

R. OUZILOU

Faisceaux additifs et applications catégoriques

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1966, tome 3, fascicule 3
, p. 2-41

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1966__3_3_2_0>

© Université de Lyon, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FAISCEAUX ADDITIFS ET APPLICATIONS CATEGORIQUES

par R. OUZILOU

Ce n'est pas l'exposé d'une théorie nouvelle qu'on trouvera ici mais l'exploitation d'une théorie récente due à Giraud, à savoir, celle des sites et de leurs faisceaux. L'objet de ce mémoire est de montrer comment, en adaptant cette théorie aux faisceaux additifs, définis sur une catégorie pré-additive (i.e, catégorie dont le bifoncteur hom. se lit dans la catégorie \mathcal{A} des groupes abéliens), on arrive à retrouver le théorème d'immersion de Freyd-Mitchell pour les petites catégories abéliennes et à étendre ce résultat aux (grandes) catégories sous certaines conditions ; en fin de compte, on retrouvera aussi le théorème de Petresco-Gabriel [7] qui donne la structure des catégories abéliennes de Grothendieck.

En nous refusant au départ la notion d'univers, nous nous sommes imposé un cadre : celui de la théorie des classes (Bernays , Von Neumann et autres...) regrettons, au passage, que cette théorie, qui connaît une grande vogue à l'étranger, ne soit pas appréciée en France où il semble qu'on en soit encore aux ensembles à la Zermelo. Le lecteur, qui voit dans les univers la condition sine qua non pour "faire des catégories", se dira que nous nous sommes donné un univers (celui des ensembles, en l'occurrence) avec l'interdiction d'en sortir (les voyages intersidéraux ne sont pas encore pour demain).

Pour la bonne compréhension du texte, nous avons jugé utile de reprendre, presque à la lettre, d'importants passages de [5] ; en particulier, nous nous sommes inspiré, pour nos paragraphes 2 et 3, du très bel exposé II de cet ouvrage cité.

Lorsqu'on trouvera entre guillemets les termes habituels de la théorie des ensembles, on saura qu'ils se rapportent à des classes.

Tous les "groupes" considérés seront abéliens et les foncteurs covariants :

1. Préliminaires :

(1.1) Par "catégorie" nous entendrons la donnée d'une classe C d'éléments (les morphismes), de deux opérateurs monaires σ et β (la source et le but) partout définis sur C , et d'un opérateur binaire (la composition) sous les conditions suivantes :

$$(C_1) \quad \sigma \circ \sigma = \beta \circ \sigma = \sigma, \quad \beta \circ \beta = \sigma \circ \beta = \beta$$

(C_2) Le composé $g.f$ d'un couple (f,g) de morphismes est défini si, et seulement si, $\beta(f) = \sigma(g)$.

(C_3) Pour tout triplet de morphismes (f,g,h) tel que $\beta(f) = \sigma(g)$ et $\beta(g) = \sigma(h)$, les composés $h.(g.f)$ et $(h.g).f$ sont définis et égaux.

(C_4) Pour tout morphisme f , on a :

$$f.\sigma(f) = \beta(f).f = f$$

La "catégorie" C sera une catégorie si, de plus :

(C_5) Les morphismes de source et de but donnés forment toujours un ensemble.

Toute source est un but et vice versa, ces morphismes particuliers seront les unités de la "catégorie" .

Une "catégorie" est déterminée par ses unités, ses classes de morphismes de but et de sources donnés, et les restrictions à ces classes de la composition ; on retrouve donc par là la définition naïve des catégories par les objets, i.e, par une collection d'ensembles (ou même de classes) en correspondance biunivoque avec les unités.

Par interversion des opérateurs σ et β et renversement de la composition on définit la "catégorie" duale C^o d'une "catégorie" C .

Le lecteur mettra au compte des "catégories" la notion de foncteur (i.e, application qui commute aux opérateurs) et toute la terminologie catégorique usuelle.

Les foncteurs (additifs) d'une catégorie (pré-additive) A dans une catégorie (pré-additive) B , et leurs transformations naturelles, forment une "catégorie" que nous noterons $F(A,B)$ (resp. AB) ; si B est abélienne, ces catégories le sont aussi.

En raison de leur importance ultérieure, nous allons rappeler d'autres notions :

On dit qu'une "famille" G_i d'objets d'une "catégorie" C est un système de générateurs de C si le "foncteur" $\prod_1 \text{Hom}(G_i, .)$ est fidèle, i.e, si, pour toute paire $u, v : U \rightarrow U'$ de morphismes distincts, il existe un morphisme $G_i \rightarrow U$ tel que $G_i \rightarrow U \xrightarrow{u} U'$ et $G_i \rightarrow U \xrightarrow{v} U'$ soient distincts ; si, de plus, ces morphismes $G_i \rightarrow U$ forment, pour chaque U , en ensemble fini qui ne dépend que de U , nous dirons que (G_i) est un gros système de générateurs de C . Lorsque (G_i) est réduite à un seul objet, on dit alors qu'un tel objet est un générateur (gros générateur) de C ; un objet G de C dont toutes les sommes (les sommes finies) sont définies est un générateur (gros générateur) de C si, et

seulement si, tout objet de C est quotient d'une somme (somme finie) de copies de G .

