qu'elle n'ont pas dans les anneaux.

Proposition 2 : Dans un préanneau, les relations $xy = x$ et $x \vee y = y$ sont équivalents et définissent une relation d'ordre entre x et y, notée $x \leq y$.

Pour cet ordre dit ordre booléien, $\inf(x,y) = xy$ et $\sup(x,y) = x \vee y$.

La proposition 1 entraîne qu'un préanneau est un treillis distributif pour l'ordre booléien. Il est de plus relativement complémenté, c'est-à-dire que pour tous éléments $a \leq x \leq b$, il existe un élément y, unique, tel que $xy = a$ et $x \vee y = b$.

Démonstration de la dernière assertion : Considérons $y = a+b+x$

$xy = xa+xb+xx = a+x+x = a$

$x \vee y = x \vee (a+b+x) = x+a+b+x+xa+xb+xx = b$

Le treillis étant distributif, le complément relatif est unique.

Remarque 1 : Tout homomorphisme de préanneaux, conservant la multiplication et la disjonction, est un homomorphisme d'ensembles ordonnés.

Proposition 3 : Pour tous x,y et z, $xyz \leq x+y+z \leq x \vee y \vee z$.

En effet, $xyz(x+y+z) = xyz+xyz+xyz = xyz$

$$(x+y+z)(x \vee y \vee z) = x(x \vee y \vee z)+y(x \vee y \vee z)+z(x \vee y \vee z)$$
$$= x+y+z$$

Remarque 2 : Si un préanneau possède un plus grand élément pour l'ordre booléien, cet élément, noté 1, est neutre pour la multiplication.

$\forall x,\ x \leq 1 \iff \forall x,\ x.1 = x$

Remarque 3 : Si le préanneau possède un plus petit élément noté 0 pour l'ordre booléien, on peut le munir naturellement d'une structure d'anneau booléien dont 0 est l'élément neutre du groupe additif. (Les anneaux booléiens sont considérés comme définis par les exemples 1 et 2, page 3). On notera ++ l'addition de l'anneau, dont la multiplication sera celle du préanneau, et on posera : $x{+}{+}y = 0+x+y$. On a bien les propriétés requises pour que P soit un anneau.

1) $x{+}{+}y = y{+}{+}x$ (conséquence de la commutativité de la double somme).

2) $(x{+}{+}y){+}{+}z = x{+}{+}(y{+}{+}z)$ car : $(x{+}{+}y){+}{+}z =$

$0+(0+x+y)+z = 0+x+(0+y+z) = x{+}{+}(y{+}{+}z)$

Remarque : $x{+}{+}y{+}{+}z$ se confond alors avec $x+y+z$.

3) 0 est neutre : $0{+}{+}x = 0+ 0+x = x$

4) $\forall x,\ \exists y,\ x{+}{+}y = 0$. En effet $y = x$ satisfait à la condition et tout élément est son propre inverse.

$x{+}{+}x = 0+x+x = 0$

5) $z(x{+}{+}y) = z(0+x+y) = z.0+zx+zxy = 0+zx+zy = zx{+}{+}zy$ compte tenu de ce que, 0 étant le plus petit élément, $0 \leq z$ et $z.0 = 0$.

De même, la multiplication est distributive à droite par rapport à l'addition ++.

6) La multiplication étant idempotente, l'anneau est booléien.

7) Les conditions 1 à 4 sont vérifiées en remplaçant 0 par un élément **a** quelconque. Un préanneau peut donc être muni d'une structure de groupe additif abélien, en posant :

$x{+}{+}y = a+x+y$

et a jouera le rôle d'élément neutre. Mais en général, la multiplication ne sera pas distributive par rapport à l'addition ++.

Remarque 4 : Par une récurrence immédiate, un préanneau fini possède un suprémum et un infimum. Un préanneau fini est donc d'une façon naturelle, un anneau booléi. Il en résulte aussi qu'un préanneau qui n'a pas à la fois un plus grand et un plus petit élément, est infini.

Définition 4. Idéal d'un préanneau : C'est un ensemble :

1) stable pour la disjonction

2) contenant les minorants de chacun de ses éléments.

Le préanneau P entier, ou l'ensemble {0} s'il existe, sont des idéaux triviaux. Tout idéal différent de P est dit propre. L'ensemble des idéaux propres et non triviaux d'un préanneau de plus de deux éléments n'est pas vide : l'ensemble $I_p = \{x \; ; \; x = yp\}_{y \in P}$ est un idéal, dit idéal principal engendré par p, qui est propre et non trivial si $p \neq 1$ et $p \neq 0$.

Définition 5. Filtre d'un préanneau : C'est un ensemble :

1) stable pour la multiplication

2) contenant les majorants de chacun de ses éléments.

Les définitions et remarques faites pour les idéaux se transposent immédiatement. Le filtre principal engendré par p est $F_p = \{x \; ; \; x = y \vee p\}_{y \in P}$

Remarque 5 : Un idéal (resp. un filtre) est stable pour la multiplication (resp. pour la disjonction) par un élément quelconque du préanneau, donc à fortiori par l'un de ses éléments. En effet, $\forall x \in P$, $\forall y \in I$, $xy \leq y$ donc $xy \in I$. (resp. $\forall x \in P$, $\forall y \in F$, $y \leq x \vee y$ donc $x \vee y \in F$). Réciproquement, cette propriété équivaut à la condition 2 de la définition 4 (resp. 5). Soit en effet, $x \in I$ et $y \leq x$: $y = xy \in I$ (resp. $x \in F$ et $y \geq x$: $y = x \vee y \in F$). On démontre encore les propriétés suivantes :

L'intersection d'une famille quelconque d'idéaux (resp. de filtres) est un idéal (resp. un filtre). Il existe donc un plus petit idéal (resp. filtre) contenant une partie donnée $E \subset P$. Le plus petit idéal contenant une partie $E \subset P$ est l'ensemble I des x tels qu'il existe une partie finie $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset E$, avec $x \leq x_1 \vee \ldots \vee x_n$.

Le plus petit filtre contenant une partie $E \subset P$ est l'ensemble F des x tels qu'il existe une partie finie $\{y_1, \dots, y_p\}$ E, avec $y_1 \cdot \dots \cdot y_p \leqslant x$.

Proposition 4 : Produits de préanneaux. Le produit d'une famille quelconque de préanneaux, muni de la structure produit, est un préanneau. La relation d'ordre booléien, sur le préanneau produit est définie par la relation d'ordre produit.

La vérification est de pure routine.

§ 2. TREILLIS CONVEXES D'UN PREANNEAU BOOLEIEN

Définition 6 : Treillis convexe d'un préanneau : C'est un ensemble T :

1) stable pour la multiplication et la disjonction

2) contenant tout élément compris entre deux de ses éléments : si $a \leq b$, $a \in T$ et $b \in T$, si $a \leq x \leq b$, alors $x \in T$.

Les définitions faites pour les idéaux et filtres se transposent immédiatement. Nous verrons plus loin la définition des treillis convexes principaux. L'ensemble réduit à un élément d'un préanneau est un treillis convexe.

Remarque : Un treillis convexe se définira aussi par l'axiome unique : si $a \in T$ et $b \in T$, alors $[a.b, a \vee b] \subset T$, où $[ab, a \vee b]$ désigne l'intervalle fermé de T, ensemble de tous les éléments compris entre $a.b$ et $a \vee b$

Remarque 6 : Les filtres et idéaux sont des treillis convexes particuliers. Toute propriété générale des treillis convexes sera donc valable pour eux.

Remarque 7 : Dans un préanneau possédant un plus petit élément 0 (resp. un plus grand élément 1) un idéal (resp. un filtre) est un treillis convexe contenant 0 (resp. 1) et réciproquement.

Remarque 8 : Un treillis convexe est un sous-préanneau : la stabilité pour la double addition résulte de la proposition 3. La réciproque est fausse : dans un préanneau fini de plus de 4 éléments, dont on vérifie immédiatement l'existence, l'ensemble $\{0,a,a',1\}$ où a' est le complément de a relatif à 0 et 1, est un sous-préanneau, non un treillis convexe. Toutefois, un sous-préanneau étant stable pour la disjonction (déf. 3), il est stable pour les opérations sup. et inf.. C'est donc un sous-treillis(non généralement convexe).

Remarque 9 : Les anneaux booléiens ont été définis page 3, exemples 1 et 2. Dans ces anneaux, on définit classiquement la relation d'ordre $x \leq y$ par $xy = x$, et les filtres et idéaux par les mêmes axiomes que pour un préanneau (déf. 4 et 5). On peut aussi y définir des treillis convexes de la même façon (déf. 6).

Montrons que dans un préanneau P possédant un plus petit élément, un treillis convexe (resp. un filtre, un idéal) pour la structure de préanneau de P est aussi un treillis convexe (resp. un filtre, un idéal) pour sa structure naturelle d'anneau. Il en résultera que toute propriété générale démontrée pour ces sous-ensembles dans un préanneau sera valable dans un anneau booléien.

Démonstration : désignons par $x \overset{\circ}{\vee} y$ la disjonction de x et y pour la structure d'anneau de P.

$x \overset{\circ}{\vee} y = x{+}{+}y{+}{+}x.y = (0+x+y)+0+xy = x \vee y$.

La disjonction et la multiplication étant les mêmes pour les deux structures, les relations d'ordre y coïncident et l'assertion est entraînée.

Notons encore qu'à moins d'indication contraire, les propriétés qui seront énoncées pour des anneaux seront valables pour des anneaux unitaires ou non. (Dans un anneau non unitaire, il va de soi que la notion de filtre, définie comme en déf. 5, et donc formellement comme dans un anneau unitaire, reste valable).

Proposition 5. Propriétés élémentaires des treillis convexes :

1) L'intersection d'une famille quelconque de treillis convexes, est un treillis convexe. Il existe donc un plus petit treillis convexe contenant une partie donnée $E \subset P$. On dira que T est engendré par E. L'ensemble des treillis convexes d'un préanneau forme une famille de Moore.

2) Soit T le treillis convexe engendré par une partie E de P, R et Q les plus petits filtre et idéal contenant E, et soit $M = R \cap Q$ (R et Q pouvant être impropres). Alors, T = M.

a) $T \subset M$

- Soit $a, b \in M$. $a, b \in R$, donc $a.b$, $a \vee b \in R$

$a, b \in Q$ donc $a.b$, $a \vee b \in Q$

Donc $a.b$, $a \vee b \in R \cap Q = M$, et M est stable pour les deux opérations.

- Soit maintenant, $a, b \in M$ et $c \in P$ tel que $a \leq c \leq b$.

$a \in R$, $a \leq c$ donc $c \in R$
d'où $c \in R \cap Q = M$
$b \in Q$, $c \leq B$ donc $c \in Q$

- M est donc un traillis convexe contenant E. Il contient donc T, le le plus petit treillis convexe contenant E, et $T \subset M$.

b) $M \subset T$

- R est le filtre engendré par E, donc pour tout x de R, il existe (remarque 5) $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset E$, tel que $x_1 . \ldots . x_n \leq X$. De même, pour tout x de Q, idéal engendré par E, il existe $\{y_1, \ldots, y_p\} \subset E$ tel que $x \leq y_1 \vee \ldots \vee y_p$. Donc, pour tout $x \in M = R \cap Q$, il existe

$\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots y_p\} \subset E$, tel que

$x_1 . \ldots . x_n \leq x \leq y_1 \vee \ldots \vee y_p$.

Comme $x_1 . \ldots . x_n$ et $y_1 \vee \ldots \vee y_p$ sont éléments de T qui contient E et qui est stable pour les deux opérations, $x \in T$, et $M \subset T$. D'où l'égalité et l'assertion.

3) Tout treillis convexe T est l'intersection d'un filtre R (propre ou non) et d'un idéal Q (propre ou non). En effet, T, treillis convexe, s'engendre lui-même. Il est donc de la forme $R \cap Q$, où R (resp. Q) est le plus petit filtre (resp. idéal) contenant T. R et Q seront dits filtre et idéal générateurs de T.

4) Réciproquement, tout ensemble T de la forme $R \cap Q$ où R est un filtre (propre ou non) et Q un idéal (propre ou non) est un treillis convexe. Cela a été démontré en 2, a) ci-dessus

5) Les facteurs R et Q sont uniques. Soit en effet, $T = R \cap Q$ et R' (resp. Q') le plus petit filtre (resp. idéal) contenant T. D'après 3) ci-dessus, $T = R' \cap Q'$.

Puisque $T = R \cap Q$, $R \supset T$ et $Q \supset T$, donc $R \supset R'$ et $Q \supset Q'$. Supposons qu'il existe $x \in Q - Q'$, et soit $t \in T$. Donc $t \in Q$ et $t \in Q'$.

a) $x \vee t \in Q$ car Q est stable pour $\vee$.

$x \vee t \in R$ car $t \in R$ et R contient les majorants de t.

d'où $x \vee t \in T$ et par conséquent, $x \vee t \in Q'$.

b) Q' contient donc tous les minorants de $x \vee t$, donc contient x, ce qui est contradictoire et $Q = Q'$. De même $R = R'$.

6) On dira qu'un treillis convexe est inf.-principal (resp. sup.-principal) si son filtre (resp. son idéal) générateur est principal. Un treillis convexe est dit principal s'il est à la fois inf et sup.-principal. T est alors un intervalle fermé de P. On démontre aisément que l'intersection d'une famille <u>finie</u> de treillis convexes principaux est un treillis convexe principal. (L'ensemble des treillis convexes principaux n'est pas en général une sous-famille de Moore).

<u>Proposition 6</u> :

Soit un préanneau P et un treillis convexe principal $T = [p, q] \subset P$.

On démontre immédiatement que :

1) $T = (P.q) \vee p$ ou : tout élément de T est de la forme $(a.q) \vee p$ avec $a \in P$.

2) T est un préanneau ayant un plus petit et un plus grand élément. L'application $h : P \longrightarrow T$

$$a \longrightarrow (a.q) \vee p$$

est un homomorphisme de préanneaux (d'un préanneau généralement sans plus grand ni plus petit élément sur un préanneau possédant ces deux éléments) et un homomorphisme d'ensembles ordonnés (même remarque).

3) T pouvant être muni naturellement d'une structure d'anneau booléien, il en resulte que tout treillis convexe fini est de cardinal de la forme 2^n, où $n \in \mathbb{N}$. (En effet, un anneau booléien A, défini page 3, exemples 1 et 2, est un espace vectoriel sur le corps $K = \{0,1\}$(la vérification est immédiate). Il est donc équipotent à $K^{(I)}$ où I est une base.(I étant ici finie, l'assertion en découle)

<u>Définition 7</u>. <u>Relation d'équivalence modulo un treillis convexe</u> :

Nous définirons entre éléments x_1 et x_2 de P la relation d'équivalence S suivante, T étant un treillis convexe fixé.

$x_1 \equiv x_2 (S) \Longleftrightarrow \exists t_1 \in T,\ t_1+x_1+x_2 \in T$

On déduit immédiatement que $\forall t \in T, t+x_1+x_2 \in T$, car $t+x_1+x_2 = t+t_1+(t_1+x_1+x_2)$

et le second membre est dans T (remarque 8).

Cette relation est bien une relation d'équivalence :

Réflexité : $t+x_1+x_1 = t \in T$

Symétrie : cela résulte de la commutativité de la double addition .

Transitivité : $t_1+x_1+x_2 \in T$ et $t_2+x_2+x_3 \in T$ entraînent :

$t_1+(t_1+x_1+x_2)+(t_2+x_2+x_3) = t_2+x_1+x_3 \in T$ (remarque 8).

<u>Lemme 1 :</u> La relation S est compatible avec la double addition :

Si $x_1 \equiv x_2$, $y_1 \equiv y_2$, $z_1 \equiv z_2$, alors $x_1+y_1+z_1 \equiv x_2+y_2+z_2$

En effet, si $t_1+x_1+x_2 \in T$, $t_2+y_1+y_2 \in T$, $t_3+z_1+z_2 \in T$,

$(t_1+x_1+x_2)+(t_2+y_1+y_2)+(t_3+z_1+z_2) \in T$ c'est-à-dire que :

$t+(x_1+y_1+z_1)+(x_2+y_2+z_2)\in T$ ce qui exprime l'assertion.

Lemme 2 : La relation S est compatible avec la multiplication par un élément quelconque de P :

$x_1 \equiv x_2$ entraîne a $x_1 \equiv ax_2$.

Par hypothèse, il existe t et t' dans T, tel que $t+x_1+x_2 = t'$.

Soit alors $t_1 = t\ v(a\ t')$ et $t_2 = t'\ v(at)$. Il est immédiat que :

$t \leq t_1 \leq t\ v\ t'$ $\quad t \leq t_2 \leq t\ v\ t'$. Donc $t_1 \in T$ et $t_2 \in T$. Comme $t_1 = t+at'+att'$ et $t_2 = t'+at+att'$, on déduit que : $at' = t_1+t+att'$ et $at = t_2+t'+att'$

D'où : $at+ax_1+ax_2 = at'$ devient : $t_2+t'+att'+ax_1+ax_2 = t_1+t+att'$

soit : $t_2+ax_1+ax_2 = t_1+t+t' \in T$ ce qui exprime l'assertion.

Lemme 3 : La relation S est compatible avec la multiplication :

Si $x_1 \equiv x_2$ et $y_1 \equiv y_2$, alors $x_1y_1 \equiv x_2y_2$

En effet, $x_1y_1 \equiv x_2y_1 \equiv x_2y_2$ en appliquant deux fois le lemme 2.

Lois de composition dans P/S : Munissons l'ensemble quotient P/S des opérations suivantes, $\overline{x_1}$ désignant la classe de x_1

double addition : $\overline{x_1}+\overline{x_2}+\overline{x_3} = \overline{x_1+x_2+x_3}$

multiplication : $\overline{x_1}.\overline{x_2} = \overline{x_1.x_2}$

Ces définitions sont indépendantes des représentants choisis (lemmes 1 et 3). Les propriétés des opérations de P s'y répercutent immédiatement. Il en résulte que :

Proposition 7 : P/S muni des opérations ci-dessus, est un préanneau booléien, noté P/T. Il sera dit quotient de P par le treillis convexe T. L'application canonique de P sur P/T est un homomorphisme de préanneaux.

Proposition 8 : Toute classe d'équivalence C modulo T est un treillis convexe de forme a+T+T, a étant un des éléments de C, ou de la forme a+t+T, où

$t \in T$. C est équipotente à T.

Démonstration : Soit f l'application canonique de P sur P/T. f est un homomorphisme d'ensembles ordonnés conservant les bornes supérieure et inférieure de deux éléments (remarque 1). Les classes C étant de la forme $f^{-1}(p)$ où $p \in P/T$, ce sont des treillis convexes (Birkhoff, [1] , chap. II, p.22).

Soit $a \in C$. $x \in C$ équivaut à $x \equiv a(T)$, ce qui équivaut encore à :

$\forall t \in T, \exists t' \in T, t' = a+x+t$ (déf. 7)

ou : $\forall t \in T, \exists t' \in T, x = a+t+t'$.

D'où $C \subset a+t+T$. Comme $\forall t \in T, \forall t' \in T, x = a+t+t'$ est congru à a, $a+t+T \subset C$ d'où l'égalité.