Par voie duale, on définit les systèmes de séparateurs et les objets séparateurs.

(1.2) Etant donné un foncteur $f : A \rightarrow B$ de "catégories" et un objet B de B la catégorie A_f^B des objets de A mis par f au-dessous de B est définie de la façon suivante : ses objets sont les couples (A, α) où A décrit la classe des objets de A tels que $\text{hom}(B, f(A)) \neq \emptyset$ et α est, pour chaque A , un morphisme de B dans $f(A)$; les morphismes $(A, \alpha) \rightarrow (A', \alpha')$ de cette catégorie sont les morphismes $a : A \rightarrow A'$ de A tels que $f(a) \cdot \alpha = \alpha'$.

En particulier, lorsque A est une sous-catégorie de B et f son inclusion on retrouve la catégorie A^B des objets de A au-dessous de B .

Considérons maintenant deux catégories C et A ; en associant à tout objet A de A le foncteur constant de valeur A défini sur C , on obtient évidemment un foncteur $k : A \rightarrow F(C, A)$; si un objet F de $F(C, A)$ est tel que la catégorie A_k^F possède un objet initial, nous dirons que cet objet initial est la limite à droite du foncteur F ; par abus de notation, $\lim_{\rightarrow} F$ désignera l'objet de A , but de cette limite.

Exemples : Si la catégorie C est triviale (i.e, tous ses morphismes sont neutres) on retrouve la notion de "somme".

. Si C est la sous-catégorie de A définie par une paire $A \rightarrow A'$, la limite à droite de C (i.e, de son inclusion) est le conoyau de cette paire.

. Les "sommations" fibrées de A , i.e, les "sommations" des catégories A^A , peuvent être considérées comme les limites à droite des foncteurs définis dans les catégories triviales auxquelles on adjoint un objet initial.

Le lecteur définira de lui-même la limite à droite d'un morphisme fonctoriel et s'assurera qu'elle est épique si les composantes de ce morphisme sont toutes épiques.

Par voie duale, on a la notion de limite à gauche (e.g, produits, noyaux, produits fibrés).

Nous dirons qu'une "catégorie" A est complète à droite si tout petit foncteur (i.e, défini sur une petite catégorie) à valeurs dans A , possède une limite à droite ; on voit aisément qu'il en est ainsi si, et seulement si, toute famille d'objets de A possède une somme et toute paire $A \rightleftarrows A'$ de morphismes de A un conoyau. Si A est complète à droite (à gauche), il en est de même pour $F(B,A)$ et pour EA , lorsque B et A sont préadditives ; dans ces "catégories" de foncteurs, les limites se calculent argument par argument.

Nous aurons besoin de définir, extra muros, les limites de "groupes" ; la théorie des classes nous refusant la catégorie des "groupes", il va falloir procéder pour cela à quelques aménagements : tout d'abord, pour élargir la notion de foncteur, nous appellerons C-système de "groupes" toute transformation F soumise aux conditions de la définition naive des foncteurs, i.e :

a/ Pour tout objet U de C , il existe un groupe unique $F(U)$ tel que $F(1_U) = 1_{F(U)}$.

b/ Pour tout morphisme $u : U \rightarrow V$ de C , $F(u)$ est une application additive de $F(U)$ dans $F(V)$.

c/ Pour des morphismes composables $U \xrightarrow{u} V \xrightarrow{v} W$ de C , on a toujours $F(v \circ u) = F(v) \circ F(u)$.

De façon évidente, on définit un système d'applications additives de "groupes", ce qui permet de présenter la notion de limite à droite d'un

~~C-système de "groupes"~~ en termes de problème universel. Tout comme pour les groupes, ce problème admet une solution ; lorsque ces "groupes" sont des ensembles, le foncteur $F : C \rightarrow Ab$ admet une limite à droite si, et seulement si, la relation d'équivalence qui définit cette "limite" est assez grossière pour fournir un ensemble quotient.

En présence d'un produit fibré $V' \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} U' \\ \rightarrow \\ V \end{array} \rightarrow U$, nous dirons que $V' \rightarrow U'$ se déduit de $V \rightarrow U$ par le changement de base $U' \rightarrow U$.

Soit F un foncteur de C dans A ; pour tout objet U de A au-dessous de F et tout morphisme $V \rightarrow U$ de A , on définit, par changement de base, un foncteur G au-dessus de V ; si $\varinjlim F = U$ implique $\varinjlim G \neq V$, on dit que la limite à droite de F est universelle. Cette notion s'adapte aux systèmes de "groupes" et il est aisé de montrer que les limites à droite de "groupes" sont universelles.

Nous dirons qu'une catégorie C est bonne si les conditions suivantes sont satisfaites :

- a/ Deux objets de C se trouvent toujours au-dessus d'un même troisième.
- b/ Pour toute paire $U \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} V$ de morphismes de C il existe un morphisme $V \rightarrow V'$ tel que $U \begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} V \rightarrow V'$ soit commutatif.

Exemples : Un préordre filtrant croissant ; une catégorie à 2-sommes et co-noyaux.

Remarquons que toute sous-catégorie pleine, cofinale, d'une bonne catégorie est bonne.

Les limites à droite des foncteurs (des systèmes) définis sur une bonne catégorie seront dites inductives.

Soit C une bonne catégorie et C' une sous-catégorie pleine, cofinale

(i.e, tout objet de C est au-dessus d'un objet de C') ; si la restriction à C' d'un foncteur F admet une limite à droite, il en est de même pour F et ces deux limites sont égales.

Propriétés des limites de "groupes".

1/ Une limite inductive de "groupes" est égale à la limite inductive des classes sous-jacentes.

2/ Pour qu'un "groupe" A , placé sous un système inductif $F(U)$, soit la limite à droite de ce système, il faut et il suffit que :

$\alpha/$ A soit la réunion des images des applications $F(U) \rightarrow A$.

$\beta/$ Pour deux éléments x et y de $F(U)$ donnant le même élément de A , il existe un morphisme $U \rightarrow V$ tel que $F(U \rightarrow V)(x) = F(U \rightarrow V)(y)$.

3/ Les limites inductives de "groupes" sont exactes (Pour les démonstrations, s'inspirer de [3]).

(1.3) Une adjonction entre deux "catégories" A et B consiste en la donnée de deux foncteurs

$$A \begin{array}{c} g \\ \rightarrow \end{array} B \begin{array}{c} d \\ \rightarrow \end{array} A$$

et de deux morphismes fonctoriels :

$$\alpha: 1_A \rightarrow dg \quad , \quad \beta: gd \rightarrow 1_B$$

telle que, pour tout objet A de A (B de B), les morphismes :

$$\begin{array}{ccc} g(A) \xrightarrow{g(\alpha_A)} & gdg(A) \xrightarrow{\beta_{g(A)}} & g(A) \\ d(B) \xrightarrow{\alpha_{d(B)}} & dgd(B) \xrightarrow{d(\beta_B)} & d(B) \end{array}$$

soient des unités.

De façon plus précise, on dit alors que g est adjoint à d à gauche ou encore que d est adjoint à g à droite.

Ceci a lieu si, et seulement si, les classes $\text{hom}(g(A), B)$ et $\text{hom}(A, d(B))$ sont dans une correspondance biunivoque naturelle par rapport à A et B (la naturalité par rapport à l'un de ces arguments suffit d'ailleurs).

Un foncteur $d : B \rightarrow A$ admet un adjoint à gauche si, et seulement si, pour tout objet A de A , la catégorie A_d^A possède un objet initial ; bien entendu, c'est cet objet initial qui donne l'adjoint en question.

Le lecteur verra de lui-même comment une adjonction se comporte avec les êtres catégoriques habituels et retiendra, pour son emploi ultérieur, le résultat suivant :

(1.3.1) Lemme : soit une adjonction $(g, d ; \alpha, \beta)$ entre deux catégories A et B

B ; alors :

1/ d (resp. g) est fidèle si, et seulement si, β (resp. α) est à composantes épiques (moniques).

2/ d (resp. g) est pleinement fidèle si, et seulement si, β (resp. α) est invertible.

Pour montrer, e.g., que la pleine fidélité de d équivaut à l'invertibilité de β , il suffit de remarquer que l'application de $\text{hom}(B, B')$ dans $\text{hom}(gd(B), B')$ définie par :

$$u \longrightarrow \beta_{B'} \cdot gd(u) \quad ; u : B \rightarrow B'$$

est bijective si, et seulement si, d est pleinement fidèle ; or, la naturalité de β fait que cette application est égale à $\text{hom}(\beta_{B'}, B')$.

Corollaire : Si B est balancée (i.e., tout bimorphisme est invertible) cette

adjonction est une équivalence si, et seulement si, g est pleinement fidèle et d fidèle.

Considérons maintenant trois catégories pré-additives A, C et D (C petite) et un foncteur additif $f : C \rightarrow D$; on définit alors un foncteur $f^* : DA \rightarrow CA$

en associant à tout objet G de $\mathcal{D}A$ et tout-objet U de \mathcal{C} , l'objet de A :

$$f^*(G)(U) = Gf(U)$$

Avec ceci, on a l'important résultat que voici :

(1.3.2) Lemme de Kan [4]

Si A est complète à droite (à gauche) f^* possède un adjoint à gauche (à droite) noté ${}_*\hat{f}$ (resp. \hat{f}_*)

Le foncteur ${}_*\hat{f}$, par exemple, est obtenu de la façon suivante : pour tout objet V de \mathcal{D} , on considère la catégorie $\mathcal{C}_V^{\hat{f}}$ des objets de \mathcal{C} mis par \hat{f} au-dessus de V et l'on désigne par \hat{f}_V le foncteur source de $\mathcal{C}_V^{\hat{f}}$ dans \mathcal{C} ; il est aisé de voir alors que, pour tout objet F de $\mathcal{C}A$:

$$\lim_{\rightarrow} F \cdot \hat{f}_V \quad (= {}_*\hat{f}(F)(V))$$

est fonctoriel en V et que le morphisme fonctoriel $F \rightarrow {}_*\hat{f}_*(F)$ dont les composantes sont les morphismes évidents $F(U) \rightarrow \lim_{\rightarrow} F \cdot \hat{f}_V(U)$ est un objet initial de la catégorie des objets de $\mathcal{D}A$ mis par f^* au-dessous de F .