A fortiori $C = a+T+T$.

Enfin, T étant un sous-préanneau, la propriété 9, page 6 entraîne que l'application g de T dans C : $g : T \rightarrow a+t+T$ est injective. Compte tenu de ce qui précède, elle est surjective, donc bijective, ce qui achève la démonstration.

<u>Définition 8</u> : On appellera treillis convexe associé à T les treillis de la forme $a+T+T$, où $a \in P$.

<u>Proposition 9</u> : Etant donné un treillis convexe T quelconque d'un préanneau P, les treillis convexes associés à T forment une partition de P.

Cela résulte immédiatement de la proposition 8 et des propriétés des classes d'équivalence. On peut donc faire une partition d'un préanneau avec une famille de treillis convexes équipotents à un quelconque treillis convexe. Deux treillis convexes associés non disjoints sont confondus.

Proposition 10 : Soit un homomorphisme f d'un préanneau P sur un préanneau Q. On peut trouver un treillis convexe T tel que Q soit, à un isomorphisme près, le préanneau quotient P/T, et f soit l'application canonique de P sur Q, moyennant l'identification de Q et de P/T.

Soit en effet, un élément $q \in Q$ quelconque. L'ensemble $T = f^{-1}(q)$ est un treillis convexe (même démonstration que proposition 8,

Soit maintenant $p \in P$, quelconque, et considérons le treillis convexe $T_p = p+T+T$. $f(T_p) = f(p+T+T) = f(p)+q+q = f(p)$. Donc, pour tout p, T_p a pour image un unique élément. C'est dire que quand p parcourt P, les T_p forment les classes de la relation d'équivalence d'homomorphisme définie par $x \equiv y$ si et seulement si $f(x) = f(y)$, relation qui est donc la relation d'équivalence modulo T (puisque les T_p sont précisément les classes modulo T par la proposition 8). Il est immédiat que Q et P/T sont isomorphes et qu'on peut donc les identifier. Moyennant cette identification f est l'application canonique de P sur $Q = P/T$.

Remarque 10 : Plus généralement que dans la démonstration ci-dessus, l'image réciproque d'un treillis convexe (resp. un idéal) par un homomorphisme est un treillis convexe (resp. un idéal) (la démonstration est immédiate).

On peut exprimer les propositions8 et 9 sous la forme suivante :

Proposition 11 : Tout sous-ensemble T_a d'un préanneau de la forme a+T+T, ou a+t+T (avec $t \in T$, T treillis convexe et $a \in P$) est un treillis convexe.

La famille des sous-ensembles T_a pour a parcourant P forme une partition de P, T faisant partie de la famille. On peut trouver de plus, un préanneau Q et un homomorphisme sujectif de P sur Q, tel que chacun des T_a soit l'image réciproque d'un élément de Q.

Proposition 12 : La relation d'équivalence modulo T est la même que la relation d'équivalence modulo tout treillis convexe associé $T_a = a+t+T$.

En effet, $t_1+x_1+x_2 = t_2$ équivaut à $(a+t+t_1)+x_1+x_2 = a+t+t_2$.

Remarque 11 : Conséquence : si dans la famille des $(T_a)_{a\in P}$, il existe un idéal I dit idéal associé à T, P/T est aussi le quotient P/I. Cela est vrai en particulier, dans un anneau, compte tenu de la remarque 9, et de ce que si x_1 et x_2 sont congrus modulo I au sens des treillis convexes, ils sont aussi congrus modulo I au sens classique dans un anneau :

$$x_1 \equiv x_2 \ (I) \Longleftrightarrow 0+x_1+x_2 \in I \Longleftrightarrow x_1 ++ x_2 \in I$$

$$\Longleftrightarrow x_1++(-x_2)\in I \quad (\text{où } -x_2 = x_2 \text{ désigne l'opposé de } x_2).$$

Mais tout quotient d'un préanneau par un treillis convexe n'est pas le quotient par un idéal. A certain treillis convexes ne correspondent en effet, aucun idéal associé. De même, à certains treillis convexes peuvent ne correspondre aucun filtre associé, et même ni idéal ni filtre associé.

Exemple : Nous allons définir deux préanneaux P_1 et P_2, puis $P = P_1 \times Q \times P_2$ où Q est un préanneau quelconque.

Soit le préanneau P_1 défini comme suit :

On considère une famille dénombrables d'éléments $F_1 = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'ensemble des sommes formelles du type $a_{n_1}+a_{n_2}+\ldots+a_{n_{2p+1}}$. On définit la double addition de ces sommes d'une manière évidente, en exigeant de plus commutativité, et régularité de tout couple d'éléments (comme en déf. 1, 1,c). On pose enfin :

$$a_m.a_n = a_n.a_m = \begin{cases} a_o \text{ si } n \neq m \\ a_n \text{ si } n = m \end{cases}$$ et on définit le produit de deux sommes

$\sum_i a_i$ et $\sum_j a_j$ comme $\sum_{i,j} a_i.a_j$. L'ensemble de ces sommes formelles est ainsi un préanneau P_1, possédant un plus petit élément a_o noté 0. (P_1 est isomorphe pour sa structure naturelle d'anneau à l'idéal engendré par les parties finies dans l'ensemble des parties de F_1, la théorie des anneaux booléiens étant encore citée ici sans rôle démonstratif) P_1 n'a pas de plus grand élément. S'il y en avait un, soit $1 = \sum_{i=1}^{2p+1} a_i$, on devrait avoir pour tout

$a_m \neq 0$, $a_m.1 = a_m \neq 0$. P_1 étant infini, on peut pourtant choisir

$a_p \neq a_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 2_{p+1})$ et $a_p \neq 0$, donc tel que $a_p.1 = \sum a_p.a_i = 0$, ce qui est contradictoire.

Soit maintenant P_2 défini comme suit :

On considère une famille dénombrable $F_2 = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et l'ensemble des sommes formelles $b_{n_1}+\ldots+\ldots+b_{n_{2p+1}}$.

On définit la double addition comme pour P_1, et on définit une opération v :

$$b_m \text{ v } b_n = b_n \text{ v } b_m = \begin{cases} b_o \text{ si } n \neq m \\ b_n \text{ si } n = m \end{cases}$$

Le produit de deux éléments b_n et b_m est défini par la somme formelle $b_n\, b_m = b_n+b_m+b_n \text{ v } b_m$ et le produit de deux sommes formelles $\sum_i b_i$ et $\sum_j b_j$

comme la somme $\sum_{i,j} b_i b_j$. L'ensemble de ces sommes formelles est ainsi un préanneau P_2, possèdant un plus grand élément b_o noté 1. (P_2 est isomorphe en tant que préanneau au filtre engendré par les parties cofinies dans l'ensemble des parties de F_2) P_2 n'a pas de plus petit élément. S'il y en avait un, soit $0 = \sum_{i=1}^{2p+1} b_j$,

on devrait avoir pour tout b_m : $0 = b_m . 0 = b_m . \Sigma b_j = \Sigma b_m b_j$

$$= (2p+1) b_m + \sum_{1}^{2p+1} b_j + \sum_{j=1}^{2p+1} b_m \vee b_j .$$ P_2 étant infini,

on peut choisir $b_m \neq b_j$ $(1 \leqslant j \leqslant 2p+1)$ et $b_m \neq 1$. On devrait donc pouvoir écrire

$0 = (2p+1) b_m + 0 + (2p+1) . 1$

$\quad = 0 + b_m + 1$

ce qui est contradictoire puisque $b_m \neq 1$.

Soit enfin, le préanneau produit $P = P_1 \times Q \times P_2$, ensemble de triplets (a_m, c_p, b_q). Considérons l'ensemble $T \subset P$ des éléments de la forme $(0, c_p, 1)$.

C'est un treillis convexe :

a) il est stable pour la multiplication

b) il est stable pour la disjonction

Ces deux propriétés sont évidentes :

c) soit $(a_m, c_p, b_q) \in P$ et tel que $(0, c_{p_1}, 1) \leqslant (a_m, c_p, b_q) \leqslant (0, c_{p_2}, 1)$

On déduit immédiatement de la définition de l'ordre sur le produit P que

$a_m . 0 = a_m = 0$

$1 . b_q = b_q = 1$

donc $(a_m, c_p, b_q) \in T$.

Soit alors un treillis convexe T' quelconque associé à T. T' est de la forme $T' = (a_{m_o}, c_{p_o}, b_{q_o}) + T + T = (a_{m_o}, Q, b_{q_o})$.

Soit $t = (a_{m_o}, c_p, b_{q_o}) \varepsilon T'$. Si T' est un idéal (resp. un filtre) il devrait co tenir tous les minorants (resp. les majorants) de t. Or, P_2 (resp. P_1) n'ayant pas de plus petit (resp. de plus grand) élément, on peut toujours trouver (a_{m_o}, c_p, b_q) (resp. (a_m, c_p, b_{q_o}) plus petit (resp. plus grand) que t, et n'apparte nant pas à T', n'étant pas de la forme voulue. Il n'existe donc bien ni filtre ni idéal associé à T.

Définition 9 : Soit T un treillis convexe d'un préanneau P. Un élément u (resp.: sera dit unité relative (resp. zéro relatif) modulo T si pour tout $x \in P$, $u.x \equiv x$ (T) (resp. $z \vee x \equiv x$ (T)).

Définition 10 : On dit qu'un treillis convexe T d'un préanneau P est inf-régulier (resp. sup-régulier) si P possède un zéro relatif (resp. une unité relative) modulo T.

Proposition 13 :

1) Pour qu'un treillis convexe T soit inf-régulier (resp. sup-régulier il faut et suffit que le préanneau P/T possède un plus petit élément (resp. un plus grand élément).

2) Dans ces conditions, l'ensemble des zéros relatifs (resp. des unité relatives) modulo T, coïncide avec l'image réciproque du plus petit élément 0 (resp. du plus grand élément 1) de P/T par l'application canonique.

3) Pour qu'un treillis convexe possède un idéal (resp. un filtre) asso cié, il faut et il suffit qu'il soit inf-régulier (resp. sup-régulier). L'idéal (resp. le filtre) associé est l'ensemble des zéros relatifs (resp. des unités relatives) modulo T.

Démonstration :

1) a) T est inf-régulier.

$\exists z\ \forall x, z \vee x \equiv x$ (z zéro relatif mod. T)

Considérons $f : P \to P/T$, application canonique : $f(z \vee x) = f(z) \vee f(x) = f(x)$

ou : $\forall x,\ f(z) \leq f(x)$

Donc, $f(z)$ est le zéro de P/T, noté 0.

b) Réciproquement soit 0 le plus petit élément de P/T et $z \in f^{-1}(0)$.

$\forall x$, $0 \vee f(x) = f(x)$, ou $f(z) \vee f(x) = f(x)$ ou enfin $f(z \vee x) = f(x)$

D'où $z \vee x \equiv x(T)$ et z est zéro relatif, donc T est inf-régulier.

2) Soit z zéro relatif. $f(z) = 0$ d'après 1, a) donc $z \in f^{-1}(0)$. Réciproquement, $z \in f^{-1}(0)$: z est zéro relatif d'après 1, b).

3) Si T est inf-régulier, P/T possède un plus petit élément 0. Soit $I = f^{-1}(0)$. I est un idéal :

a) si $x \in I$, $y \in I$, $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) = 0$, donc $x \vee y \in I = f^{-1}(0)$

b) si $x \in I$ et $y \in W$, $f(y) \leq f(x) = 0$, donc $f(y) = 0$ et $y \in I = f^{-1}(0)$

Par la proposition 8, $I = i+T+T$ avec $i \in I$, et par la définition 8, I est associé à T.

Réciproquement, soit T et I, idéal associé. I est une classe d'équivalence modulo T donc $f(I)$ est un unique élément z. Soit $i \in I$ et $p \in P$: $p\,i \in I$, d'où :

$z = f(pi) = f(p).f(i) = f(p).z$, cela pour tout p. Donc pour tout $f(p) \in P/T$ $z \leq f(p)$, ce qui en application de 1) entraîne l'assertion.

- On démontrera d'une façon identique les propositions duales concernant les unités relatives.

<u>Proposition 14</u> : Un idéal (resp. un filtre) associé à un treillis convexe est unique.

Cela résulte de la proposition 13, 3.

Proposition 15 : Si T est un treillis convexe, $a+b+T$ est un treillis convexe associé à T.

En effet, $a+b+T = a+b+t_1+T+T = (a+b+t_1)+T+T = c+T+T$.

Proposition 16 : Si un sous-ensemble $E \subset P$ est tel que $a+b+E$ est un treillis convexe T, E est un treillis convexe associé à T. Il suffit de remarquer qu $a+b+E = T$ équivaut à $a+b+T = E$.

Proposition 17 : Soit T_1 et T_2 deux treillis convexes ayant au moins un élément commun a, T'_1 et T'_2 deux treillis convexes ayant au moins un élément commun a', et respectivement associés à T_1 et à T_2.

Alors : $T_1 \subset T_2$ et $T_1 \neq T_2$ équivaut à $T'_1 \subset T'_2$ et $T'_1 \neq T'_2$

En effet, $T'_1 = a'+a+T_1$ et $T'_2 = a'+a+T_2$, et l'application $T_i \longrightarrow a+a'+T_i$ est bijective, d'où $T_i \subset T_2$ et $T_1 \neq T_2$ entraîne $T'_1 \subset T'_2$ e $T'_1 \neq T'_2$

L'implication inverse est immédiate puisque $T_1 = a+a'+T'_1$ et $T_2 = a+a'+T'_2$.

Proposition 18 : Soit A un anneau booléien. Compte tenu des remarques 3 et 9, et des propositions 8 et 11, on peut énoncer la proposition suivante :

1) La translation d'un idéal I par un élément x de A est un treillis convexe T. La translation de T par un quelconque de ses éléments est égale à $\dot{I}$. La translation de I par un quelconque des éléments de T est égale à T.

2) La translation de tout treillis convexe T par un de ses éléments t est un idéal I, indépendant de t, dit idéal associé à T. La translation de $\dot{I}$ par un élément quelconque de T est égale à T, de même celle de T par un élément quelconque de $\dot{I}$.

3) T est un treillis convexe si et seulement si un idéal y opère transitivement et fidèlement par sa loi de groupe. " T est un treillis convexe" équivaut donc à " T est un espace affine sur un idéal ".

Démonstration :

1) a) $x{+}{+}I = 0+x+I = x+\dot{I}+\dot{I} = T$ (prop. 11)

b) si $t \in T$, $t = 0+x+i$ donc $t{+}{+}T = x+i+T = x+i+x+\dot{I}+\dot{I} = \dot{I}$

c) $t{+}{+}I = 0+t+I = 0+x+i_1+i_2+I = 0+x+I = T$

2) a) $I = t{+}{+}T = 0+t+T$ est un treillis convexe (prop. 15) et $0 = 0+t+t \in \dot{I}$, donc $\dot{I}$ est un idéal (rem. 7)

b) $t_1{+}{+}I = 0+t_1+I = 0+t_1+0+t+T = t_1+t+T = T$

c) $I{+}{+}T = 0+i+T = 0+(0+t+t_2)+T = t+t_2+T = T$

3) L'assertion résulte de ce que l'application $i \to t{+}{+}i$ est bijective (proposition 8 : $\dot{I}$ et T équipotents), compte tenu de ce qu'on peut définir un espace affine comme un espace dans lequel un groupe opère transitivement et fidèlement. (Si de plus, on requiert que le groupe d'opérateurs soit muni d'une structure d'espace vectoriel, cette exigence est satisfaite ici : voir proposition 6, 3)).

Remarque 12 : Un treillis convexe d'un anneau booléien est naturellement stable pour la double addition au sens de l'anneau : $x{+}{+}y{+}{+}z = x+y+z$. C'est cette propriété qui nous a guidé pour l'axiomatisation des préanneaux.

La réciproque est fausse : dans un anneau booléien, un sous-ensemble stable pour la double addition n'est pas généralement un treillis convexe (contre-exemple, remarque 8). On peut cependant montrer que c'est un sous-groupe additif, ou le complément dans un sous-groupe additif H de A, d'un sous-groupe additif K de H maximal dans H.

§ 3 ULTRAFILTRES ET IDEAUX MAXIMAUX D'UN PREANNEAU

Définition 11 : On rappelle qu'un ultrafiltre est un filtre maximal (propre).

L'existence d'ultrafiltres, d'idéaux et de treillis convexes maximaux sera démontrée ultérieurement. Sous réserve de cette existence, faisons la remarque 13 et énonçons la proposition 19 ci-après :

Remarque 13 : Tout treillis convexe maximal d'un préanneau est soit un ultrafiltre, soit un idéal maximal.

Soit, en effet, T un treillis convexe maximal (propre).

1° Ou bien T est un idéal. Il est alors idéal maximal : s'il existe $J \supset T$, T' n'est pas maximal en tant que treillis convexe.

2° Ou bien $T = I \cap F$ (prop. 5, 3), où F est un filtre propre, sinon $T = \dot{I}$

a) Ou bien $\dot{I}$ est propre et alors T est non maximal, en tant que treillis convexe, car $\dot{I} \supset T$.

b) Ou bien $\dot{I}$ est impropre et $T = F$. Donc F est un ultrafiltre : s'il existe F' contenant F, $T = F$ n'est pas maximal en tant que treillis convexe.

Proposition 19 : Soit I un idéal d'un préanneau P. Si P/I ne possède que deux éléments, I est un idéal maximal.

C'est dire en effet que P ne possède que deux classes d'équivalence modulo I, qui sont donc complémentaires l'une de l'autre (prop. 9) et toutes deux treillis convexes associés l'un à l'autre (prop. 8 et déf. 8). Soit $\dot{I}$ et T ces deux classes. S'il existe un idéal J qui contient strictement I, soit $p \in J - I$ (donc $p \in T$) et $U = p+J+J$ le treillis convexe associé à J et contenant p. Par la proposition $U \supset T$ et $U \neq T$, donc $U \cap \dot{I} \neq \emptyset$, c'est-à-dire que $U \cap J \neq \emptyset$. Par la pro position 9, dernière ligne, $U = J$. Comme $U \supset T$ et que $J \supset \dot{I}$, $U = J = P$ et $\dot{I}$ est maximal.

On démontrera de façon identique que si F est un filtre (resp. T un treillis convexe) et que P/F (resp. P/T) n'a que deux éléments F (resp. T) est maximal.

Cette proposition peut se réexprimer ainsi :

<u>Proposition 20</u> : S'il existe une partition d'un préanneau en deux treillis convexes non triviaux, ils sont associés l'un à l'autre et sont, l'un filtre et l'autre idéal, et maximaux.

Soient T_1 et T_2 ces deux treillis, $t_1 \in T_1$ et $t_2 \in T_2$. Puisque T_1 et T_2 sont complémentaires et que $T'_1 = t_2+t_1+T_1$ et T_1 sont disjoints, $T'_1 \subset T_2$. De même $T'_2 \subset T_1$. On en tire $t_1+t_2+T'_1 \subset t_1+t_2+T_2$, soit : $T_1 \subset T'_2$ et de même $T_2 \subset T'_1$, puis $T_1 = T'_2$, $T_2 = T'_1$.

T_1 et T_2 sont donc associés et la proposition 19 entraîne alors l'assertion, compte tenu de la remarque 13.