Corollaire 1 : Si A est complète à droite (à gauche) les foncteurs d'évalua-

tion $V^* : \mathcal{D}A \rightarrow A$, définis, pour tout objet V de \mathcal{D} , par :

$$V^*(G) = G(V)$$

admettent chacun un adjoint à gauche (à droite).

Pour cela, il suffit de réduire \mathcal{C} à une unité de \mathcal{D} . Calculons, e.g., l'adjoint à gauche ${}_*\hat{V}$: pour $\mathcal{C} = \{1_V\}$, toute catégorie $\mathcal{C}_V^{\hat{f}}$, est triviale et ses objets sont les morphismes de V dans V' , par conséquent :

$${}_*\hat{V}(A)(V') = \sum_{\text{hom}(V, V')} A$$

et le morphisme d'adjonction $A \rightarrow V^* \cdot {}_*\hat{V}(A) = \sum_{\text{end}(V)} A$ est la composante d'in-

dice 1_V de cette somme.

Corollaire 2 : Si A est complète, un morphisme de DA est monique (épique)

si, et seulement si, ses composantes le sont ; pour tout objet projectif P (injectif I) de A , les objets ${}_*U(P)$ (resp. $U_*(I)$) sont projectifs (injectifs) dans DA ; pour tout générateur G (séparateur S) de A , la classe des ${}_*U(G)$ (des $U_*(S)$) est un système de générateur (séparateurs) de DA .

Corollaire 3 : Si A est une catégorie abélienne, complète, à séparateur injectif, et si \mathcal{D} est une petite catégorie pré-additive, DA hérite de ces propriétés de A .

Corollaire 4 : Si \mathcal{D} est une petite catégorie pré-additive, DA^b est à enveloppes injectives.

Car, tout comme Ab , cette catégorie de foncteurs satisfait à l'axiome de Grothendieck, i.e, pour tout sous-objet U d'un objet V et toute famille filtrante croissante V_α de sous-objets de V , on a : $\sup(U \cap V_\alpha) = U \cap \sup V_\alpha$; on sait qu'alors, avec assez d'injectifs (cor. 3), on obtient des enveloppes injectives.

Corollaire 5 - (Yoneda) : Pour tout objet V de \mathcal{D} et tout objet G de DA^b ,

l'application de $\text{hom}(\text{hom}(V, \cdot), G)$ dans $G(V)$ définie par :

$$y(\phi) = \phi_V(1_V), \quad \phi: \text{hom}(V, \cdot) \rightarrow G$$

est bijective, naturelle en G et V .

Tout d'abord, rappelons que ${}_*V(Z) = \sum_{\text{hom}(V, \cdot)} Z = \text{hom}(V, \cdot)$ de sorte que, l'application z de $\text{hom}(\text{hom}(V, \cdot), G)$ dans $\text{hom}(Z, G(V))$ qui associe à tout ϕ le composé de ϕ_V avec le morphisme d'adjonction $Z \rightarrow V^* \cdot {}_*V(Z) = \text{end}(V)$ est bijective ; or ce morphisme d'adjonction consiste à transformer le nombre 1 en l'identité de V et, en identifiant les applications additives $Z \rightarrow G(V)$ à leurs en 1, on voit alors que z devient y .

La naturalité de γ en F résulte de l'adjonction sa naturalité en V est une paraphrase de celle de ϕ .

L'application inverse de γ est fournie par :

$$\bar{\gamma}^1(v)_U (V \rightarrow U) = G(V \rightarrow U)(v) ; v \in G(V), U \in \mathcal{D}$$

En particulier, pour $G = \text{hom}(V', \cdot)$ on a :

$$\bar{\gamma}^1(V' \rightarrow V) = \text{hom}(V' \rightarrow V, \cdot)$$

d'où le :

Corollaire 6 : Le foncteur $h : V \rightarrow \text{hom}(\cdot, V)$ de \mathcal{D} dans $\mathcal{D}^{\circ}Ab$ est pleinement
fidèle.

Ce qui nous permettra d'identifier chaque objet de \mathcal{D} à l'objet de $\mathcal{D}^{\circ}Ab$ qu'il représente.

Les objets de $\mathcal{D}^{\circ}Ab$ seront appelés les préfaisceaux additifs de groupes définis sur \mathcal{D} ; de façon plus générale, pour deux catégories préadditives A et \mathcal{D} , les objets de $\mathcal{D}^{\circ}A$ seront les préfaisceaux à valeurs dans A définis sur \mathcal{D} .

Pour en terminer avec ces prémisses, voici encore un résultat important :

Soit C une catégorie pré-additive, pour tout objet P de $C^{\circ}Ab$, désignons par C_P la catégorie des objets de C pointés par P , i.e, les objets de C_P sont les couples (U, u) , $u \in P(U)$ et les morphismes $(U, u) \rightarrow (V, v)$ sont les morphismes $U \rightarrow V$ de C pour lesquels $P(u \rightarrow V)(v) = u$; il existe un foncteur évident de C_P dans C , c'est le foncteur source i_P .