<u>Proposition 21</u> : Dans un préanneau de plus de deux éléments, l'ensemble E des idéaux propres ne contenant pas un élément fixé p ($p \neq o$ si o existe) n'est pas vide. Cet ensemble est inductif. Il possède donc des éléments maximaux. (Nous appellerons ces éléments : idéaux relativement maximaux).

1) Si P possède plus de deux éléments, il existe q, tel que p ne soit pas inférieur ou égal à q, puisque $p \neq o$, si P a un plus petit élément et que dans le cas contraire, il existe une infinité d'éléments inférieurs à p. Donc, l'idéal principal $I_q \in E$,

car $p \notin I_q$.

2) Soit une famille $(I_j)_{j \in J}$ totalement ordonnée d'idéaux ne contenant pas p. $\bigcup_j I_j$ est un idéal, et ne contenant pas p. (démonstration de type classique).

Proposition 22 : Tout idéal relativement maximal d'un préanneau est maximal.

L'existence d'idéaux maximaux en découle donc, compte tenu de la proposition 21. Le quotient d'un préanneau par un idéal maximal est un préanneau à deux éléments, donc, à un isomorphisme près, le corps Z/(2). Le complément d'un idéal maximal est un ultrafiltre, et inversement, et ils sont treillis convexes associés.

Démonstration : Soit I un idéal relativement maximal, ne contenant pas p, $P/\dot{I}$ le préanneau quotient. P/I possède un plus petit élément O, en application de la proposition 13, 1 et 13, 3. Soit f l'application canonique de P sur P/I. $f(I) = \{o\}$. Comme $I \neq P$, P/I possède au moins deux éléments. Supposons qu'il en possède plus de deux, et soit $a = f(p) \neq o$. S'il existe au moins, outre a et o, un autre élément b :

1) Ou bien a et b ne sont pas comparables

2) Ou bien $b<a$

3) Ou bien $a<b$ et en application de la proposition 2, il existe c tel que $a \vee c = b$ et $a.c = o$, c étant donc différent de a, b, o, et non comparable avec a.

Dans les trois cas, l'idéal principal J, engendré par b dans les deux premiers cas et par c dans le troisième, ne contient pas $a = f(p)$. L'image réciproque $I_1 = f^{-1}(J)$ est un idéal de P (remarque 10) qui contient strictement I puisque $J \supset \{o\}$ et que $J \neq \{o\}$, et ne contient pas p.

Il y a donc contradiction avec l'hypothèse de maximalité relative de I, et P/I contient au plus, donc exactement, deux éléments. La proposition 19 entraîne alors que I est maximal. (Réciproquement, un idéal maximal est évidemment relativement maximal pour tous les éléments qu'il ne contient pas et les deux notions se confondent).

Soit maintenant un idéal maximal K quelconque. Le raisonnement précédent appliqué à K et à un élément q tel que $q \notin K$ entraîne que P/K a exactement deux éléments.

Un préanneau à deux éléments est muni naturellement d'une structure d'anneau. Il est immédiat que c'est, à un isomorphisme près, le corps Z/(2).

Si I est un idéal maximal, compte tenu de ce que P/I possède deux éléments, et que les classes d'équivalence modulo I sont disjointes, l'image par l'application canonique, de F, complément de I, sera l'unité de P/I. Compte tenu de I3, 3, F est un filtre. La proposition 20 entraîne qu'il est maximal. Le complément d'un idéal maximal est donc bien un ultrafiltre.

L'existence d'ultrafiltres étant maintenant assurée, soit G un ultrafiltre quelconque. On peut refaire pour P/G une démonstration analogue à celle faite ci-dessus pour P/I et P/K, puis conclure que le complément de G est un idéal maximal. Idéaux et filtres maximaux sont de plus associés (prop.20).

<u>Proposition 23</u> : La fonction caractéristique d'une partie U d'un préanneau booléien P est un homomorphisme f de préanneaux de P sur Z/(2) si et seulement si U est un ultrafiltre de P.

1) U est un ultrafiltre. Soit I son idéal maximal associé.

a) $x \in U$, et $y \in U \Longleftrightarrow x.y \in U$

D'où $f(x) = 1$ et $f(y) = 1 \Longleftrightarrow f(x\,y) = 1$ et $f(x).f(y) = f(x.y)$

b) * $x \in U$, $y \in U$, $z \in U$ $f(x) = f(y) = f(z) = 1$

$x+y+z \in U$ (remarque 8) donc $f(x+y+z) = 1$

D'où $1 = f(x+y+z) = f(x)+f(y)+f(z) = 1+1+1$

* $x \in U$, $y \in U$, $z \notin U$ $f(x) = f(y) = 1$, $f(z) = o$

$x+y+z \in z+U+U = \dot{I}$ idéal maximal associé à U, donc $x+y+z \notin U$

$f(x+y+z) = o = 0+1+1 = f(x)+f(y)+f(z)$

* $x \in U$, $y \notin U$, $z \notin U$ $f(x) = 1$ $f(y) = f(z) = o$

$x+y+z \in x+I+I = U$

$1 = f(x+y+z) = f(x)+f(y)+f(z) = 1+o+o$

* $x \notin U$, $y \notin U$, $z \notin U$ $f(x) = f(y) = f(z) = o$

$x,y,z \in I$ $x+y+z \in I$ $f(x+y+z) = o = f(x)+f(y)+f(z)$

2) f est un homomorphisme de préanneaux de P sur Z/(2). Les images réciproques de o et 1 sont des treillis convexes, I et U, f étant l'application canonique de P sur P/I = Z/(2) (proposition 10). Par la proposition 13, U et $\dot{I}$ sont respectivement des filtres et idéaux, et par la proposition 19 ils sont maximaux. L'image de U par f est 1 et celle du complémentaire de U est o, d'où l'assertion.

<u>Proposition 24</u> : Tout préanneau P est isomorphe à un sous-préanneau de l'anneau P(X), ensemble des parties de l'ensemble X des ultrafiltres de P, P(X) étant muni des opérations classiques (intersection ensembliste et différence symétrique) et étant considéré lui-même comme préanneau.

Soit en effet l'application $s : P \longrightarrow P(X)$
$x \longrightarrow s(x)$

où $s(x) = \{U;\ U$ ultrafiltre et $x \in U\}$, c'est-à-dire que $s(x)$ est l'ensemble des ultrafiltres qui contiennent x. Soit x,y,z éléments de P, et I_i idéal maximal associé à l'ultrafiltre U_i.

1) $U_i \in s(xy) \Longleftrightarrow U_i \ni xy \Longleftrightarrow U_i \ni x$ et $U_i \ni y$

$\Longleftrightarrow U_i \in s(x) \cap s(y)$ D'où $s(xy) = s(x) \cap s(y)$

2) $U_i \in s(x+y+z) \Longleftrightarrow U_i \ni x+y+z$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x \in U_i,\ y \notin U_i,\ z \notin U_i \text{ (dans ce cas } x+y+z \in x+I_i+I_i = U_i \text{ car} \\ \qquad\qquad\qquad y \text{ et } z \text{ appartiennent à } I_i) \\ \text{ou bien } x \notin U_i,\ y \notin U_i,\ z \in U_i \ (x+y+z \in z+I_i+I_i = U_i) \\ \text{ou bien } x \notin U_i,\ y \in U_i,\ z \notin U_i \ (x+y+z \in y+I_i+I_i = U_i) \\ \text{ou bien } x \in U_i,\ y \in U_i,\ z \in U_i \ (x+y+z) \in U_i+U_i+U_i = U_i) \end{cases}$$

En effet, dans chacune des quatre autres possibilités ($2^3-4 = 4$)

$$\text{on a : } \begin{cases} x \notin U_i,\ y \in U_i,\ z \in U_i \Longrightarrow x+y+z \in x+U_i+U_i = I_i \text{ car } x \in I_i \\ x \in U_i,\ y \in U_i,\ z \notin U_i \Longrightarrow x+y+z \in z+U_i+U_i = I_i \text{ car } z \in I_i \\ x \in U_i,\ y \notin U_i,\ z \in U_i \Longrightarrow x+y+z \in y+U_i+U_i = I_i \text{ car } y \in I_i \\ x \notin U_i,\ y \notin U_i,\ z \notin U_i \Longrightarrow x+y+z \in I_i+I_i+I_i = I_i \text{ car } x,y,z \in I_i \end{cases}$$

Dans ces quatre cas, $x+y+z \notin U_i$. D'où la nouvelle équivalence, dans laquelle v désigne le "ou" logique et $\wedge$ désigne le "et" logique :

$U_i \in s(x+y+z) \Longleftrightarrow (U_i \ni x \wedge U_i \not\ni y \wedge U_i \not\ni z)\ v\ (U_i \not\ni x \wedge U_i \not\ni y \wedge U_i \not\ni z)$

$v (U_i \not\ni x \wedge U_i \ni y \wedge U_i \not\ni z)\ v\ (U_i \ni x \wedge U_i \ni y \wedge U_i \ni z)$

$\Longleftrightarrow (U_i \in s(x) \wedge U_i \notin s(y) \wedge U_i \notin s(z)\ v\ (U_i \notin s(x) \wedge U_i \notin s(y) \wedge U_i \in s(z)$

$v (U_i \notin s(x) \wedge U_i \in s(y) \wedge U_i \notin s(z)\ v\ (U_i \in s(x) \wedge U_i \in s(y) \wedge U_i \in s(z))$

$\Longleftrightarrow U_i \in (s(x) \cap \complement s(y) \cap \complement s(z)) \cup (\complement s(x) \cap \complement s(y) \cap s(z)) \cup (\complement s(x) \cap s(y) \cap \complement s(z))$

$\cup (s(y) \cap s(y) \cap s(z)) \Longleftrightarrow U_i \in s(x)+s(y)+s(z)$

(La formule d'addition dans l'anneau P(X) pour trois éléments étant considérée comme connue).

Nous caractériserons le sous-préanneau de P(X), image de P, dans le chapitre III, en langage topologique.

Remarque 14 : Dans le cas où le préanneau P possède un plus petit élément, o, s(P) possède également un plus petit élément, $\emptyset = s(o)$. Pour déduire de la proposition précédente le théorème de Stone pour les anneaux, montrons d'abord :

Lemme 4 : Deux préanneaux ayant un plus petit élément, homomorphes pour leur structure de préanneaux, sont homomorphes pour leur structure naturelle d'anneaux :

$$h(x{+}{+}y) = h(o+x+y) = h(o)+h(x)+h(y) = o+h(x)+h(y)$$
$$= h(x){+}{+}h(y)$$

(Il n'y a rien à vérifier pour la multiplication).

D'où le théorème de Stone :

Proposition 25 : Un anneau booléien A est isomorphe à un sous-anneau de l'ensemble P(X) des parties de l'ensemble X de ses ultrafiltres. En effet, s(A) a un plus petit élément (rem. 14). Il est isomorphe à A pour les structures de préanneau (prop. 24) donc d'anneaux (Lemme 4

Remarque : Si A est infini, le sous-anneau de P(X) image de A est toujours propre. Supposons au contraire que A puisse être isomorphe à P(X). Compte tenu de la remarque 5, les parties cofinies de X engendrent alors un filtre F de P(X) aucune intersection finie de ces parties ne peut être vide. Il est immédiat que l'ensemble des filtres propres d'un anneau est inductif. F est donc contenu dans un ultrafiltre U. Les images réciproques par s des éléments de U constituent un ultrafiltre x de A, et les parties de X éléments de U contiennent toutes x comme élément (Prop. 24).

Leur intersection doit donc contenir x, alors qu'il doit y avoir parmi elles la partie cofinie $X - \{x\}$. La contradiction entraîne l'assertion. Il convient donc de remarquer que lorsqu'un anneau infini est isomorphe à un ensemble de parties (Halmos, Booleau algebras, Th. 5, page 70), il ne s'agit pas de l'ensemble des parties de l'ensemble de ses ultrafiltres.

§ 4 IMMERSION D'UN PREANNEAU DANS UN ANNEAU BOOLEIEN

Soit un préanneau P et l'ensemble sans structure P^2. Considérons sur P^2 la relation d'équivalence suivante, notée R. Soit $(x,y) \in P^2$ et $(t,u) \in P^2$. On pose :

$(x,y) \equiv (t,u)(R) \Longleftrightarrow \exists z,\ x+y+z = t+u+z.$

On déduit alors que l'égalité a lieu pour tout $z_1 \in P$, en faisant la double somme de chaque membre avec z et z_1. Compte tenu de cette remarque :

La relation est réflexive, symétrique et transitive par suite des mêmes propriétés pour l'égalité.

Munissons en outre P^2 des lois de composition suivantes :

1) Une addition : $(x,y)+(t,u) = (x+y+t,\ u)$ (non commutative)

2) Une multiplication : $(x,y).(t,u) = (xt+xu+yt, yu)$ (commutative)

3) Une loi de composition externe avec P comme domaine d'opérateurs :

$t.(x,y) = (tx,ty)$

(On pourrait aussi définir R par $(x,y) \equiv (t,u)(R) \Longleftrightarrow x+y+t = u$)

<u>Lemme 5</u> : La relation R est compatible avec l'addition de P^2. Soit $(x,y) \equiv (x',y')$ et $(t,u) \equiv (t',u')$ (Comme il n'y a pas d'ambiguité on supprime R dans l'écriture de deux éléments congrus modulo R). On a successivement :

$x+y+z = x'+y'+z$

$t+u+(x+y+z) = t'+u'+(x+y+z) = t'+u'+(x'+y'+z)$

D'où $(x+y+t)+u+z = (x'+y'+t')+u'+z$

$((x+y+t), u) \equiv ((x'+y'+t'), u')$

et enfin $(x,y)+(t,u) \equiv (x',y')+(t',u')$ qui exprime l'assertion.

Lemme 6 : La relation R est compatible avec la loi externe de P^2.

Soit $(x,y) \equiv (x',y')$. On a : $x+y+z = x'+y'+z$

$$u(x+y+z) = u(x'+y'+z)$$

$ux+uy+uz = ux'+uy'+uz$, $(ux,uy) \equiv (ux',uy')$

ou enfin : $u(x,y) \equiv u(x',y')$.

Remarque 15 : On en tire aussi pour tout $t \in P$:

$$ux+uy+t = ux'+uy'+t.$$

Lemme 7 : La relation R est compatible avec la multiplication de P^2.

Soit $(x',y') \equiv (x,y)$ et $(t', u') \equiv (t,u)$

$(x',y').(t,u) = (x't+x'u+y't,y'u)$

$(x',y').(t',u') = (x't'+x'u'+y't',y'u')$

$(x,y).(t,u) = (xt+xu+yt,yu)$.

En application de la remarque 15 appliquée deux fois :

$xt+xu+yt+yu+z = x't+x'u+y't+y'u+z$

le second membre étant encore égal pour la même raison à :

$= x't'+x'u'+y't'+y'u'+z$, ce qui exprime que :

$$(x,y).(t,u) \equiv (x',y').(t',u')$$

Lois de composition dans P^2/R : On peut donc établir dans l'ensemble quotient P^2/R les lois de composition suivantes, indépendantes des représentants choisis :

$\overline{(x,y)}+\overline{(t,u)} = \overline{(x,y)+(t,u)} = \overline{(x+y+t,u)}$

$\overline{(x,y)}.\overline{(t,u)} = \overline{(x,y).(t,u)} = \overline{(xt+xu+yt,yu)}$

Remarquons que l'addition devient commutative dans l'ensemble quotient alors qu'elle ne l'était pas dans P : en effet, $\overline{(t,u)} = \overline{(u,t)}$ puisque $t+u+z = u+t+z$

Propriétés des opérations de P^2/R :

1) L'addition est commutative (voir ci-dessus)

2) Elle est associative :

$(\overline{(x,y)}+\overline{(t,u)})+\overline{(v,w)} = \overline{(x+y+t,u)}+\overline{(v,w)}$

$= \overline{(x+y+t+u+v,w)} = \overline{(x,y)}+\overline{(t+u+v,w)} = \overline{(x,y)}+(\overline{(t,u)}+\overline{(v,w)})$

3) Elle possède un élément neutre : ce sera la diagonale de P^2, qui forme une classe d'équivalence :

$\overline{(x,x)}+\overline{(t,u)} = \overline{(x+x+t,u)} = \overline{(t,u)}$

4) Tout élément est son propre inverse :

$\overline{(x,y)}+\overline{(x,y)} = \overline{(x+y+x,y)} = \overline{(y,y)}$

5) La multiplication est idempotente :

$\overline{(x,y)}.\overline{(x,y)} = \overline{(xx+xy+yx,yy)} = \overline{(x,y)}$

6) Elle est commutative : cela résulte de la commutativité de celle de P.

7) Elle est associative : cela résulte de l'associativité de celle de P^2, démontrée ci-après :

$(x,y)\,[(t,u).(v,w)] = (x,y)(tv+tw+uv,uw)$

$= (xtv+xtw+xuv+xuw+tyv+tyw+yuv,yuw)$

D'autre part : $[(x,y).(t,u)]\,(v,w) = (xt+xu+yt,yu)(v,w)$

$= (xtv+xtw+xuv+xuw+ytv+ytw+yuv,yuw)$

8) Elle est distributive (donc doublement) par rapport à l'addition. Cela résulte de la même propriété pour P^2 :

$(x,y)((t,u)+(v,w)) = (x,y).(t+u+v,w) = (xt+xu+xv+xw+yt+yu+yv,yw)$ et

$(x,y)(t,u)+(x,y)(v,w) = (xt+xu+yt,xy)+(xv+xw+yb,yw)$

d'où l'égalité se vérifie immédiatement.

- Il en résulte de ces propriétés que :

<u>Proposition 26</u> : P^2/R muni des opérations ci-dessus est un anneau idempotent (anneau booléien non généralement unitaire).

<u>Proposition 27</u> : P^2/R est un groupe opérant dans P, transitivement et fidèlement. P est donc un espace affine sur P^2/R, et P et P^2/R se correspondent bijectivement.

1) Définissons dans P la loi externe suivante, notée +, avec P^2/R comme domaine d'opérateurs.

$\overline{(t,u)}+x = t+u+x$ (le signe + du second membre désignant évidemment la double addition de P).

Cette définition est indépendante du représentant choisi.

2) P^2/R opère transitivement, ou : l'application

$f_x : \overline{(t,u)} \longrightarrow \overline{(t,u)}+x$ est surjective.

Or, $\forall x, \forall y, \ \exists \overline{(t,u)} \in P^2/R, \ \overline{(t,u)}+x = y$ (il suffit de prendre en effet $\overline{(t,u)} = \overline{(x,y)}$)

3) P^2/R opère fidèlement, ou : l'application f_x est injective.

Or, si $\overline{(t,u)}+x = \overline{(t',u')}+x$, on a bien $t+u+x = t'+u'+x$,

$(t,u) \equiv (t'u')$ ou enfin $\overline{(t,u)} = \overline{(t',u')}$

4) L'application f_x de P^2/R dans P est donc bijective.

Immersion de P dans un anneau booléien :

Considérons $A = P \cup P^2/R$. On notera les éléments de A : $x, y, z, \ldots$ s'ils appartiennent à P, et $X, Y, Z, \ldots$ s'ils appartiennent à P^2/R. On posera dans A les opérations suivantes :

1) Addition : a) $X+Y$ dans A sera la somme $X+Y$ dans P^2/R

b) $x+X = X+x = t+u+x$ si $X = \overline{(t,u)}$

c) $x+y = \overline{(x,y)}$

2) Multiplication :

d) $X.Y$ dans A sera le produit $X.Y$ dans P^2/R

e) $x.Y = Y.x = \overline{(xv,\ xw)}$ si $Y = \overline{(v,w)}$

f) $x.y$ dans A sera le produit xy dans P.

Montrons que A muni de ces opérations est un anneau booléien.

Propriétés des opérations de $A = P \cup P^2/R$:

Dans tout ce qui suit, $X = \overline{(t,u)}$ et $Y = \overline{(v,w)}$

1) L'addition est commutative :

Cela est évident pour les cas a) et b) de définition. Pour le cas c) il suffit de constater que $\overline{(x,y)} = \overline{(y,x)}$

2) Elle est associative :

a) par définition pour trois éléments de P^2/R.

b) si les trois éléments proviennent à la fois de P et de P^2/R :

Les deux cas ci-après se vérifient immédiatement :

$(x+X)+Y = x+(X+Y)$

$(x+y)+X = x+(y+X)$

Les quatre autres suivants s'y ramènent

$(x+X)+y = x+(X+y)$

$(X+x)+Y = X+(x+Y)$

$(X+x)+y = X+(x+y)$

$(X+Y)+x = X+(Y+x)$

c) $(x+y)+z = \overline{(x,y)}+z = x+y+z = x+\overline{(y,z)} = x+(y+z)$

3) L'élément neutre est la classe $\overline{(x,x)} = o$

$\forall X,\ O+X = X$ (Propriété 3 des opérations de P^2/R)

$\forall y,\ O+y = x+x+y = y.$

4) Tout élément est son propre inverse.

$x+x = \overline{(x,x)} = 0$

$X+X = \overline{(t,u)}+\overline{(t,u)} = \overline{(t+u+t,\ u)} = \overline{(u,u)} = 0$

5) La multiplication est commutative par définition.

6) Elle est associative :

a) Par définition si les éléments proviennent uniquement soit de P, soit de P^2/R.

b) S'ils proviennent à la fois des deux ensembles :

$\left.\begin{array}{l} x(yX) = (xy)X \\ x(XY) = (xX)Y \end{array}\right\}$ se vérifient immédiatement.

Les quatre autres cas suivants s'y ramènent :

$X(xY) = (Xx)Y$

$x(Xy) = (xX)y$

$X(Yx) = (XY)x$

$X(xy) = (Xx)y$

7) Elle est distributive (donc doublement) par rapport à l'addition :

a) $X(Y+Z) = XY+XZ$ est vérifié dans P^2/R.

b) $X(Y+z) = X(v+w+z) = \overline{(t(v+w+z),u(v+w+z))}$

$= \overline{(tv+tw+tz,\ uv+uw+uz)} = \overline{(tv+tw+uv,uw)}+\overline{(tz,uz)}$

$= \overline{(t,u)}.\overline{(v,w)}+(t,u)z = XY+Xz$

c) $X(y+z) = X\overline{(y,z)} = \overline{(t,u)}.\overline{(y,z)} = \overline{(ty+tz+uy,uz)}$

$= \overline{(t,u)}.y+\overline{(t,u)}.z = Xy+Xz$

d) $z(X+Y) = z\overline{(t+u+v,w)} = \overline{(zt+zu+zv,zw)}$

$= \overline{(zt,zu)}+\overline{(zv,zw)} = zX+zY$

e) $z(X+y) = z(t+u+y) = zt+zu+zy = \overline{(zt,zu)}+zy = zX+zy$

f) $z(x+y) = z\overline{(x,y)} = \overline{(zx,zy)} = zx+zy$

8) Elle est idempotente, l'étant dans P et P^2/R.

9) Il en résulte que A est un anneau idempotent (non généralement unitaire: voir remarque 17).

Proposition 28 : Tout préanneau P peut être plongé comme ultrafiltre dans un anneau booléien A. De plus, si P n'a pas de plus petit élément et s'il existe un anneau booléien A' et un homomorphisme injectif de préanneaux h de P dans A', on peut trouver un homomorphisme injectif d'anneaux g de A dans A', tel que $h = g \circ i$, i étant l'injection canonique de P dans A. (A sera donc à un isomorphisme près le plus petit anneau booléien contenant P (voir le schéma).

$$\begin{tikzcd} P \arrow[dd, "h"'] \arrow[dr, "i"] & \\ & A \arrow[dl, "g"] \\ A' & \end{tikzcd}$$

Démonstration : Considérons $A = P \cup P^2/R$

1) $P \cap P^2/R = \emptyset$: par construction, P et P^2/R sont complémentaires.

2) P est un filtre :

a) stable pour la multiplication par définition

b) stable pour la disjonction par un élément de A :

$x \vee y = x+y+xy \in P$

$x \vee Y = x+Y+xY = x+v+w+xv+xw \in P.$

3) Son complément est un idéal :

a) stable pour la disjonction : $X \vee Y = X+Y+XY \in P^2/R$

b) stable pour la multiplication par un élément de A :

$X.Y \in P^2/R$

$X.x = x\overline{(t,u)} = \overline{(xt,xu)} \in P^2/R$

4) La proposition 20 entraîne la première partie de l'assertion.

5) L'injection canonique de P dans A est ici l'application identique.

Soit $i(x) = y$. Définissons g par :

$$\begin{cases} g(y) = h(x) \text{ sur } P \\ g(X) = g(\overline{(t,u)}) = h(t)+h(u) \text{ sur } P^2/R \text{ (voir a) ci-après)} \end{cases}$$

en notant + l'addition de l'anneau A :

a) g est injectif : * sur P puisque h est injectif

* sur P^2/R : si $g(X) = g(Y)$, ou $g(\overline{(t,u)}) = g(\overline{(v$

$h(t)+h(u) = h(v)+h(w)$. Pour tout z de P, $h(t)+h(u)+h(z)$

$= h(v)+h(w)+h(z)$ ou : $h(t+u+z) = h(v+w+z)$.

h étant injectif, $t+u+z = v+w+z$ ou $\overline{(t,u)} = \overline{(v,w)}$

et $X = Y$. En remontant les calculs, on vérifie aussi que la définition de g est bien fonctionnelle sur P^2/R.

* Supposons enfin qu'il existe un y et un X

de A tels que $g(y) = g(X)$ ou $h(x) = h(t)+h(u)$

ou enfin $h(x)+h(t)+h(u) = o = h(x+t+u)$. On sait que $h^{-1}(o)$ est un idéal (prop. 10 appliquée à P et h(P) et proposition 13). Puisque h est injectif, $h^{-1}(o)$ possède un seul élément z. La condition 2 de la définition 4 entraîne que z est le plus petit élément de P, ce qui est contraire aux hypothèses.

b) g est un homomorphisme d'anneaux booléiens.

$g(x+y) = g(\overline{(x,y)}) = h(x)+h(y) = g(x)+g(y)$

$g(x+X) = g(x+t+u) = h(x+t+u) = h(x)+h(t)+h(u) = g(x)+g(X)$

$g(X+Y) = g(\overline{(t+u+v,w)}) = h(t+u+v)+h(w) = h(t)+h(u)+h(v)+h(w)$

$= g(X)+g(Y)$

$g(xy) = h(xy) = h(x).h(y) = g(x)g(x)$

$g(xX) = g(x\overline{(t,u)}) = g(\overline{(xt,xu)}) = h(xt)+h(xu) = h(x)\ (h(t)+h(u))$

$= h(x).h(X)$

$g(XY) = g(\overline{(tv+tw+uv,uw)}) = h(tv+tw+uv)+h(uw)$

$= h(t)h(v)+h(t)h(w)+h(u)h(v)+h(u)h(w)$

$= (h(t)+h(u))(h(v)+h(w)) = g(X)g(Y)$

Remarque 16 : Si P possède un plus petit élément, P et P^2/R sont isomorphes. Soit en effet $\overline{(t,u)} \in P^2/R$ et considérons $x = o+t+u = o+o+x$. On a donc $\overline{(o,x)} = \overline{(t,u)}$.

L'application $f : \overline{(t,u)} \longrightarrow x$ est une bijection de P^2/R sur P.

a) f injective : $f\overline{(t,u)}) = f(\overline{(v,w)}) \Longleftrightarrow o+t+u = o+v+w$

$\Longleftrightarrow \overline{(t,u)} = \overline{(v,w)}$

b) surjective : Soit $x \in P$ $\quad x = f(\overline{(o,x)})$

De plus, f est un isomorphisme d'anneaux :

$f(X+Y) = f(\overline{(t+u+v,w)}) = o+t+u+v+w$

$= o+(o+t+u)+(o+v+w) = f(X)++f(Y)$

$f(X.Y) = f(\overline{(tv+tw+uv,uw)}) = o+tv+tw+uv+uw$

$= (o+t+u).(o+v+w) = f(X).f(Y)$

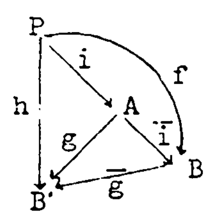
Si dans la démonstration de la proposition 28 on prend A' = A, et pour h l'application f^{-1}, g n'est plus injective. En effet, sur P, g = h = f sur P^2/R, $g(X) = f^{-1}(t)+f^{-1}(u) = \overline{(o,t)}+\overline{(o,u)} = \overline{(t,u)} = X = \overline{(o,x)}$

$= f^{-1}(x) = g(x)$ avec $x \in P$ et $x = f(X)$

En termes intuitifs, si l'immersion de P dans A reste valable, A n'est pas le plus petit anneau qui contienne P, puisque celui-ci est muni d'une structure naturelle d'anneau.

Remarque 17 : Si P n'a pas de plus grand élément, $A = P \cup P^2/R$ n'est pas unitaire : P est en effet un ultrafiltre de A et il est immédiat que l'unité de A serait le plus grand élément de P. L'immersion d'un anneau non unitaire A dans un anneau unitaire B dont A est à un isomorphisme près un idéal maximal est bien connue. Compte tenu de ce résultat, et de la proposition 28, on démontre immédiatement que :

Un préanneau P sans plus petit ni plus grand élément peut être plongé dans un anneau booléien unitaire B, P étant à un isomorphisme près ultrafiltre d'un idéal maximal de B. Pour tout anneau booléien B' unitaire tel qu'il existe un homomorphisme injectif h de préanneaux de P dans B', on peut trouver un homomorphisme injectif $\overline{g}$ d'anneau booléien de B dans B', tel que $h = \overline{g} \circ f$, f étant l'injection canonique de P dans B (il suffit de considérer le schéma qui est une extension de celui de la proposition 28).



§ 5 APPLICATIONS

Indiquons brièvement quelques applications de la notion de treillis convexe.

Application 1 : Résolution de l'équation $ax = b$ dans un anneau booléien, et application à la topologie :

Résolution de l'équation $ax = b$ (anneau non généralement unitaire ; la résolution dans un anneau unitaire est faite dans Birkhoff [1], chapitre 10, § 9)

Soit A un anneau booléien, $a, b \in A$ avec $b \leq a$. L'ensemble des racines de l'équation $ax = b$ est le treillis convexe $T = b+a \vee A+a = b+\dot{I}$, où $\dot{I}$ est l'idéal associé au filtre $a \vee A$.

1) $x \in T \quad x = a+b+a \vee y \quad ax = aa+ab+a(a \vee y) = a+b+a$

$$= b$$

2) $ax = b \Longleftrightarrow a \vee x + x + a = b \Longleftrightarrow x = a+b+x \vee a \in T$

Conséquences :

Soit alors F un filtre, et x fixé, y variable, x et $y \in A$. Cherchons l'ensemble T_F des y tels que :

$\exists z \in F,\ xz = yz$

Soit b la valeur commune des produits. En application de ce qui précède, x et y sont éléments de $T_z = b+z+z \vee A = b+\dot{I}_z$. Puisque $b \in T_z$, et $x \in T_z$, $T_z = x+z+z \vee A$ (proposition 18).

T_z est donc l'ensemble des y qui correspondent à un z donné. $T_F = \bigcup_{z \in F} T_z$ est l'ensemble cherché. $T_F \bigcup_{z \in F} (x+z+z \vee A) = x+ \bigcup_{z \in F} (z+z \vee A)$

Or $\bigcup_{z \in F} (z+z \vee A) = F+F$: a) $\bigcup_{z \in F} (z+z \vee A) \subset F+F$: trivial

b) Soit $z_1 \dot{+} z_2 \in F \dot{+} F$ $z_1 \dot{+} z_2 = z_1 z_2 + z_1 \vee z_2$

$$= z_1 z_2 + (z_1 z_2) \vee (z_1 \vee z_2) \in \bigcup_{z \in F} z + z \vee A$$

Soit donc J l'idéal associé à F : $T_F = x+F\dot{+}F = x+J$.

<u>Application à la topologie</u> :

Soit $A = P(X)$ où X est un espace topologique. Si F est un filtre sur X au sens topologique F est un filtre de l'anneau booléien P(X). Soit $M \in P(X)$. On appelle germe de M suivant F l'ensemble des $N \in P(X)$ tels qu'il existe $V \in F$, $M \cap V = N \cap V$. (Bourbaki, Topologie générale, chapitre I, § 6, n° 9). Le germe de M suivant F, en application de ce qui précède, sera le treillis convexe de P(X), $T = M+F\dot{+}F = M\dot{+}J$, où J est l'idéal de P(X) associé à F. L'ensemble des germes de parties de X suivant F n'est autre que l'anneau quotient $P(X)/\dot{J}$ (Proposition 11, remarque 11, propos. 18)

<u>Application 2</u> : <u>Racines du polynôme booléien le plus général dans un anneau</u> :

Dans un anneau A non unitaire le polynôme le plus général est $ax+\delta x+b$ où $\delta \in Z/(2)$ et $\delta.x$ représente la loi externe de l'espace vectoriel A(Proposition 6. 3, remarque finale). Le cas où $\delta = o$ a été traité (Application 1). Si $\delta = 1$, l'ensemble des racines est le treillis convexe $T = b+aA$. Une condition nécessaire pour que $ax+x+b = o$, c'est-à-dire que $a \vee x+x+a+x+b = o$, ou $a \vee x = a+b$, est que $a+b \geq a$ donc $a(a+b) = a$ ou $ab = o$. Si $x \in T$, $x = b+ay$, $ax+x = ab+ay+b+ay = b$. Réciproquement, si $ax+x = b$, $x = b+ax \in T = b+aA$.

<u>Application 3</u> : <u>Annulateur d'un idéal dans un anneau booléien et ensemble de ses majorants - Idéaux supplémentaires - Idéaux denses</u> : (Conformément aux conventions générales, on rappelle que l'anneau n'est pas nécessairement unitaire).

Soit un anneau booléien A.

Lemme 8 : Soit un treillis convexe T d'idéal associé $\dot{I}$ et $a \in A$, a quelconque. L'application $f : T \longrightarrow a+T$ est un isomorphisme d'ensembles ordonnés si et seulement si $a \in Ann(\dot{I})$, $Ann(\dot{I})$ désignant l'annulateur de $\dot{I}$.

1) f est bijectif

2) Soit $t \in T$, $t_1 \in T$, $t \leqslant t_1$ ou $tt_1 = t$.

$a+t \leqslant a+t_1 \iff (a+t)(a+t_1) = (a+t) \iff a+a(t+t_1)+tt_1 = a+t$

$\iff a(t+t_1) = o$

Comme $t+t_1 \in I$, la condition est suffisante.

Elle est nécessaire. Soit $i \in I$, i quelconque, et $t_2 \in T$ quelconque. Si $t_3 = i+t_2 \in T$, $i = t_2+t_3 = t_2t_3+t_2 \vee t_3 = t+t_1$ avec $t \leqslant t_1$ et $t \in T$ $t_1 \in T$. Les équivalences ci-dessus entraînent que si f est isomorphisme d'ensembles ordonnés, $a.i = o$.

Lemme 9 : La condition du lemme 8 équivaut à : $\forall t_1 \in T$, $\forall t_2 \in T$, $at_1 \leqslant t_2$

1) Soit t_1 et $t_2 \in T$, $i \in \dot{I}$, tels que $t_2 = i+t_1$. Si $ai = o$, $at_1i = o$, $at_1t_2 = at_1$ donc $at_1 \leqslant t_2$. La nouvelle condition est donc nécessaire

2) Elle est suffisante. Soit $i \in \dot{I}$. $\forall i \in I$, $\exists t_1 \in T$, $t_1 \geqslant i$ (par exemple si $t \in T$, $t_1 = i \vee t \in T$ et $t_1 \geqslant i$. ($t_1 = i \vee t = i+t+it \in t+\dot{I}+\dot{I} = T$)).

Soit $t_2 = i+t_1$. $at_1t_2 = at_1 \Rightarrow at_1\, i = o \Rightarrow ai = o$.

Conséquence : Si $T = a+\dot{I}$, $a = \inf(T)$ équivaut à : $a \in Ann(\dot{I})$, compte tenu du lemme 8.

Lemme 10 : L'application $f : T \longrightarrow a+T$ est un anti-isomorphisme d'ensembles ordonnés si et seulement si a majore $\dot{I}$, idéal associé à T.

1) f est bijectif

2) Soit t, $t_1 \in T$, $t \leqslant t_1$, ou $tt_1 = t$.

$$a+t_1 \leqslant a+t \Longleftrightarrow (a+t_1)(a+t) = a+t_1 \Longleftrightarrow a+a(t+t_1)+tt_1 = a+t_1$$

$$\Longleftrightarrow a(t+t_1) = t+t_1 \Longleftrightarrow t+t_1 \leqslant a$$

Comme $t+t_1 \in I$, la condition est suffisante. En partant de i quelconque et en prenant comme ci-dessus $i = t_2+t_3 = t_2t_3+t_2 \vee t_3 = t+t_1$, les équivalences écrites entraînent qu'elle est nécessaire.

<u>Lemme 11</u> : La condition du lemme 10 équivaut à :

$$\forall t_1 \in T, \forall t_2 \in T, a \vee t_1 \geqslant t_2 \quad (\text{ou } (a \vee t_1)t_2 = t_2)$$

1) La nouvelle condition est nécessaire. Si $\forall i$, $ai = i$: Soit $t_1 \in T$, et $t_2 \in T$. $t_1+t_2 = i \in \dot{I}$. $a(t_1+t_2) = t_1+t_2$

$at_1+at_2+t_1 = t_2$ $\quad at_1t_2+at_2+t_1t_2 = t_2$ ou : $(a \vee t_1)t_2 = t_2$

2) Elle est suffisante. Prenons comme au lemme 9, $i \in I$ et $t_1 \geqslant i$, ou $it_1 = i$. Soit $t_2 = i+t_1$. Si $(a \vee t_2)t_1 = t_1$, on déduit : $(a+t_2+at_2)t_1 = t_1$, $(a+i+t_1+ai+at_1)t_1 = t_1$ d'où $it_1 = ait_1$ et $i = ai$.

<u>Conséquence</u> : Si $T = a+\dot{I}$, $a = \sup(T)$ équivaut à : a majore $\dot{I}$.