Ceci dit, on a le :

(1.3.3) Lemme : tout objet P de $C^{\circ}Ab$ est la limite à droite du foncteur $h \cdot i_P$.

Pour mettre l'objet P au-dessous de $h.i_P$, considérons, pour tout objet (U,u) de C_P et tout objet V de G , l'application :

$$\phi_V(U,u) : \text{hom}(V,U) \rightarrow P(V)$$

définie par :

$$\phi_V(U,u)(f) = P(f)(u) \quad , \quad f : V \rightarrow U$$

ce qui, de façon évidente, donne les morphismes fonctoriels :

$$\phi(U,u) : h.i_P(U,u) = h(U) \rightarrow P. \text{ et } i$$

et il est aisé de voir que ces morphismes sont compatibles avec ceux de C_P .

Il reste donc à établir que, pour tout V :

$$P(V) = \varinjlim \text{hom}(V,.) i_P$$

Comme, pour tout élément v de $P(V)$:

$$\phi_V(V,v)(1_V) = v$$

on voit tout d'abord que l'application :

$$\sum_{(U,u) \in C_P} \text{hom}(V,U) \rightarrow P(V)$$

de composantes $\phi_V(U,u)$, est surjective ; pour montrer qu'elle induit une bijection de $\varinjlim \text{hom}(V,.) i_P$ sur $P(V)$, il suffira de prouver que l'équivalence (R) associée à cette application est plus fine que l'équivalence (S) qui définit cette limite :

A cet effet, considérons deux objets (U_1, u_1) et (U_2, u_2) de C_P et deux morphismes $f_1 : V \rightarrow U_1$ et $f_2 : V \rightarrow U_2$ de C , congrus (R),

$$\text{i.e.}, P(f_1)(u_1) = P(f_2)(u_2) \quad (=v) ;$$

ceci fait de (V,v) un objet de C_P et de f_1 et f_2 des morphismes de C_P et, comme on peut écrire alors que :

$$f_i = \text{hom}(V,.) i_P(f_i)(1_V) \quad ; \quad i = 1,2$$

on a bien $f_1 \equiv 1_V \equiv f_2$ (S) C.Q.F.D.

En gros, ceci revient à dire que, dans C^0Ab , tout objet est limite à droite des préfaisceaux représentables qui sont au-dessus de lui.

Corollaire : Si A est une catégorie additive complète à droite, tout foncteur

additif $f : C \rightarrow A$ se prolonge suivant un foncteur unique (à un isomorphisme près) ${}_*f : C^0Ab \rightarrow A$ qui présERVE les limites à droite.

Ce foncteur ${}_*f$ est adjoint à gauche au foncteur $f_* : A \rightarrow \text{hom}(f, A)$.

Il est aisé de voir, en effet, que le foncteur $P \rightarrow \varinjlim f \cdot \mathcal{I}_P$ est le seul à répondre à la question.

A titre de première application, nous allons retrouver une propriété caractéristique des catégories de foncteurs additifs de groupes (cf [1], p. 109) :

Théorème : Si une catégorie A , additive, balancée, complète à droite, possède

une famille génératrice de petits projectifs G_i alors, elle est équivalente à la catégorie des préfaisceaux additifs de groupes définis sur la sous-catégorie pleine G de A engendrée par les G_i .

Rappelons qu'un objet P d'une catégorie additive A en est un petit projectif si le foncteur $\text{hom}(P, \cdot)$ de A dans Ab préserve les limites à droite.

Pour prouver ce théorème, remarquons que, dans l'adjonction $({}_*f, f^*)$, définie selon le corollaire précédent par l'inclusion $f : G \rightarrow A$, le foncteur f^* est fidèle et commute aux limites à droite ; or, ce dernier point entraîne que $f^* \cdot {}_*f$, dont la restriction à G est l'identité, reste dans G^0Ab isomorphe au foncteur neutre, i.e., ${}_*f$ est pleinement fidèle et il suffit alors d'appliquer le corollaire de (1.3.1).

Corollaire : Lorsque (G_i) est réduite à un seul objet G (i.e., G est un

petit générateur projectif) alors A est équivalente à la catégorie des modules à droite sur l'anneau des endomorphismes de G .

Remarque : Ce théorème, énoncé pour une catégorie abélienne A , est dû à Freyd ; nous n'en donnons ici qu'une légère amélioration (additif + balancée). Il est amusant de retrouver à partir de là une petite chose bien connue : à savoir que la catégorie des espaces vectoriel topologiques sur un corps topologique est balancée si, et seulement si, ce corps est discret.

2 - Sites et faisceaux :

(2.1) Rappelons qu'une topologie T (de Grothendieck) sur une catégorie C consiste en la donnée, pour tout objet U de C , d'une classe de familles $(U_\alpha \rightarrow U)$ (les recouvrements de T) sous les conditions suivantes :

(t.1) Les familles $U_\alpha \rightarrow U = 1_U$ sont des recouvrements

(t.2) Pour tout recouvrement $U_\alpha \rightarrow U$ et tout morphisme $V \rightarrow U$, les produits fibrés $V_\alpha \rightarrow U_\alpha \rightarrow U$ sont définis et la famille $V_\alpha \rightarrow V$, ainsi obtenue par changement de base, est un recouvrement.