<u>Proposition A</u> : Dans un anneau booléien, l'ensemble des majorants d'un idéal $\dot{I}$ est un filtre, translation par un majorant quelconque de I de l'annulateur I' de $\dot{I}$:

1) Si q majore I, q+I' majore I :

$$(q+i').i = qi+ii' = qi = i$$

2) Si q' majore I, soit q un majorant quelconque :

$\forall i$, $q'i = qi = i$. $\forall i$, $(q+q')i = o$. Donc $q+q' \in I'$

Soit $i' = q+q'$ $\quad q' = q+i' \in q+I'$

Proposition B : Pour qu'un idéal I d'un anneau booléien admette un idéal supplémentaire I', il faut et il suffit que tous les treillis convexes d'idéal associé $\dot{I}$ soient inf-principaux.

1) On dira que I et I' sont supplémentaires si $I \cap I' = \{o\}$ et si $A = I+I'$ (I et I' sont d'ailleurs sous-espaces vectoriels supplémentaires : prop. 6,3)

2) Soit J idéal supplémentaire de $\dot{I}$. Alors $J = I'$ où $I' = \mathrm{Ann}(I)$

a) Soit $i \in I$, $j \in J$ $ij \in I \cap J = \{o\}$ donc $j \in I'$ et $J \subset I'$

b) Soit $x \in I'$. **Pour tout $x \in A$,** $x = j+i$ avec $j \in J$, $i \in I$

Donc $ix = ij+i = o+i = o$. D'où $i = o$ et $x = j$, donc $I' \subset J$.

3) Soit $x \in A$. $x = i+i'$ avec $i \in I$, $i' \in I'$. Le treillis convexe d'idéal associé I qui contient x est $T = i'+\dot{I}$. Comme $i' \in \mathrm{Ann}(I)$ $i' = \inf(T)$ (Conséquence, Lemme 9). Réciproquement, si pour tout $T = a+\dot{I}$, T est inf. principal. Soit $i' = \inf(T)$. D'après la conséquence du lemme 9, $i' \in \mathrm{Ann}(\dot{I})$. Donc tout T d'idéal associé I s'écrit $T = i'+I$ avec $i' \in I' = \mathrm{Ann}(\dot{I})$. Soit $x \in A$ quelconque et T_x sa classe d'équivalence modulo $\dot{I}$: $x = i'+i \in i'+\dot{I} = T_x$. Comme $I \cap I' = \{o\}$, I et I' sont supplémentaires.

Proposition C : Dans un anneau unitaire, seuls les idéaux principaux ont des supplémentaires. En effet, le filtre $F = 1+\dot{I}$ doit être inf-principal, et $i' = \inf(F) \in I'$ avec $I' = \mathrm{Ann}(\dot{I})$. D'après le Lemme 8, $I \to i^{+}I$ est un isomorphisme d'ensembles ordonnés. F ayant un plus grand élément 1, $\dot{I}$ est donc principal.

Proposition D :

Définition : On dit qu'un idéal I d'un anneau booléien est dense si $\mathrm{Ann}(I) = \{o\}$ (Halmos, [5] , p. 84)

Cela revient à dire, dans un anneau unitaire,

a) que I n'a pas d'autre majorant que l'unité, ou encore

b) qu'aucun des treillis convexes associés à I n'a d'autre majorant que l'unité.

a) est conséquence de la proposition A.

b) La définition a) est évidemment entraînée par b) puisque I est associé à lui-même. Réciproquement, si P, treillis convexe associé à I, possède un majorant $p \neq 1$, p majore I. Soit en effet $a \in P$, $i \in I$. $P = a+I$. Puisque p majore P, donc majore, pour tout i, a+i, on a $p(a+i) = a+i = pa+pi = a+pi$ (car $pa = a$).
D'où $pi = i$ et $i \leq p$.

Proposition

Soit I un idéal dense d'un anneau booléien unitaire A. Tout élément de l'anneau est la borne supérieure des éléments de I qu'il majore.

Démonst. Soit en effet, $p \in A$, I_p l'idéal principal engendré par p et $J_p = I \cap I_p$ l'idéal, ensemble des éléments de I majorés par p. Montrons que, p étant un majorant de J_p, tout autre majorant p_1 est plus grand que p. Soit $q = pp_1$: q majore J_p et $q \leq p$. Soit $q' = p+q$ et $p' = p+1$.

a) Comme q majore J_p, et que $\forall i \in I$, $ip \in J_p$. $ip = ipq = iq$.

b) $pq' = p+pq = p+q = q'$, donc $q' \leq p$.

De b), on tire :

c) $p'q' \leq p'p = o$, donc $p'q' = o$

d) Si $i \in I$, $i = ip'+ip$

e) $qq' = pq+q = q+q = o$

f) Donc $\forall i \in I$, $q'i = q'ip' + q'ip$

$$= q'ip' + q'iq = o$$

et $q' \in \mathrm{Ann}(I)$.

Or, l'annulateur de I se réduit à $\{o\}$. Donc $q' = o$, $q = p - pp_1$,

donc $p \leqslant p_1$, d'où l'assertion.

<u>Exemple</u> : L'idéal des parties finies dans l'anneau $P(X)$ de l'ensemble des parties de X.

CHAPITRE II - LES TREILLIS DISTRIBUTIFS RELATIVEMENT COMPLEMENTES COMME PREANNEAUX

Il est classique qu'un anneau booléien unitaire est un treillis distributif complémenté. Nous avons montré au chapitre I, Proposition 2, qu'un préanneau est un treillis distributif relativement complémenté (en abrégé t.d.r.c.). Nous allons montrer que réciproquement, tout t.d.r.c. peut être muni d'une structure naturelle de préanneau. Il y aura donc identité entre les deux structures, chacune d'elles généralisant, respectivement en langage de structures d'ordre et en langage algèbrique, la notion d'anneau booléien.

Soit donc T un t.d.r.c, dans lequel on note $ab = \inf(a,b)$ et $a \vee b = \sup(a,b)$, et trois éléments $a, b, c \in T$. Soit $u = a \vee b \vee c$ et $z = a.b.c.$ dont l'existence est assurée, et a', b', c', les trois compléments uniques de a, b, c relativement à u et z.

Avec ces notations :

Proposition 29 : Dans un treillis distributif relativement complémenté T, la loi de composition ternaire, application de T^3 dans T, définie par : $(a,b,c) \longrightarrow a+b+c = (ab'c')\vee(bc'a')\vee(cb'a')\vee(abc)$ et la loi de composition binaire $(a,b) \longrightarrow ab = \inf(a,b)$ font de T un préanneau, où ces lois sont respectivement la double addition et la multiplication.

1) La multiplication est commutative, idempotente, associative, puisque c'est l'opération "inf".

2) Elle est distributive (donc doublement) par rapport à la double addition :

Soit $du = d(a \vee b \vee c) = (da)\vee(db)\vee(dc) = u'$

$$dz = d(abc) = da.db.dc = z'$$

Comme $da'.da = d.aa' = dz = z'$

$$(da')v(da) = d(a \text{ v } a') = du = u',$$

on peut conclure que da' est le complément $(da)'$ de $d.a$ relativement à u' et z' : $u' = (da)v(db)v(dc)$

$$z' = da.db.dc.$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } d(a+b+c) &= d\left[(ab'c')v(bc'a')v(ca'b')v(abc)\right] \\ &= (da.db'.dc')v(db.dc'.da')v(dc.da'.db')v(da.db.dc) \\ &= (da.(db)'.(dc)')v(db.(dc)'.(da)')v(dc.(da)'(db)') \\ &\quad v(da.db.dc) \\ &= da+db+dc. \end{aligned}$$

3) La double addition est commutative, en raison de la commutativité des opérations .et v, et de la symétrie de l'expression $a+b+c$.

4) La double addition est associative : $(a+b+c)+d+e =$

$$a+b+(c+d+e)$$

A) Montrons d'abord que, a'', b'', c'' étant les compléments de a,b,c par rapport à deux éléments quelconques u et z, a',b',c' étant les compléments de a,b,c par rapport à $u \text{ v } x$ et $z.x$, x étant quelconque, on a :

(1) $(abc)v(a''b''c)v(ab''c'')v(a''bc'') = abc \text{ v}(a'b'c)v(ab'c')v(a'bc')$

Dans tout ce qui suit, faisons la convention que le signe v domine le signe . , donc que $abc \text{ v } ab'c'$, par exemple, désigne $(abc)v(ab'c')$. Désignons par x' le complément de x relativement à $u \text{ v } x$ et $z.x$. On vérifie aisément que :

$a = abc\,x \text{ v } abc'\,x \text{ v } ab'c\,x \text{ v } ab'c'\,x \text{ v } abc\,x' \text{v } abc'x' \text{v } ab'c\,x'$
$\text{v } ab'c'x'$ et que

a" = abcx v abcx' v a'bcx v a'bc'x v a'b'c x v a'b'c' x v

a'bcx' v a'bc'x' v a'b'c x' v a'b'c' x'

On obtiendra b" en échangeant les rôles de a et b dans a"

b" = abcx v abcx' v ab'cx v ab'c'xv a'b'c x va'b'c'xv

ab'cx' v ab'c'x'v a'b'cx'v a'b'c'x'

Formons ca"b' et d'abord ca". Cela équivaut à faire disparaître dans a" les termes en c' dont le produit par c va donner zx≤abcx. De même, dans le produit de b" par ac", resteront seuls les termes communs aux deux facteurs, le produit des autres étant aussi zx.

D'où c a"b" = abcx v abcx'v a'b'cx v a'b'cx' = abc v a'b'c,

et le premier membre de (1) s'écrira abc v a'b'c v ab'c' v a'bc'

qui est l'expression à démontrer du second membre.

B) Soit alors à calculer s = a+b+c. Dans l'expression de la double somme, en itérant le résultat de A, a',b',c', pourront désigner les compléments de a,b,c relativement à

a v b v c v d v e et abcde.

C) Calculons alors (a+b+c)+d+e = s+d+e.

a'b'c' ayant les significations indiquées en B) et s',d' et e' étant les compléments de s, d et e relativement à a v b v c v d v e et abcde. Nous devrions, dans l'expression de s+d+e, considérer les compléments de s, d, e relativement à s v d v e et sde. Or, s" étant le complément de s relativement à a v b v c et abc, nous pouvons, d'après A, considérer les compléments relativement à s v d v e v s" et s.d.e.s", c'est-à-dire relativement à a v b v c v d v e et abcde.

Puisque s = abc v ab'c'v a'bc'v a'b'c, on montre aisément que s' = abcde v a'bb'v a'bc v ab'c v abc'. D'où :

s+d+e = sde v s'd'e v s'de'v sd'e'

= abcde v ab'c'de v a'bc'de v a'b'cde

v abcd'e' v ab'c'd'e' v a'bc'd'e'v a'b'cd'e'

v a'b'c'd'e v a'bc d'e v ab'cd'e v abc'd'e

va'b'c'de' v a'bcde' v ab'cde' v abc'de'

Expression invariante si l'on échange a et e, b et d. Donc :

(a+b+c)+d+e = (e+d+c)+b+a = a+b+(c+d+e)

5) Dans la double addition, tout couple d'éléments et régulier à gauche : x+y+z = x+y+t ⟹ z = t

Lemme : x+y+y = x

En effet, xyy v xy'y'v x'yy'vx'y'y =

= xyy v xy'y' = x(y v y') = x

D'où x+y+z = x+y+t ⟹ z = x+y+x+y+z

= x+y+x+y+t = t (en application de 4 et du lemme)

Remarque 18 : Les filtres , idéaux et treillis convexe d'ensembles ordonnés se définissent formellement comme nous l'avons fait pour les préanneaux, la multiplication devenant l'opération inf. et la disjonction l'opération sup. Si nous démontrons que dans un t.d.r.c, la disjonction pour la structure naturelle de préanneau se confond avec l'opération sup., les idéaux, filtres et treillis convexes pour la structure de t.d.r.c. seront les mêmes que pour la structure de préanneau. D'où la validité pour les t.d.r.c. des théorèmes relatifs aux filtres, idéaux et treillis convexes des préanneaux.

Or, la disjonction de a et b au sens du préanneau est :

$a+b+ab = a.b.ab \vee a'.b'ab \vee a\, b'(ab)' \vee a'b(ab)'$

Comme $(ab)' = a' \vee b'$, ce qu'on vérifie immédiatement,

$a+b+ab = ab \vee (ab'(a' \vee b')) \vee (a'b(a' \vee b')) = ab \vee ab' \vee a'b$

$= a \vee a'b = (a \vee a').(a \vee b) = a \vee b$, D'où :

Proposition 30 : Un treillis distributif T relativement complémenté peut être plongé comme ultrafiltre dans un treillis distributif A relativement complémenté possédant un plus petit élément, et comme ultrafiltre d'un idéal maximal dans un treillis distributif complémenté B. Si de plus, T n'a pas de plus petit ni de plus grand élément, A et B sont les plus petites structures de leur espèce contenant T.

Proposition 31 : On peut faire une partition d'un treillis distributif relativement complémenté par une famille de sous-treillis convexes équipotents à tout sous-treillis convexe donné d'avance.

Proposition 32 : Tout treillis distributif relativement complémenté est isomorphe à un sous-préanneau (donc à un sous-treillis) de l'anneau P(X) de l'ensemble des parties de l'ensemble X de ses ultrafiltres.

Remarque 19 : Toutes ces propositions résultent immédiatement des propositions correspondantes pour les préanneaux et de la remarque 18.

Elles donnent des exemples des problemes touchant les t.d.r.c. qui peuvent être traités en langage algèbrique.

Parmi les problèmes voisins, traités en langage de structure d'ordre, il convient de citer :

- G. Grätzer [3] pour l'extension du théorème de représentation de Stone aux treillis distributifs pseudo-complémentés (avec plus petit et plus grand élément)

- G. Birkhoff [1] chap. 2, § 6, théorème 3, pour les relations d'équivalence compatibles avec les opérations sup et inf dans les t.d.r.c. avec plus petit élément et chap. 9, § 5, théorème 6, pour le théorème de représentation dans les treillis distributifs avec plus petit élément.
- G. Grätzer et T. Schmidt [4] et Iq balunnisa [6] pour les relations d'équivalence compatibles avec les opérations sup et inf dans les treillis.

Le théorème chap. 2, § 6, théorème 3 de Birkhoff [1] établit qu'une telle relation dans un t.d.r.c. est déterminée par le seul idéal des éléments congrus à zéro. La proposition 31 bis suivante, parente de la proposition 31, généralise ce théorème au cas où il n'y a pas nécessairement de plus petit élément, ni même d'idéal parmi les classes d'équivalence (voir exemple, remarque 11).

<u>Proposition 31 bis</u> : Dans un treillis distributif T relativement complémenté, une relation d'équivalence R compatible avec les opérations sup et inf est déterminée par une seule, quelconque, des classes d'équivalence.

<u>Démonstration</u> : On transporte classiquement les opérations de T à l'ensemble quotient T/R qui est ainsi muni d'une structure de treillis distributif, et l'application canonique h de T sur T/R est un homomorphisme de treillis.

Soit alors $\bar{a}$, $\bar{x}$ et $\bar{b}$, éléments de T/R tels que $\bar{a}<\bar{x}<\bar{b}$ (a,x,b sont éléments de T, et représentants respectivement de $\bar{a},\bar{x},\bar{b}$). Il existe $c\in\bar{a}$, $y\in\bar{x}$ et $d\in\bar{b}$, tels que $c<y<d$ ($c=ab$, $y=(a \vee b).x \vee ab$ et $d=a \vee b$ satisfont à ces conditions). Il existe alors $z\in T$, tel que $yz = c$ et

$y \vee z = d$, c'est-à-dire que $\bar{x}\,\bar{z} = \bar{a}$ et $\bar{x} \vee \bar{z} = \bar{b}$ en transportant ces égalités par h dans T/R. L'existence du complément relatif de $\bar{x}$ est ainsi assurée et T/R est un t.d.r.c.

h est alors homomorphisme de t.d.r.c., donc de préanneaux. Soit C une classe d'équivalence de R, donnée à priori. C'est un treillis convexe et T/R n'est autre que le préanneau quotient T/C (proposition 10). Les autres classes d'équivalences de R sont donc uniquement déterminées, d'où l'assertion.

CHAPITRE III - ASPECTS TOPOLOGIQUES DE LA NOTION DE PREANNEAU

§ 1 - L'ALGEBRE DES OFS D'UN ESPACE TOPOLOGIQUE NON COMPACT - CAS PARTICULIER DES ESPACES LOCALEMENT BOOLEIENS :

Il est classique que l'ensemble des ofs (sous-ensembles à la fois ouverts et fermés) d'un espace topologique quelconque X est un anneau de Boole, sous-anneau de l'ensemble des parties de X, et dit algèbre des ofs. Nous étudions ci-après cette algèbre dans un espace non compact, en précisant le cas des espaces localement booléiens (voir définition 13) où tout point possède un voisinage compact. Notons que conformément à la terminologie de Bourbaki, les espaces compacts et localement compacts sont séparés. Rappelons ou démontrons quelques résultats élémentaires.

Remarque 20 : Soit X un espace topologique et A X un sous-espace de X. Par définition, la trace d'un of O de X sur A est un of de A. En particulier si $O \subset A$, O, of de X est un of de A.

Lemme 12 : Si de plus A est un of de X, tout of de A est un of de X, étant ouvert (resp. fermé) dans A qui est lui-même ouvert (resp. fermé) dans X.

Lemme 13 : Dans un espace topologique, l'ensemble $(C_k)_{k \in K}$ noté en abrégé C_K, des ofs compacts, est un idéal de l'algèbre des ofs.

1) C_K est stable pour la réunion finie.

2) Soit un of O_i de X minorant un of C_k compact, c'est-a-dire que $O_i \subset C_k$. La remarque 20 entraîne que O_i est un of de C_k, donc compact puisque fermé dans un ensemble compact. C_K contient donc les minorants de chacun de ses éléments.

Définition 12 : On appellera espace localement booléien un espace localement compact engendré par ses ofs (c'est-à-dire : où tout ouvert est une réunion quelconque d'ofs). Nous démontrerons au § 2 qu'il existe de tels espaces, non compacts.

Proposition 33 : Dans un espace topologique X non compact :

1) On peut faire une partition de l'ensemble des ofs non compacts en classes toutes equipotentes à l'idéal des ofs compacts (la connaissance d'une seule classe déterminant entièrement la topologie sur X lorsque de plus l'espace est localement booléien).

2) Chacune de ces classes constitute une base de filtre sur X.

3) Chaque classe est aussi un sous-préanneau (et un treillis convexe pour l'inclusion) de l'algèbre des ofs.

4) L'une d'entre elles est formee des complementaires des ofs compacts

5) On peut associer les autres classes deux a deux, chacune étant formée des ofs complementaires des ofs de la classe associée.

6) L'intersection de deux ofs appartenant respectivement à deux classes associées est compacte.

7) L'ensemble des reunions (resp. des intersections, resp. des sommes) de deux ofs appartenant respectivement a deux classes fixées quelconques est une classe.

8) Si de plus, l'espace X est localement booléien,

a) l'intersection de tous les ofs d'une classe st vide, et leur réunion recouvre X.

b) les classes d'ofs non compacts associables deux à deux n'ont pas de plus petit ni de plus grand élément.

c) l'ideal des ofs compacts n'a pas de plus grand elément.

Démonstration : Soit A l'algèbre des ofs de X, et C_K l'ideal des ofs compacts (remarque : il existe au moins un of compact, $\emptyset$, et un of non compact, X). Considérons tous les ensembles de la forme

O_i+C_k , somme dans P(X), c'est-à-dire dans A, d'un of non compact

O_i et d'un of compact C_k.

1) Ces ensembles sont des ofs et ils se répartissent (proposition 18) en classes formant une partition de A-C_K. Ce sont donc des ofs non compacts. Chaque classe est un treillis convexe, (ce qui entraîne aussi l'assertion 3), translation de C_K par un of non compact appartenant à cette classe, et équipotente à C_K. Le reste de l'assertion est justifié en fin de démonstration.

2) Une classe d'ofs non compacts constitue une base de filtre. En effet :

a) Elle n'est pas vide (remarque liminaire de la démonstration)

b) Elle ne contient pas l'ensemble vide qui est compact.

c) Chaque classe étant un treillis convexe pour l'inclusion, donc étant stable pour l'intersection, toute intersection de deux ensembles de la classe contient un ensemble de la classe (lui-même).

3) L'assertion 3 est démontrée en 1) ci-dessus.

4) $X \in A$ donc $X+C_K$ est une classe. Or, $C_k \in C_K$ équivaut à $X+C_k \in C'_K$, avec C'_K ensemble des complémentaires des ofs de C_K dans X, d'où l'assertion.

Remarquons que f, application canonique de A sur A/C_K étant un homomorphisme, les classes d'ofs définies en 1) sont les classes de la relation d'équivalence d'homomorphisme (Proposition 10).

D'autre part, A, contenant X comme élément, est unitaire, et possède donc une unité relative modulo C_K. A/C_K est donc unitaire, et l'image réciproque de son unité est un filtre, unique (Proposition 13 et 14 et remarque 9), contenant toutes les unités relatives modulo C_K, donc X en particulier. Comme cette image réciproque est une classe et que $X = X+\emptyset \in X+C_K$, il en résulte que $X+C_K$ est le filtre unique de A ainsi défini.

5) Soit maintenant une classe d'ofs O_i+C_K, différente de $X+C_K$, avec O_i of non compact.

L'ensemble d'ofs $X+O_i+C_K$ est une classe (Proposition 8) qui contient les complémentaires de la première et eux seulement, puisque $X+(O_i+C_k) = X+O_{i1} = O'_{i1}$, O'_{i1} étant le complémentaire de O_{i1}.

6) Soit deux classes C et C' ainsi associées, $O_1 = O_{i1}+C_{k1} \in C$ et $O'_2 = X+O_{i2}+C_{k2} \in C'$ avec $O_2 = O_{i2}+C_{k2} \in C$.

Soit f défini en 4) : Si $f(O_1) = f(O_2) = p$, on a :

$f(O'_2) = f(X)+f(O_2) = 1+p$ (voir 4) ci-dessus et lemme 4).

D'où $f(O_1 \cap O'_2) = f(O_1).f(O'_2) = p(1+p) = o$

et $O_1 \cap O'_2 \in f^{-1}(O) = C_K$.

7) La démonstration est immédiate en considérant comme en 6) ci-dessus l'application canonique f de A sur A/C_K.

8) Lemme : Dans un espace localement booléien, tout point est contenu dans un of compact.

Démonstration : Tout point x possède un voisinage compact V, qui contient donc un ouvert U contenant x. U est réunion d'ofs, donc il existe un of O contenant x, $O \subset U \subset V$. D'après la remarque 20, O est un of de V, donc compact puisque fermé dans un ensemble compact.

L'assertion 8 c) en découle immédiatement, le plus grand élément de C_K ne pouvant être, par le lemme, que X, qui n'est pas compact.

Lemme : Dans un espace localement booléien, on peut séparer tout couple de points par des ofs compacts.

Soit en effet, x_1 et x_2, points de X, C_1 et C_2 les ofs dont l'existence est assurée par le lemme précédent.

X étant séparé, on peut séparer x_1 et x_2 par des ouverts U_1 et U_2, réunions d'ofs. Soit O_1 et O_2 deux de ces ofs appartenant respectivement aux recouvrements de U_1 et de U_2, et contenant respectivement x_1 et x_2. $O_1 \cap C_1$ et $O_2 \cap C_2$ sont deux ofs, compacts. (puisque fermés dans un ensemble compacts); et séparant x_1 et x_2.

Reprenons la démonstration générale. Soit O_I une classe d'ofs non compacts et supposons qu'il existe un plus petit élément O_i. O_i n'est pas fini, sinon il serait compact. Soit donc x_1 et $x_2 \in O_i$, $x_1 \neq x_2$. On peut les séparer par deux ofs compacts C_1 et C_2, et $O_i \cap C'_1 = O_i \cap C_1 + O_i \in C_K + O_I = O_I$. Or, $O_i \cap C'_1$ est inclus strictement dans O_i, d'où contradiction.

Si de plus C_I est associée à la classe O'_I d'ofs non compacts (voir 5) il est clair que O'_I n'a pas de plus grand élément ; les deux classes jouant un rôle symétrique, sauf si $O_I = C'_K$, l'assertion 8 b est entraînée.

Démonstration de 8 a : Soit une classe O_I d'ofs non compacts et $O_i \in O_I$

Soit un point x. Si O_i ne contient pas x, on peut trouver un of compact C_{kx} contenant x (lemme précédent) et par conséquent un of $O_{ix} = O_i+C_{kx}$ appartenant à O_I (voir 1) et contenant x. Il est donc clair que les ofs de O_I forment un recouvrement de X. En passant aux complémentaires, l'intersection de tous les ofs de O'_I, classe associée, est vide. Les deux classes jouant un rôle symétrique, l'assertion a) en découle.

- Il reste à démontrer une partie de l'assertion 1.

Remarquons d'abord que si X est localement booléien, il est engendré par ses ofs compacts. En effet, tout point étant contenu dans un of compact, et la trace sur un of quelconque d'un of compact étant un of compact, il est clair que tout of (donc tout ouvert) est réunion d'ofs compacts. Inversement, toute réunion d'ofs compacts est un ouvert, par hypothèse.

La connaissance des ofs compacts suffit donc à déterminer la topologie de X : Si X_1 est l'espace X, muni de la topologie dont les ouverts sont réunions d'ofs compacts, l'application identique de X_1 dans X est clairement un homéomorphisme, et les topologies sont donc identiques.

Or, la connaissance d'une famille O_I d'ofs non compacts entraîne celle de C_K, d'où l'assertion.

En effet, (Proposition 18) $C_K = O_I+O_I$.

Remarquons enfin qu'il existe (voir remarque 21) des ensembles localement booléiens admettant un nombre aussi grand qu'on veut de classes d'ofs non compacts, d'où l'intérêt de l'assertion 1 pour ces espaces.

Proposition 34 : Dans un espace localement booléien, si un sous-ensemble B de l'algèbre des ofs, formé d'ofs compacts, et stable pour la réunion engendre l'espace, B est l'idéal des ofs compacts.

En effet, puisque B engendre l'espace, tout of compact est réunion, donc réunion finie, d'ofs de B, et appartenant donc à B.

§ 2 - ESPACE TOPOLOGIQUE DUAL D'UN PREANNEAU :

Proposition 35 : L'ensemble X des ultrafiltres d'un préanneau booléien peut être muni d'une topologie d'espace localement booléien, dit espace dual de P, et tel que :

1) Si et seulement si P possède un plus grand et un plus petit élément, X soit de plus compact, et P soit isomorphe à l'algèbre de tous les ofs de X ; X est dit alors espace booléien.

2) Si et seulement si P possède un plus petit élément et ne possède pas de plus grand élément, P soit isomorphe à l'idéal des ofs compacts de X, X étant non compact.

3) Si et seulement si P possède un plus grand et ne possède pas de plus petit élément, P soit isomorphe au préanneau des complémentaires des ofs compacts de X, X étant donc non compact.

4) Si et seulement si P ne possède pas de plus petit ni de plus grand élément, il soit isomorphe au préanneau constitué par l'une des classes d'ofs non compacts de la proposition 33, distincte de la classe des complémentaires des ofs compacts.

Nous ne distinguerons les différents cas qu'en cours de démonstration.

Soit Q le sous-préanneau de P(X) isomorphe à P (proposition 24), ensemble des éléments de la forme $s(p) = \{x \; ; \; x$ ultrafiltre et $p \in x\}$ avec $p \in P$. Nous noterons s_i l'élément $s(p_i)$ de Q, et $s'_i = s'(p_i)$ son complémentaire dans P(X), et Q' l'ensemble des éléments s'_i.

Soit $E = (e_i)_{i \in I}$ l'ensemble des parties de X de l'une des formes suivantes :

a) $e = s_i$

b) $e = s'_i = X+s_i$

c) $e = s_i+s_j$

d) $e = s_i+s'_j = X+s_i+s_j$

Nous examinerons plus loin si les ensembles des quatre formes sont distincts.

Il est immédiat que E est le plus petit sous-anneau unitaire de P(X) contenant Q, et qu'il est stable pour la réunion, l'intersection, la somme et le passage au complémentaire, compte tenu de ce que Q est stable pour la double somme. De plus, l'ensemble C_K des éléments de la forme s_i+s_j est un idéal de E, ensemble des intersections d'un ment de Q et d'un élément de Q' (en effet, $s_i \cap s'_j = s_i \cap (X+s_j) = s_i+s_i \cap s_j = s_i+s_e$ et réciproquement si $x_i+x_j \in C_K$, $(X+s_i \cap s_j) \cap (s_i \cup s_j)$ $= s_i \cup s_j+s_i \cap s_j = s_i+s_j$. Il en résulte que l'ensemble des éléments de la forme $X+s_i+s_j$ est un filtre de E, ensemble des réunions d'un élément de Q et d'un élément de Q'.)

Soit alors D la famille de parties de X, réunions quelconques d'ensembles de E. Les ensembles de D satisfont aux axiomes d'ouverts.

a) toute réunion d'ensembles de D est évidemment un ensemble de D.

b) l'intersection de deux ensembles de D (d'où par récurrence toute intersection finie d'ensembles de D) est un ensemble de D. Soit $O_1 \in D$, $O_2 \in D$, $O_1 = \bigcup_{i_1 \in I_1 \subset I} e_{i1}$ et $O_2 = \bigcup_{i_2 \in I_2 \subset I} e_{i2}$

$$O_1 \cap O_2 = \bigcup_{(i_1,i_2) \in I_1 x I_2} (e_{i1} \cap e_{i2}) \in D$$ puisque E est stable pour l'intersection.

Nous définirons donc la topologie sur X en prenant D comme famille d'ouverts. Etudions cette topologie.

A) X est engendré par ses ofs :

Il est clair que les éléments de E sont des ouverts, donc des ofs, d'où l'assertion. Mais il peut exister d'autres ofs (voir le § 3).

B) X est séparé :

Nous écartons les cas triviaux où $P = \{o\}$ et où $P = \{o,1\}$. P possède donc plus d'un ultrafiltre.

Soit x_1 et x_2 éléments de X et $x_1 \neq x_2$. Il existe p_1 et p_2 éléments de P, tels que $p_1 \in x_1$, $p_1 \notin x_2$, $p_2 \in x_2$ et $p_2 \notin x_1$ (Sinon, pour tout $p_1 \in x_1$, $p_1 \in x_2$, $x_1 \subset x_2$, et en raison de la maximalité, $x_1 = x_2$. De même, si pour tout $p_2 \in x_2$, $p_2 \in x_1$) Donc $x_1 \in s(p_1)$ et $x_1 \notin s(p_2)$, $x_2 \in s(p_2)$ et $x_2 \notin s(p_1)$. Il en résulte que $s(p_1) \cap s'(p_2)$ et $s(p_2) \cap s'(p_1)$ sont deux ofs qui séparent x_1 et x_2. X est donc séparé, et de plus, tout couple de points peut être séparé par des cfs.

C) Tout point possède un voisinage compact :

Soit $x_1 \in X$. Il résulte de B) que $V = (s_1 \cap s'_2) \cup (s'_1 \cap s_2) = s_1 + s_2$ est un cf, voisinage de x_1, (et pour tout $s_2 \in Q$), avec $V \in C_K$.

Montrons que V est compact(et en même temps que tout élément de C_K est compact).

Tout ouvert de V est trace sur V d'un ouvert de X, donc trace sur V d'une réunion d'ensembles de E, donc réunion de traces sur V d'ensembles de E, donc réunion d'ensembles de E inclus dans V.

Soit alors E_V la famille des ensembles de E inclus dans V, et soit $(U_\ell)_{\ell \in L}$ une famille d'ouverts recouvrant V.

$V = \bigcup_{\ell \in L} U_\ell = \bigcup_{\substack{\ell \in L \\ m_\ell \in M_\ell}} e_{m_\ell}$ où $(e_{m_\ell})_{m_\ell \in M_\ell}$ désigne la famille d'ensembles de E_V dont la réunion est U_ℓ .

Si du recouvrement de V par les e_{m_ℓ} et plus encore par une famille quelconque d'éléments de E_V, on peut extraire un recouvrement fini (nous allons démontrer que c'est le cas) a fortiori on pourra extraire un recouvrement fini de V par les U_ℓ.

Lemme : L'ensemble T des éléments $s_1 \cap s_2 + e_i$, où e_i parcourt E_V est inclus dans Q. (C'est un sous-préanneau de Q, de plus petit élément $s_1 \cap s_2$, et de plus grand élément $s_1 \cup s_2$).

En effet, E_V est l'ensemble des éléments $e \cap V$, ou e parcourt E, donc l'ensemble des éléments $(s_1+s_2) \cap e$, tous somme d'un nombre pair de termes de Q, quelle que soit la forme de e. Q étant stable pour la somme de termes en nombre impair, $s_1 \cap s_2 + e_i \in Q$, et $T \subset Q$. (T est évidemment stable pour la double somme et l'intersection, d'où le reste de l'assertion, compte tenu de ce que e_i peut être vide ou égal à $s_1+s_2 = V$).

Reprenant la démonstration générale de C), soit un recouvrement de V par une famille quelconque d'éléments $(e_i)_{i\in I_1}$ d'éléments de E_V, et soit $(e'_i)_{i\in I_1}$ la famille des complémentaires des e_i dans V, qui sont aussi des éléments de E_V, puisque traces sur V des complémentaires dans X des e_i. Extraire de la famille $(e_i)_{i\in I_1}$, un recouvrement fini, équivaut à extraire de la famille $(e'_i)_{i\in I_1}$ une famille finie $(e'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'intersection vide. Soit $(t'_i)_{i\in I_1}$ la famille d'éléments de $T\subset Q$ tels que $t'_i = s_1\cap s_2+e'_i = (s_1\cap s_2)\cup e'_i$ et soit p'_i l'élément de P tel que $t'_i = s(p'_i)$. Extraire de $(e'_i)_{i\in I_1}$ une famille finie $(e'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'intersection vide, c'est extraire de $(t'_i)_{i\in I_1}$ une famille finie $(t'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'intersection $s_1\cap s_2$, ou encore une famille finie $(p'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ d'éléments de P correspondant aux $(t'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, et de produit $p_1.p_2$ (on rappelle que $s_1 = s(p_1)$ et $s_2 = s(p_2)$), en vertu de l'isomorphisme entre P et Q. Supposons que cela ne soit pas possible. Tous les produits finis d'éléments de $(p'_i)_{i\in I_1}$ majorent donc strictement $p_1.p_2$. La famille $(p'_i)_{i\in I_1}$ engendre dans P un filtre F ne contenant pas $p_1.p_2$, sinon (remarque 5) il existerait un produit fini de p'_i minorant $p_1.p_2$. L'ensemble des filtres ne contenant pas p_1p_2 est inductif et F est donc contenu dans un filtre relativement maximal, donc un ultrafiltre z (proposition 22) ne contenant pas p_1p_2, mais contenant tous les p'_i et contenant $p_1 v p_2$ puisque $s_1 \cup s_2$ majorant les t'_i, $p_1 v p_2$ majore les p'_i. Il en résulte que dans X, $\forall i$, $z \in s(p'_i)$ et que $z \notin s(p_1p_2) = s_1 \cap s_2$ mais que $z \in s(p_1 v p_2) = s_1 \cup s_2$ donc $z \in V$. Appartenant à tous les $s(p'_i) = t'_i$, z appartient donc à tous les $e'_i = V \cap t'_i$, ce qui est contradictoire, l'intersection de la famille $(e'_i)_{i \in I_1}$ étant vide, et entraîne l'assertion C) X est donc localement booléien.

D) C_K est l'idéal des ofs compacts dans l'algèbre des ofs de X.

En effet, C_K est idéal de E, donc ensemble, stable pour la réunion, d'ofs d'un espace localement booléien, et d'ofs compacts par C). D'après C), tout point x de X possède un voisinage élément de C_K. On peut donc recouvrir tout of O de E par les traces sur O d'éléments de C_K, qui sont éléments de C_K puisque C_K est idéal de E. Donc C_K engendre tous les ofs de E, donc engendre X, et la proposition 34 entraîne l'assertion. (Q est donc aussi treillis convexe de l'algèbre des ofs, associ[é] à C_K, et non nécessairement distinct de C_K).

E) Jusqu'ici, les démonstrations sont valables que Q et C_K (resp. Q' et C_K, resp. E et C_K) soient distincts ou non : Nous allons préciser les différents cas.

F) Si P n'a pas de plus petit élément, aucun des ensembles de [...]

<u>n'est compact</u> :

En effet, la démonstration de la séparation de X entraîne que pour, tout $x \in X$, il existe un ensemble $s'(p_i)$ contenant x. On peut donc recouvrir X par des ensembles $s'(p_i)$ et recouvrir un ensemble $s(p) \in Q$ par des ensembles $s(p) \cap s'(p_i)$, qui sont des ofs, donc des ouverts. Si s(p) était compact, on pourrait extraire de ce recouvrement de s(p) un recouvrement fini :

$$s(p) = \bigcup_{i=1}^{n}(s(p) \cap s'(p_i)) = s(p) \cap (\bigcup_{i=1}^{n} s'(p_i)) = s(p) \cap \complement \bigcap_{i=1}^{n} s(p_i).$$

D'où l'on tirerait $s(p) \cap (\bigcap_{i=1}^{n} s(p_i)) = \emptyset$. D'après la proposition 24, le produit $p.p_1 \ldots p_n$ serait le plus petit élément de P, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

G) <u>Si P n'a pas de plus grand élément, aucun des ensembles de Q' n'est compact</u> :

La démonstration se transpose immédiatement de la précédente.

H) Puisque, dans la proposition 35, 4, P est supposé n'avoir ni plus petit ni plus grand élément d'après F) Q est fermé d'ofs non compacts. C'est donc, d'après la proposition 33, la définition de C_K, et le § D) ci-dessus, une des classes d'ofs non compacts. Cette classe est de plus distincte de la classe des complémentaires des ofs compacts, puisque Q' est fermé d'ofs non compacts d'après G), ce qui achève la démonstration de la proposition 35, 4, sa réciproque étant conséquence de 33, 8, b.