(t.3) Si $U_\alpha \rightarrow U$ est un recouvrement et si, pour tout α , la famille $U_{\beta\alpha} \rightarrow U_\alpha$ est un recouvrement alors, la famille composée $U_{\beta\alpha} \rightarrow U_\alpha \rightarrow U$ est un recouvrement.

Exemples :

1/ La topologie grossière où les recouvrements sont neutres ; la topologie discrète où toute famille $U_\alpha \rightarrow U$ est un recouvrement.

2/ Dans une catégorie à 2-produits fibrés, les épimorphismes universels constituent, un à un, les recouvrements d'une topologie (la topologie épique). Cette topologie sera utilisée pour les catégories abéliennes où l'on sait notamment, que les épimorphismes sont universels.

Définition : Un préfaisceau P défini dans C et à valeurs dans A est un infaisceau pour une topologie T sur C si, pour tout recouvrement

$U_\alpha \rightarrow U$ de \mathcal{T} et tout objet A de \mathcal{A} , l'application :

$$\text{hom}(A, P(U)) \rightarrow \coprod_{\alpha} \text{hom}(A, P(U_\alpha))$$
 est injective.

Si, de plus, le diagramme

$$\text{hom}(A, P(U)) \rightarrow \coprod_{\alpha} \text{hom}(A, P(U_\alpha)) \rightarrow \coprod_{\alpha, \beta} \text{hom}(A, P(U_{\alpha\beta}))$$

défini par les produits fibrés :

$$\begin{array}{ccc} U & \rightarrow & U_\alpha \rightarrow U \\ \alpha\beta \rightarrow & & U_\beta \rightarrow U \end{array}$$

représente un noyau, on dit que P est un faisceau pour \mathcal{T} .

Remarques :

1/ Si \mathcal{A} est à produits, ceci revient à dire que $P(U) \rightarrow \coprod_{\alpha} P(U_\alpha)$ est monique (pour les infrafaisceaux) ; que $P(U) \rightarrow \coprod_{\alpha} P(U_\alpha) \rightarrow \prod_{\alpha\beta} P(U_{\alpha\beta})$ est un noyau (pour les faisceaux).

2/ En explicitant complètement la définition, on remarquera que P est un faisceau si, et seulement si, la famille $P(U) \rightarrow P(U_\alpha)$ représente $P(U)$ comme limite à gauche du système de diagrammes.

$$\begin{array}{ccc} P(U_\alpha) & \rightarrow & \\ P(U_\beta) & \rightarrow & P(U_{\alpha\beta}) \end{array}$$

obtenu lorsque U_α et U_β décrivent le recouvrement $(U_\alpha \rightarrow U)$.

Avant de déterminer les faisceaux de la topologie épique d'une catégorie abélienne, procédons à quelques généralités :

Dans une catégorie à 2-produits fibrés, le produit fibré $R \rightrightarrows A$ d'un morphisme $A \rightarrow A'$ par lui-même s'appelle la relation d'équivalence de ce morphisme ; il est aisé de voir que les composantes de cette relation d'équivalence ont une section commune et que cette section est le noyau de la relation d'équivalence ; de plus, lorsque $A \rightarrow A'$ est épique, c'est le conoyau de sa relation d'équivalence si, et seulement si, $R \rightrightarrows A \rightarrow A'$ représente une

somme fibrée or cette dernière condition est satisfaite dans les catégories abéliennes. Ceci dit, on a la :

(2.1.1) Proposition : Soit A et B deux catégories abéliennes ; dans $A^{\circ}B$, les infrafaisceaux (faisceaux) de la topologie épique de A sont les préfaisceaux qui transforment les épimorphismes en monomorphismes (les conoyaux en noyaux).

La première assertion étant triviale, démontrons la seconde.

Si P est un préfaisceau exact à gauche, il transforme tout conoyau $R \twoheadrightarrow A \rightarrow A'$ en un noyau $P(A') \rightarrow P(A) \twoheadrightarrow P(R)$; or, d'après ce qui précède, c'est ce qui se passe lorsque $R \twoheadrightarrow A$ est la relation d'équivalence d'un épimorphisme $A \rightarrow A'$; ainsi, P est un faisceau pour la topologie épique de A .

Réciproquement, si F est un faisceau pour cette topologie, considérons une suite exacte $0 \rightarrow A'' \rightarrow A \rightarrow A' \rightarrow 0$ et la relation d'équivalence $u, v : R \twoheadrightarrow A$ de $A \rightarrow A'$ alors, on sait que $A'' \rightarrow A$ se factorise suivant $A'' \rightarrow R \xrightarrow{u} A$ où $A'' \rightarrow R$ est le noyau de v ce qui donne une suite exacte et fisible $0 \rightarrow A'' \twoheadrightarrow R \xrightarrow{v} A \rightarrow 0$; comme F est additif, il s'ensuit dans B , un diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & F(A') & \longrightarrow & F(A) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & F(A) & \longleftarrow & F(R) & \longleftarrow & F(A'') \longrightarrow 0
 \end{array}$$

dont le carré représente le noyau de $F(A) \twoheadrightarrow F(R)$; comme les morphismes de cette paire possèdent une rétraction commune, ce carré représente aussi un produit fibré et, par conséquent, la suite $0 \rightarrow F(A') \rightarrow F(A) \rightarrow F(A'')$ est exacte.