Démontrons maintenant 35,2. La démonstration de 35,4 reste valable jusqu'en D. Si l'on applique en outre, la démonstration de la compacité de s_1+s_2 à $\emptyset+s_1 = s_1$, il en résultera que tout élément de Q est compact, compte tenu de ce que $\emptyset \in Q$ (conséquence de ce qu'aucun ultrafiltre, étant propre, ne contient le plus petit élément) et qu'enfin, $C_K = Q$, comme treillis convexes associés et non disjoints. Comme le § G reste valable, Q' est formé d'ofs non compacts, et $C_K \neq E$, ce qui entraîne l'assertion, sa réciproque étant conséquence de 33, 8,c.

<u>Démonstration de 35, 1</u> : La démonstration de 35, 2 reste valable jusqu'à $C_K = Q$. Si alors $C_K \neq E$, il existe des ofs non compacts. X est donc non compact, et la proposition 33, 8, c entraîne que $C_K = Q$ n'a pas de plus grand élément. La contradiction entraîne $C_K = Q = E$. E contenant X, X est compact et tous ses ofs le sont aussi. $Q = C_K$ est alors l'algèbre de tous les ofs de X, d'où l'assertion.

<u>Démonstration de 35, 3</u> : Q n'a pas de plus petit élément, donc $Q \neq C_K$ et Q est une classe d'ofs non compacts. Ce ne peut être que la classe des complémentaires de C_K, sinon par 33, 8, b, elle n'aurait pas de plus grand élément. La réciproque est entraînée par la remarque de la démonstration de la proposition 3 4.

Remarque 21 : Donnons un exemple pour illustrer le § 1.

Soit un espace discret infini X. Pour tout $x \in X$, $\{x\}$ est un of. Tout sous-ensemble de X est un ouvert, donc un cf. Les ofs compacts sont les sous-ensembles finis. X est localement compact et les sous-ensembles infinis sont les ofs localement compacts. Une classe de ces ofs est la famille des sous-ensembles de X différant d'un nombre fini d'éléments d'un sous-ensemble infini donné.

On peut donc construire des espaces localement compacts tels que le cardinal de l'ensemble des classes d'ofs non compacts soit aussi grand qu'on veut.

§ 3 ESPACE BIDUAL D'UN ESPACE LOCALEMENT BOOLEIEN :

Proposition 36 : Soit un espace X localement booléien. Les espaces duaux des préanneaux d'ofs constitués par les classes d'équivalence modulo l'idéal des ofs compacts sont homéomorphes à X. Ils sont donc, à un homéomorphisme près, un seul espace, dit espace bidual de X.

Démonstration : En étendant la notation $O_I = (O_i)_{i\in I}$ non plus seulement aux classes d'ofs non compacts de X comme précédemment, mais à toute classe d'équivalence modulo l'idéal $C_K = (C_k)_{k\in K}$ des ofs compacts, n nous pourrons avoir ici $O_I = C_K$. Si nous notons $O'_I = (O'_i)_{i\in I}$ la classe des ofs complémentaires des ofs de O_I et $(C'_k)_{k\in K}$ celles des ofs complémentaires des ofs de C_K, nous pourrons avoir de plus, si X est booléien, $O_I = O'_I = C_K = C'_K$. La démonstration qui suit est valable quel que soit le cas particulier.

Soit le préanneau $P = (O_i)_{i\in I}$ et Y l'ensemble des ultrafiltres de P, muni de sa topologie d'espace localement booléien. Soit $Q = (O_j)_{j\in J} = O_J$ la classe des ofs de Y isomorphe à P et $Q' = (O'_j)_{j\in J}$ la classe de leurs complémentaires (J équipotent à I et Q = Q' si $O_I = O'_I$).

Q et Q' définissent la topologie sur Y, leurs sommes engendrant Y(proposition 35). Soit s l'isomorphisme de P sur Q (proposition 24)

L'image de $O_i \in P$ est l'of de Y contenant tous les ultrafiltres de P contenant O_i.

Soit $\overline{s}$ la bijection prolongeant s et définie par :

$$\left|\begin{array}{l}\overline{s}(O_{i1}) = O_{j1} = s(O_{i1}) \\ \overline{s}(O_{i1}\cap O_{i2}) = O_{j1}\cap O_{j2} = s(O_{i1})\cap s(O_{i2}) = s(O_{i1}\cap O_{i2})\end{array}\right.$$

$$\bar{s}(O_{i1}+O_{i2}+O_{i3}) = O_{j1}+O_{j2}+O_{j3} = s(O_{i1})+s(O_{i2})+s(O_{i3}) = s(O_{i1}+O_{i2}+O_{i3})$$

$$\bar{s}(O'_{i1}) = O'_{j1} = \complement O_{j1} = \complement s(O_{i1})$$

$$\bar{s}(O_{i1}+O_{i2}) = O_{j1}+O_{j2} = s(O_{i1})+s(O_{i2})$$

$$\bar{s}(O_{i1}+O'_{i2}) = O_{j1}+O'_{j2} = s(O_{i1})+ \complement s(O_{i2})$$

Si l'on note $C_L = (C_\ell)_{\ell \in L}$ et $C'_L = (C'_\ell)_{\ell \in L}$ l'ensemble des ofs compacts de Y et celui de leurs complémentaires, la proposition 35 entraîne que $O_J+O_J = C_L$, et que $O_J \cup O'_J \cup C_L \cup C'_L$ est un anneau booléien, sous-algèbre de l'algèbre des ofs de Y. De même, $O_I \cup O'_I \cup C_K \cup C'_K$ est une sous-algèbre de l'algèbre des ofs de **X**. $\bar{s}$ est alors un isomorphisme de l'anneau $O_I \cup O_I \cup C_K \cup C_K$ sur l'anneau $O_J \cup O'_J \cup C_L \cup C'_L$.

Les ofs compacts et, lorsqu'il en existe, non compacts, de ces deux anneaux, se correspondent bijectivement, et aussi classe par classe.

X est équipotent à Y. En effet :

A) Soit x un point de X. Les ofs de P qui contiennent x forment un ultrafiltre y de F.

a) c'est un filtre (évident)

b) les ofs de P qui ne contiennent pas x forment un idéal de P, donc y est un ultrafiltre (proposition 20).

Donc à tout point x de X, on peut faire correspondre un point y de Y, et par cette construction, un seul.

Cette correspondance f est injective.

L'intersection des ofs de P qui contiennent x est $\{x\}$, car (Deuxième lemme de la proposition 33, 8) on peut séparer tout autre point x' de x par un of C_x, et si $O_i \in P$ et $x \in O_i$, $O_i \cap C'_k \in P$ (proposition 33, 4 et 33, 7) et contient x sans contenir x'. Donc l'ultrafiltre y des ofs de P qui contiennent x ne peut correspondre qu'au seul x.

B) Soit maintenant $y \in Y$ et l'ensemble des ofs O_j de $O_J = Q$ qui contiennent y. Ce sont, par construction de Y, les ofs d'un ultrafiltre $\mathcal{U}$ du préanneau Q, images des ofs de l'ultrafiltre y de P.

Tout point de Y possède comme voisinage un of compact (proposition 35, C).

Soit $C_{\ell 1}$ un tel voisinage de y et C_{k1} son image réciproque par $\bar{s}$. (C_L est bien l'idéal de tous les compacts (proposition 35 et image de C_K par $\bar{s}$).

Le même raisonnement qu'en A montre que l'intersection des ofs de $\mathcal{U}$ est $\{y\}$. Chacun des ofs de $\mathcal{U}$ a donc avec C_{ℓ_1} une intersection non vide. Leurs images réciproques par l'isomorphisme $\bar{s}$, c'est-à-dire les ofs $(O_i)_{i \in I_1 \subset I}$ de l'ultrafiltre y de P ont donc chacun avec C_{k1} une intersection non vide. Montrons que l'intersection F des ofs $(O_i)_{i \in I_1}$ est non vide et réduite à un point .

1) si elle était vide, les traces des $(O_i)_{i \in I_1}$ sur C_{k1}, ofs compacts, auraient une intersection vide. C_{k1} étant compact,

on peut extraire une famille finie d'intersection vide, de toute famille de fermés d'intersection vide. Soit $\{C_{k2}, \ldots C_{kn}\}$ cette famille, avec $C_{k2} = O_{i2} \cap C_{k1}$, ... , $C_{kn} = O_{in} \cap C_{k1}$. Leurs images par $\bar{s}$ $C_{\ell 2} = O_{j2} \cap C_{\ell 1}$, ... , $C_{\ell n} = O_{jn} \cap C_{\ell 1}$ contiennent toutes y et $\bar{s}$ étant un isomorphisme, cette intersection devrait être vide. La contradiction entraîne que F est non vide.

2) elle est réduite à un point. Soit en effet, $x \in F$. Si $x' \in F$ et $x \neq x'$, on peut trouver (voir A) un of $O_{i1} \in P$ contenant x et pas x'. L'intersection de O_{i1} avec les ofs de y est non vide.

Si donc $O_{i1} \notin y$, O_{i1} et y engendrent dans P un filtre propre et qui contient strictement y, ce qui est contradictoire. D'où $O_{i1} \in y$ et puisque $x' \notin O_{i1}$, $x' \notin F$. La nouvelle contradiction entraîne l'assertion. Posons $x = g(y)$.

C) Comme conséquence de B, à tout point y de Y correspond un point x de X par une application g injective. Si en effet, $y' \in Y$ et $y' \neq y$, les deux points $x = g(y)$ et $x' = g(y')$ ne peuvent être confondus : x est l'intersection des ofs du filtre y de P, et x' celle des ofs de y'. Si $x = x'$ (voir A) les ofs de y et ceux de y' constitueraient un même ultrafiltre de P.

Il est clair que de plus, $g^{-1} = f$, que X et Y se correspondent donc bijectivement.

Enfin, puisque les ofs compacts de X et Y se correspondent bijectivement, que C_K engendre X (proposition 33, in fine, assertion 1) et que C_L engendre Y (35,D), il est immédiat que les ouverts de X et de Y se correspondent bijectivement, et X et Y sont homéomorphes. Le reste de l'assertion s'en déduit immédiatement.

Remarque : Dans l'exemple de la remarque 21, prenons comme préanneau P l'une des classes d'ofs non compacts (proposition 33) de l'algèbre des ofs de X. L'espace dual Y de P est homéomorphe à X. L'algèbre B des ofs de Y comporte donc une infinité de treillis convexes associés à Q (treillis convexe de B isomorphe à P).

B est donc strictement plus grande que la plus petite extension unitaire de P, qui est, à un isomorphisme près, $Q \cup Q' \cup C_K \cup C'_K$, où Q' désigne l'ensemble des complémentaires des ofs de Q, C_K l'idéal des ofs compacts et C'_K l'ensemble de leurs complémentaires.

§ 4 CARACTERISATION DE L'ESPACE DUAL D'UN PREANNEAU ET DE SON ALGEBRE D'OFS :

Nous avons caractérisé (Chapitre I, § 4) la plus petite des extensions unitaires d'un préanneau P. Nous allons maintenant caractériser, parmi ces extensions unitaires, l'algèbre A des ofs de l'espace dual X de P, et caractériser X parmi les espaces duaux de ces extensions. Nous reportons au chapitre I, § 5, application 3, proposition D, pour les définitions d'un idéal dense

Proposition 37 : Soit P un préanneau, X son espace dual, A l'algèbre des ofs de X. Soit un anneau booléien (unitaire) B, tel qu'il existe un isomorphisme f de P sur un treillis convexe Q de B, et que l'idéal associé à Q soit dense. Alors, s étant l'homomorphisme canonique (injectif) de P dans A, il existe un homomorphisme injectif g de B dans A, tel que $s = g \circ f$.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "s"'] & \\ & B \arrow[dl, "g"] \\ A & \end{tikzcd}$$

(On peut donc dire que A est, à un isomorphisme près, le plus grand anneau contenant un treillis convexe R isomorphe à P, sans que l'idéal associé à R cesse d'être dense).

Démonstration : Soit $P = (p_i)_{i \in \dot{I}}$, $R = (0_i)_{i \in \dot{I}}$ le treillis convexe de A isomorphe à P, avec $s(p_i) = 0_i$, et $Q = (q_i)_{i \in I}$ avec $q_i = f(p_i)$. On posera, sur Q, $g_1(q_i) = s(p_i)$, ou : $s(p_i) = g_1 \circ f(p_i)$.

g_1 est un isomorphisme de préanneaux (vérifications de routine). Soit $(C_K)_{k \in K}$ l'idéal des ofs compacts de A (K équipotent à $\dot{I}$) $C_K = R+R$ est l'idéal associé à R (proposition 35, § D de la démonstration). Soit D_K l'idéal de B associé à Q : $D_K = Q+Q$ (Notons qu'on peut avoir $Q = D_K$ et $R = C_K$). Soit enfin $q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22}$ des éléments de Q, avec $q_{11} = f(p_{11}), \ldots, q_{22} = f(p_{22})$ et soit $d_1 = q_{11}+q_{12}$, et $d_2 = q_{21}+q_{22}$ deux éléments de D_K. On prolongera g_1 à $D_K \cup Q$ par l'application g_2 définie par :

$g_2(q) = g_1(q)$ et $g_2(d_1) = g_1(q_{11})+g_1(q_{12})$

a) g_2 est bien définie : si $d_1 = q_{11}+q_{12} = q_{21}+q_{22}$, on a : $q_{11}+q_{12}+q_{21} = q_{22}$. On transporte cette dernière égalité dans P par f^{-1} : $p_{11}+p_{12}+p_{21} = p_{22}$.

Puis : $s(p_{11}+p_{12}+p_{21}) = s(p_{22})$

$$s(p_{11}+s(p_{12})+s(p_{21}) = s(p_{22})$$

$$s(p_{11})+s(p_{12}) = s(p_{21})+s(p_{22})$$

$$g_1(q_{11})+g_1(q_{12}) = g_1(q_{21})+g_1(q_{22})$$

Les deux définitions possibles de $g_2(d_1)$ coïncident donc.

b) g_2 est injective : si $g_2(d_1) = g_2(d_2)$ il existe q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22} tels que $d_1 = q_{11}+q_{12}$ et $d_2 = q_{21}+q_{22}$. En remontant le calcul précédent on obtient $d_1 = d_2$.

c) g_2 est un isomorphisme pour l'addition par définition sur Q, et un calcul de routine le vérifie immédiatement sur D_K. Pour la multiplication :

$g_2(d_3) = g_2(d_1.d_2) = g_2((q_{11}+q_{12}).(q_{21}+q_{22}))$
$= g_2(q_{11}.q_{21}+q_{11}q_{22}+q_{12}q_{21}+q_{12}q_{22})$. En utilisant l'isomorphisme pour l'addition, on obtient par des calculs de routine $g_2(d_3) = g_2(d_1).g_2(d_2)$. Il est clair de plus que $g_2(D_K) = C_K$ et que les deux idéaux sont isomorphes.

On prolongera alors g_2 à B comme suit. Soit $b \in B$, quelconque, et $b' = b+1$, J_o et J'_o les idéaux principaux engendrés par b et b'. Soit $J = J_o \cap D_K$ et $J' = J'_o \cap D_K$. Il est clair que $J \cap J' = \{o\}$ et que $J+J' = D_K$. En effet, si $d \in D_K$, $j = db \in J$, $j' = d(b+1) \in J'$ et $d = j+j'$. J et J' sont donc supplémentaires dans D_K : $J \oplus J' = D_K$. Les idéaux de C_K, $L = g_2(J)$ et $L' = g_2(J')$ sont donc supplémentaires dans C_K : $L \oplus L' = C_K$.

Pour tout $C_k \in C_K$, il existe donc $C_\ell \in L$ et $C_{\ell'} \in L'$ tels que $C_k = C_\ell + C_{\ell'}$. Comme pour tout $j_1 \in J$ et $j'_2 \in J'$, $j_1 j'_2 = o$, si $C_{\ell 1} = g_2(j_1)$ et $C_{\ell' 2} = g_2(j'_2)$, on a $C_{\ell 1} \cap C_{\ell' 2} = \emptyset$. D'où successivement : $C_k = C_\ell + C_{\ell'} = C_\ell \cup C_{\ell'}$

$$\Big(\bigcup_{C_\ell \in L} C_\ell\Big) \cap \Big(\bigcup_{C_{\ell'} \in L'} C_{\ell'}\Big) = \emptyset$$

$$\left(\bigcup_{C_\chi \in L} C_\chi\right) \cup \left(\bigcup_{C_{\chi'} \in L'} C_{\chi'}\right) \supset \bigcup_{k \in K} C_k = X$$

$$\left(\bigcup_{C_\chi \in L} C_\chi\right) \cup \left(\bigcup_{C_{\chi'} \in L'} C_{\chi'}\right) = X$$

Or, $\bigcup_{C_\chi \in L} C_\chi$ est un ouvert de X. Son complémentaire, $\bigcup_{C_{\chi'} \in L'} C_{\chi'}$ l'étant aussi, ce sont des ofs de X, donc des éléments de A. On posera $g(b) = \bigcup_{C_\chi \in L} C_\chi$.

a) g(b) est bien défini. Notons que g(b) = sup (L).

b) g prolonge g_2 : si $b \in Q \cup D_K$, b = sup (J) (chapitre 1, § 5, application 3, proposition D), $g_2(b)$ = sup (L) car l'isomorphisme conserve la borne supérieure. Or, $g_2(b)$ est un of, réunion des ofs compacts qu'il majore (proposition 33, démonstration de l'assertion 1, in fine).

D'où $g_2(b) = \bigcup_{C_\chi \in L} C_\chi = g(b)$

(N.B. : Borne supérieure dans A et réunion des ofs d'un idéal dense ne sont pas toujours des notions confondues. Les ofs ne contenant pas une partie finie de points non isolés d'un espace X forment un idéal dense I. Un of contenant cette partie finie est donc borne supérieure des ofs de I qu'il majore, non leur réunion).

c) g est un homomorphisme d'anneaux booléiens (nous utiliserons sans la redémontrer dans le cadre de ce travail une définition classique d'un tel homomorphisme).

1) $g(b') = g(b+1) = \bigcup_{C_\chi \in L'} C_{\chi'}$ par construction de g, b et b' jouant des rôles symétriques. D'où $g(b') = \complement g(b)$.

2) soit b_1 et $b_2 \in B$. Avec des notations évidentes :

$$g(b_1) \cap g(b_2) = \Big(\bigcup_{C_{\ell 1} \in L_1} C_{\ell 1} \Big) \cap \Big(\bigcup_{C_{\ell 2} \in L_2} C_{\ell 2} \Big) = \bigcup_{\substack{C_{\ell 1} \in L_1 \\ C_{\ell 2} \in L_2}} (C_{\ell 1} \cap C_{\ell 2})$$

$$= \bigcup_{C_\ell \in L_1 \cap L_2} C_\ell = g(b_1 . b_2),$$ (compte tenu de ce que

$L_1 \cap L_2 = g(J_1 \cap J_2)$, que $J_1 \cap J_2 = (J_{o1} \cap D_K) \cap (J_{o2} \cap D_K) =$

$(J_{o1} \cap J_{o2}) \cap D_K$ et que $J_{o1} \cap J_{o2}$ est l'idéal engendré par

$b_1 . b_2$, J_{o1} et J_{o2} étant respectivement ceux engendrés par

b_1 et b_2.

d) g est injectif : puisque D_K est dense, le seul b qui donnera $J = \{o\}$ sera $b = o$ (sinon le J_o correspondant serait inclus dans $Ann(D_K)$ qui ne serait pas réduit à $\{o\}$) donc le seul b tel que $g(b) = \emptyset$ sera $b = o$, et son noyau étant réduit à $\{o\}$, g est injectif.

e) compte tenu de ce que g prolonge g_1, et de la définition de g_1 sur Q, on a bien $s = g_o f$.

Définition 13 : On appellera extension unitaire non saturée d'un préanneau P toute extension unitaire B de P telle qu'il existe un homomorphisme injectif de B dans A, algèbre des ofs de l'espace dual de P.

Remarque 22 : Dans une extension unitaire B non saturée d'un préanneau P, Q étant le treillis convexe de B isomorphe à P, il est évident que l'idéal assoc à Q est dense (réciproque de la proposition 37).

Proposition 38 : Soit X l'espace dual d'un préanneau P, $\overline{X}$ l'espace dual de l'algèbre A des ofs de X, $(Y_i)_{i \in I}$ la famille des espaces duaux des extensions unitaires non saturées $(B_i)_{i\in\dot{I}}$ de P.

1) Il existe un homéomorphisme f de X sur un ouvert partout dense de $\overline{X}$, (resp. g_i de X sur un ouvert partout dense de Y_i, pour tout $i\in\dot{I}$).

2) Il existe pour tout $i\in\dot{I}$ une injection h_i de Y_i sur un ensemble contenant un ouvert partout dense de $\overline{X}$, continue sur l'image réciproque de cet ouvert, d'inverse continue, et telle que $f = h_i \circ g_i$.

3) S'il existe un homéomorphisme g de X sur un ouvert partout dense d'un espace booléien Y, on peut trouver une injection h de Y sur un ensemble contenant un ouvert partout dense de $\overline{X}$, continue sur l'image réciproque de cet ouvert, d'inverse continue, et telle que $f = h \circ g$.

$$\begin{tikzcd} & Y_i \arrow[dr, "h_i"] & \\ X \arrow[ur, "g_i"] \arrow[rr] \arrow[dr, "g"'] & & \overline{X} \\ & Y \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Démonstration</u> :

1, α) Soit s l'isomorphisme de P sur Q, treillis convexe de A, x un ultrafiltre de P, s(x) l'ultrafiltre de Q, ensemble des images des éléments de x par s. Les ofs de s(x) sont, par construction de X, les ofs de Q qui contiennent le point x de X et tout ultrafiltre de P étant représenté par un point de X, tout ultrafiltre de Q est constitué par une famille d'ofs contenant un point déterminé de X.

La famille des ofs de A qui contiennent le point $x\in X$ constitue un ultrafiltre de A, noté $\overline{x}$ (voir démonstration proposition 36, § A) et qui prolonge à A l'ultrafiltre $s(x)$ de Q.

On peut donc construire une injection f de X dans $\overline{X}$ en posant $f(x) = \overline{x}$.

Notons que $s(x)$ n'est pas en général prolongeable d'une manière unique par un ultrafiltre de A. Le filtre de A générateur de Q (page 13, 3) est prolongeable par un ultrafiltre de A qui contient Q tout entier, donc aussi les ofs de Q qui ne contiennent pas un point donné x de X, et qui est donc différent de $\overline{x}$ tout en prolongeant $s(x)$.

Soit un of O_j de A, $\overline{s}$ l'isomorphisme de Stone de A sur l'algèbre $\overline{A}$ des ofs de $\overline{X}$ et $\overline{O_j} = \overline{s}(O_j)$. $\overline{O_j}$ est l'ensemble des points de $\overline{X}$, ultrafiltres de A, auxquels appartient O_j. Parmi ceux-ci figurent tous les ultrafiltres $(f(x))_{x \in O_j}$ et par conséquent $f^{-1}(\overline{O_j}) = O_j$. La bicontinuité de f s'en déduit aussitôt ; les $f(O_j) = \overline{O_j} \cap f(X)$ (resp. les O_j) constituant un système fondamental de voisinages des points de $f(X)$ (resp. X).

Soit alors un point y de $\overline{X} - f(X)$. Tout ouvert U de $\overline{X}$ contenant y inclura un of $\overline{O_j}$, dont l'image réciproque par $\overline{s}$ sera un of O_j. Comme $f(O_j) \subset \overline{O_j}$, $f(O_j) \subset U$, $U \cap f(X) \neq \emptyset$, $y \in \overline{f(X)}$ et $\overline{f(X)} = \overline{X}$. $f(X)$ est donc partout dense dans $\overline{X}$.

Enfin, $f(X)$ est localement compact comme étant homéomorphe à X. En application d'un théorème classique, $f(X)$ est ouvert dans son adhérence, c'est-à-dire $\overline{X}$, ce qui achève la démonstration.

1, β)

$$\begin{tikzcd} & \overline{A} & \\ & A \arrow[u, dashed, "\overline{s}"'] & \\ P \arrow[ur, "s"] \arrow[r, dashed, "\varphi_i"'] & B_i \arrow[u, "\psi_i"] \arrow[r, "s_i"'] & A_i \arrow[ul, "\theta_i"'] \end{tikzcd}$$

Soit B_i une extension unitaire non saturée de P, R_i le treillis convexe de B_i isomorphe à P, φ_i l'isomorphisme de P sur R_i, Y_i l'espace dual de P_i et A_i son algèbre d'ofs, s_i l'isomorphisme de Stone de B_i sur A_i, Q_i le treillis convexe de A_i isomorphe à R_i (et à P), ψ_i l'homomorphisme injectif de B_i dans A (proposition 37). Il existe donc un homomorphisme injectif $\theta_i = \psi_i \circ s_i^{-1}$ de A_i dans A, et $\theta_i(A_i) \supset Q$. (Q, $\overline{s}$, A, $\overline{A}$ ont les significations de 1, α).

Avec les mêmes notations qu'en 1, α) la trace $\overline{x_i}$ sur $\theta_i(A_i)$ de l'ultrafiltre $\overline{x}$ de A est un ultrafiltre de $\theta_i(A_i)$ (démonstration de routine) unique constitué des ofs de $\theta_i(A_i)$ qui contiennent x, et dont la trace sur Q est l'ultrafiltre $s(x)$ de Q. Il correspond donc à $\overline{x_i}$ par θ_i^{-1} un et un seul ultrafiltre $\overline{\overline{x_i}}$ de A_i dont la trace sur Q_i est l'ultrafiltre $s_i \circ \varphi_i(x)$ de Q_i. Par construction de Y_i, les ofs de $\overline{\overline{x_i}}$ sont les ofs de Y_i qui contiennent un point x_i de Y_i. On peut donc construire une injection g_i de X dans Y_i en posant $g_i(x) = x_i$.

Soit alors un of $\overline{\overline{O_j}}$ de A_i et $O_j = \theta_i(\overline{\overline{O_j}})$. O_j est un ensemble de points x de X et il est contenu dans tous les ultrafiltres $\overline{x}$ de A, donc dans tous les ultrafiltres $\overline{x_i}$ de $\theta_i(A_i)$ correspondants. $\overline{\overline{O_j}}$ est donc à son tour contenu dans tous les ultrafiltres $\overline{\overline{x_i}}$ correspondants, c'est-à-dire qu'il contient tous les points x_i de Y_i images des points x de O_j par g_i.

D'où $g_i^{-1}(\overline{\overline{O_j}}) = O_j$ et la démonstration s'achève comme en 1, α), compte tenu de ce que les ofs de $\theta_i(A_i)$ forment un système fondamental de voisinage des points de X. En effet, les ofs de C_K idéal des ofs compacts de A, en constituent un à eux seuls, et $C_K \subset \theta_i(A_i)$, comme idéal associé à Q, dans A donc dans $\theta_i(A_i)$.

2) Soit un ultrafiltre $\overline{y}$ de A (c'est-à-dire que $\overline{y} \in \overline{X}$). La trace $\overline{y_i}$ sur $\theta_i(A_i)$ de $\overline{y}$ est un ultrafiltre unique de $\theta_i(A_i)$, auquel correspond par θ_i^{-1} un ultrafiltre $\overline{\overline{y_i}}$ unique de A_i. (Si plusieurs $\overline{y}$ donnent le même $\overline{\overline{y_i}}$, on établira une fonction de choix F sur leur ensemble). Les ofs de $\overline{\overline{y_i}}$ sont par construction de Y_i les ofs de Y_i qui contiennent un point $y_i \in Y_i$. Il est donc clair qu'on peut construire une injection h_i de Y_i dans $\overline{X}$ en posant $h_i(y_i) = \overline{y}$. Lorsque de plus y_i sera l'image d'un point y de X par l'application g_i de 1, β) la fonction F ne peut prendre que la valeur $\overline{y}$, car tout ultrafiltre U de A contenant $\overline{y_i}$ contiendra $\overline{y} = f(y)$ donc sera égal à $\overline{y}$. (U contiendra tous les ofs majorant ceux de $\overline{y_i}$. Les ofs compacts contenant y appartenant à $\overline{y_i}$, (puisque $C_K \subset \theta_i(A_i)$), U contiendra donc tous les ofs contenant y). Dans ce cas, on aura bien $f(y) = \overline{y} = h_i(y_i) = h_i \circ g_i(y)$ et $f = h_i \circ g_i$.

Soit un of $\overline{\overline{O_j}}$ de A_i, $O_j = \theta_i(\overline{\overline{O_j}})$ son image dans $\theta_i(A_i) \subset A$, et $\overline{O_j} = \overline{s} \circ \theta_i(\overline{\overline{O_j}}) = \overline{s}(O_j)$ son image dans $\overline{A}$.

$\overline{O_j}$ contient donc tous les points de $\overline{X}$ représentant les ultrafiltres de A auxquels appartient O_j, en particulier les $\overline{y} = F(\overline{y_i})$ pour tous les $\overline{y_i}$, ultrafiltres de $\theta_i(A_i)$ contenant O_j, donc pour tous les y_i, ultrafiltres de A_i contenant $\overline{\overline{O_j}}$. D'où $h_i(\overline{\overline{O_j}}) \subset \overline{O_j}$, h_i^{-1} est continue, et $h_i(Y_i)$ partout dense dans $\overline{X}$. De plus, puisque $f = h_i \circ g_i$, $h_i(Y_i)$ contient $f(X)$, ouvert partout dense dans $\overline{X}$. Enfin, h_i est continue sur $g_i(X)$; les ofs de $\overline{s} \circ \theta_i(A_i)$ formant un système fondamental de voisinages de $f(X)$.

Montrons que h_i n'est pas généralement continue. Soit $\overline{z}$ un ultrafiltre quelconque de A.

<u>Lemme</u> : Si $\overline{z} \notin f(X)$, l'ultrafiltre $\overline{z}$ de A coupe l'idéal C_K des ofs compacts de A suivant deux treillis convexes triviaux, c'est-à-dire que $\overline{z}$ ne contient aucun of compact, et réciproquement.

Démontrons que si $\overline{z}$ coupe C_K suivant deux treillis convexes non triviaux, $\overline{z} \in f(X)$. Dans ce cas, la proposition 20 entraîne en effet que $\overline{z}$ coupe C_K suivant un ultrafiltre de C_K (les traces sur C_K de $\overline{z}$ et de son idéal associé $\overline{z}'$ sont clairement des treillis convexes) Si $q \in Q$, $q+\overline{z} \cap C_K$ et $q+\overline{z}' \cap C_K$ sont alors (proposition 20) l'un idéal maximal de Q, l'autre ultrafiltre de Q, ce dernier égal à $\overline{z} \cap Q$. Appelons z le point de X déterminant cet ultrafiltre de Q, et ce dernier s(z). Il est immédiat que s(z) et $\overline{z}' \cap C_K$ sont associés et que $s(z)+s(z) = \overline{z'} \cap C_K$, donc que $z' \cap C_K$ est l'idéal maximal de C_K contenant tous les ofs compacts ne contenant pas z, enfin, que $\overline{z} \cap C_K$ est l'ensemble des ofs compacts contenant z. Il en résulte que $\overline{z}$ est l'ultrafiltre de A comprenant tous les ofs contenant le point z, et $\overline{z} = f(z)$. (Tous les ofs contenant $\overline{z}$ majorent un of compact le contenant, donc appartiennent à z). La réciproque est évidente.

<u>Conséquence</u> : En particulier, si $\overline{z} \in h_i(Y_i) - f(X)$, $\overline{z}$ ne contient aucun of compact de A. Si $\overline{z} = h_i(z_i)$ avec $z_i \in Y_i$ et si h_i est continue en $\overline{z}$, pour tout of $\overline{O}$ de $h_i(Y_i)$ contenant $\overline{z}$, on doit pouvoir trouver un ouvert U de Y_i avec $z_i \in U$ tel que $h_i(U) \subset \overline{O}$. En particulier, si $\overline{O}_j \in \overline{A}$ et $\overline{z} \in \overline{O}_j$, $\overline{O} = \overline{O}_j \cap h_i(Y_i)$ doit satisfaire à cette condition.

Or, si $h_i(U) \subset \overline{O}_j \cap h_i(Y_i) = \overline{O}$, U étant réunion d'ofs de A_i, il doit exister un of $\overline{\overline{O}}_\ell$ de A_i, avec $z_i \in \overline{\overline{O}}_\ell$ et $h_i(\overline{\overline{O}}_\ell) \subset \overline{O}_j \cap h_i(Y_i)$

ou encore : $\overline{O}_\ell \cap h_i(Y_i) \subset \overline{O}_j \cap h_i(Y_i)$

Si cette condition est remplie, on a nécessairement $\overline{O}_\ell \subset \overline{O}_j$ sinon $\overline{O}_\ell \cap \complement \overline{O}_j \neq \emptyset$ ce qui est contradictoire avec $\overline{O}_\ell \cap \complement \overline{O}_j \subset \complement h_i(Y_i)$ puisque $\complement h_i(Y_i)$ étant rare il ne peut contenir aucun of. Finalement, pour tout $\overline{O_j}$ contenant $\overline{z}$, on doit trouver $\overline{O_\ell}$ contenant $\overline{z}$, avec $\overline{O_\ell} \in \overline{s} \circ \theta_i(A_i)$ et $\overline{O_\ell} \subset \overline{O_j}$. Cela sera impossible si l'on montre qu[e] pour certains ofs O_j de l'ultrafiltre $\overline{z}$ de A, on ne peut généralement trouver dans $\overline{z}$ d'of O_ℓ de $\theta_i(A_i)$ minorant O_j.

Ce sera le cas dans le contre-exemple suivant : Soit un espace X (remarque 21) dont l'algèbre A des ofs contient une infinité de class[es] d'ofs non compacts. Il existe des idéaux maximaux de A contenant l'idéal des ofs compacts, donc des ultrafiltres ne contenant aucun of compact. Soit $\overline{z}$ l'un d'eux. L'image de $\overline{z}$ par l'application canonique φ de A sur A/C_K est un ultrafiltre propre de A/C_K. Prenons pour préanneau l'image réciproque P d'un élément p de $\varphi(\overline{z})$ non atomique (il en existe). Identifions X (proposition 36) à l'espace dual de P, et P à Q, avec les notations précédentes, et prenons pour B_i la plus petite extension unitaire de P. La réciproque du lemme entraîne que $\overline{z} \notin f(X)$. Soit $\overline{z_i}$ la trace de $\overline{z}$ sur $\theta_i(A_i)$ et posons $F(\overline{z_i}) = \overline{z}$, d'où [...] $\overline{z} \in h_i(Y_i)$. Il est clair que $\overline{z}$ contient Q et que si O_j appartient à l'image réciproque d'un élément de $\varphi(\overline{z})$ minorant p, O_j ne majore dans aucun élément de $\theta_i(A_i)$, ce qui achève la démonstration.

3) Soit B l'algèbre des ofs de Y. Les ofs de g(X) et de X se correspondent bijectivement par l'homéomorphisme g.

Les traces sur g(X) des ofs de Y sont des ofs de g(X) dont les images réciproques par g sont des ofs de X.

Soit un of $\overline{\overline{O_1}}$ de Y et O_1^* sa trace sur g(X). O_1^* n'est trace que d'un seul of de Y sur g(X). S'il en existe un second $\overline{\overline{O_2}}$, $\overline{\overline{O_1}}+\overline{\overline{O_2}}$ est dans Y-g(X) qui est rare et dont l'intérieur est vide. D'où $\overline{\overline{O_1}}+\overline{\overline{O_2}} = \emptyset$ et $\overline{\overline{O_1}} = \overline{\overline{O_2}}$. Il existe donc une injection θ de l'algèbre B des ofs de Y dans celle A des ofs de X, qui est clairement un homomorphisme. A contient donc une sous-algèbre θ (B) isomorphe à B.

g(X) étant ouvert, tout point y de g(X) possède un système fondamental de voisinages d'ofs de Y inclus dans g(X). De tels ofs sont compacts et leurs images par g^{-1} sont des compacts. Soit C_K l'ensemble de ces images. Tout point x de X possède donc un système fondamental d'ofs de C_K. Un of compact C_K quelconque de X peut donc être recouvert par une famille, donc par une famille finie, d'ofs de C_K et appartient donc à C_K, (stable par construction pour la réunion finie) et à θ(B), qui contient donc tous les ofs compacts de A dont l'ensemble est C_K, idéal des ofs compacts de A. On peut donc faire une partition de θ(B) en treillis convexes de A associés à Q, le treillis convexe de A isomorphe à P. Soit l'un quelconque, R, de ces treillis convexes, Z son espace dual, homéomorphe à X, (proposition 36) et qu'on identifie donc à X. L'algèbre des ofs de Z est donc à un isomorphisme près, A, et θ(B) est une extension unitaire de R.

A un homéomorphisme près (proposition 36) Y est l'espace dual de θ(B). Il existe donc (proposition 38, 2) une injection h de Y sur un ensemble contenant un ouvert partout dense de $\overline{X}$, continue sur l'image réciproque de cet ouvert, et telle que $f^* = h \circ g$, f^* étant l'homéomorphisme de X, espace dual de R, sur $\overline{X}\,(1,\alpha)$, qui, compte tenu de sa construction, coïncide avec f.

BIBLIOGRAPHIE

1. G. BIRKHOFF - Lattice theory - Ed. Amer. Math. Soc. 1960.

2. N. BOURBAKI - Algèbre - Chapitre 8 - Appendice (Unités relatives dans une algèbre).

3. G. GRÄTZER - A generalization of Stone's representation theorem for boolean algebras.
DUKE J. 1963, page 469 à 474.

4. G. GRÄTZER & T. SCHMIDT - Standard ideals in lattices - Acta Math. Hung 1961 - 12 - page 17 à 86.

5. P. HALMOS - Boolean algebras - Van Nostrand 1963.

6. IQBALUNNISA - Lattice translates and congruences.
INDIAN J. MATH. SOC. (N.S.) 26 -1962 - page 81 à 91.

7. KUROSH - Theory of groups - Chelsea Publ. Cy. N. Y. 1955 (Chapitre III, page 60 et suivantes : décomposition d'un groupe par rapport à un sous-groupe, coensembles).