(2.2) Soit C une catégorie pré-additive et U un objet de C ; tout sous-objet de U dans $C^{\circ}Ab$ sera appelé un idéal sur U ; l'immersion canonique de C dans

$C^{\circ}Ab$ permet d'expliciter cette définition dans C : en effet, un idéal sur U consiste en la donnée, pour tout objet V de C , d'un groupe de morphismes de V dans U de telle sorte que ces groupes soient compatibles avec les morphismes $V' \rightarrow V$ de C ce qui, en clair, signifie qu'un idéal sur U est une classe Γ de morphismes de but U qui satisfait aux conditions suivantes :

(i.1) Pour tout morphisme $V \rightarrow U$ de Γ et tout morphisme $V' \rightarrow V$ de C , le morphisme composé $V' \rightarrow V \rightarrow U$ appartient à Γ .

(i.2) Pour toute paire $v, v' : V \rightarrow U$ de morphismes de Γ , $v+v'$ appartient à Γ .

Il est clair que toute intersection d'idéaux sur U est un idéal sur U ce qui permet de parler de l'idéal sur U engendré par une famille $(U_i \rightarrow U)$ de morphismes de C : cet idéal est constitué par les morphismes $V \rightarrow U$ qui se décomposent en une somme de morphismes de la forme $V \rightarrow U_i \rightarrow U$.

D'après Yoneda et (1.3.3), on peut écrire (abusivement) pour tout idéal Γ sur U :

$$\Gamma = \varinjlim_{V \in \Gamma} V \quad (C^{\circ}Ab)$$

i.e., le préfaisceau Γ est limite à droite du foncteur source de la catégorie (Γ) dont les objets sont les morphismes $V \rightarrow U$ de Γ et les morphismes sont les morphismes $V' \rightarrow V$ compatibles avec ces objets.

Par changement de base $u : U' \rightarrow U$, on passe d'un idéal Γ sur U à un idéal $u^*(\Gamma)$ sur U' ; explicitement, cet idéal est constitué par les morphismes $V' \rightarrow U'$ tels que $V' \rightarrow U' \rightarrow U$ appartienne à Γ .

Nous appellerons pré-site \mathcal{E} sur C la donnée, pour tout objet U de C , d'une classe non vide $\mathcal{E}(U)$ d'idéaux sur U sous les conditions suivantes :

(s.1) Chaque $\mathcal{E}(U)$ contient les idéaux sur U plus grands qu'un idéal de $\mathcal{E}(U)$;

(s.2) Les $\mathcal{E}(U)$ sont stables par changement de base.

Explicitement, cette dernière condition signifie que, pour tout morphisme $u : U' \rightarrow U$ de \mathcal{C} et pour tout idéal Γ de $\mathcal{E}(U)$, l'idéal $u^{-1}(\Gamma)$ appartient à $\mathcal{E}(U')$.

Remarquons que (s.1) entraîne que toute $\mathcal{E}(U)$ contient l'idéal trivial sur U (i.e, tous les morphismes de but U sont dans cet idéal).

Un pré-site sera d'autant plus fin qu'il comportera plus d'idéaux.

Etant donné un pré-site \mathcal{E} sur \mathcal{C} , on dit qu'un monomorphisme $P' \rightarrow P$ de \mathcal{C}^{ob} est couvrant si, par changement de base au-dessus des objets de \mathcal{C} , il donne des idéaux de \mathcal{E} ; il est clair qu'un idéal $\Gamma \rightarrow U$ est couvrant si, et seulement si, il appartient à $\mathcal{E}(U)$.

Dans \mathcal{C}^{ob} , la classe des monomorphismes couvrants pour \mathcal{E} est stable par changement de base, de plus :

a/ Tout isomorphisme est couvrant.

b/ Deux monomorphismes composables sont couvrants dès que leurs composé l'est.

On dit qu'un pré-site \mathcal{E} sur une catégorie pré-additive \mathcal{C} est un site si les monomorphismes couvrants de \mathcal{E} sont stables par composition; cette condition se traduit aisément dans \mathcal{C} suivant :

(s.3) Pour tout objet U de \mathcal{C} et tout idéal Γ de $\mathcal{E}(U)$, un idéal Γ' sur U , plus petit que Γ , appartient à $\mathcal{E}(U)$ dès que, pour tout morphisme $V \rightarrow U$ de Γ l'idéal sur V , obtenu à partir de Γ' par changement de base, appartient à $\mathcal{E}(V)$.

Exemples :

1/ Le site grossier dont les idéaux couvrants sont triviaux; le site discret où tout idéal est couvrant.

2/ Il est aisé de voir que les idéaux engendrés par les recouvrements d'une topologie et les idéaux plus grands forment un site ; à la topologie grossière (discrète) correspond le site grossier (discret).

Des axiomes de sites, il résulte immédiatement que :

(2.2.1) Proposition : Pour tout site \mathcal{C} sur C et tout objet P de $C^{\circ}Ab$, l'ordre

$\mathcal{C}(P)$ des sous-objets couvrants de P est un filtre.

Si \mathcal{C} est le site d'une topologie sur C , la classe $\mathfrak{B}(U)$ des idéaux engendrés par les recouvrements d'un objet U est une base du filtre $\mathcal{C}(U)$ et le système des $\mathfrak{B}(U)$ est stable par les changements de base $U' \rightarrow U$. De façon générale, nous dirons, pour un site \mathcal{C} , qu'un tel système \mathfrak{B} de bases $\mathfrak{B}(U)$ est une base de \mathcal{C} .

Par rapport à un site \mathcal{C} sur C , on dit qu'un morphisme $P' \rightarrow P$ de $C^{\circ}Ab$ est couvrant si son image est un sous-objet couvrant de P ; un tel morphisme sera bicouvrant si, de plus, le noyau de sa relation d'équivalence est couvrant. On remarquera que, pour tout diagramme commutatif $P'' \rightrightarrows P' \rightarrow P$ où $P' \rightarrow P$ est bicouvrant, le noyau de $P'' \rightrightarrows P'$ est couvrant ; réciproquement, si, pour tout diagramme commutatif $U \rightrightarrows P' \rightarrow P$, tel que U soit un objet de C et $P' \rightarrow P$ un morphisme couvrant, le noyau de $U \rightrightarrows P'$ est couvrant alors, $P' \rightarrow P$ est bicouvrant.

Exemples : tout épimorphisme est couvrant ; tout monomorphisme couvrant est bicouvrant.

(2.2.2) Proposition : Pour un site \mathcal{C} sur C , les morphismes couvrants (bicouvrants) de $C^{\circ}Ab$ sont stables, par changement de base. (vérification de routine).

Remarque : Pour qu'un morphisme $P' \rightrightarrows P$ soit couvrant, il suffit que, pour tout morphisme $U \rightarrow P$ au-dessous d'un objet de C , on puisse trouver une insertion commutative $Q \begin{matrix} \rightarrow U \\ \rightarrow P' \end{matrix} \rightarrow P$ où $Q \rightarrow U$ est couvrant.

(2.2.3) Proposition : Les morphismes couvrants (bicouvrants) sont stables par composition.

La seconde assertion résulte aisément de la première qu'on démontre en se limitant à un monomorphisme couvrant $P' \rightarrow P$ et à un épimorphisme $P \rightarrow P''$ sans perte de généralité : soit $U \rightarrow P''$ un objet de C au-dessus de P'' ; on sait alors que $P(U) \rightarrow P''(U)$ est surjective, i.e, d'après Yoneda, que $\text{hom}(U, P) \rightarrow \text{hom}(U, P'')$ est surjective, i.e, $U \rightarrow P''$ se factorise à travers P ; de la sorte, en composant le produit fibré $\Gamma \begin{array}{c} \rightarrow U \\ \rightarrow P' \end{array} \rightarrow P$ avec $P \rightarrow P''$, on obtient une insertion commutative répondant aux conditions de la remarque précédente, ce qui fait que $P' \rightarrow P \rightarrow P''$ est couvrant.

Corollaire 1 : Si, dans un diagramme commutatif $Q' \rightarrow Q \rightarrow P$ de $C^{\circ}Ab$, les morphismes $Q' \rightarrow P$ et $Q \rightarrow P$ sont bicouvrants alors, $Q' \rightarrow Q$ l'est aussi. (Vérification diagrammatique).

Corollaire 2 : La catégorie $\mathcal{E}^2(P)$ des objets de $C^{\circ}Ab$ bicouvrant un préfaisceau P pour un site \mathcal{C} est à 2-produits et noyaux. (La catégorie duale est donc une bonne catégorie).

(2.3) Relativement à un site \mathcal{C} sur C , on dit qu'un objet P de $C^{\circ}Ab$ est un infraisceau (faisceau) si, pour tout objet U de C et tout idéal couvrant $\Gamma \rightarrow U$, l'application

$$\text{hom}(U, P) \rightarrow \text{hom}(\Gamma, P)$$

est injective (bijective).

Explicitement cette application se présente sous la forme

$$P(U) \rightarrow \varprojlim_{V \in \Gamma} P(V)$$

On remarquera que tout produit de faisceaux (infraisceaux) est un faisceau (infraisceau), que tout sous-objet d'un infraisceau est un infraisceau et que tout noyau de faisceaux est un faisceau ; ainsi, la

sous-catégorie pleine de C^0Ab , constituée par les faisceaux d'un site est complète à gauche.

On remarquera aussi que, pour une suite exacte $0 \rightarrow P' \rightarrow P \rightarrow P'' \rightarrow 0$ de préfaisceaux.

a/ P est un faisceau (infracaisceau) dès que P' et P'' sont des faisceaux (infracaisceaux).

b/ Si P est un infracaisceau et P' un faisceau, P'' est un infracaisceau.

(Pour cela, on appliquera le lemme des 4 au diagramme défini par cette suite exacte et un idéal $\Gamma \rightarrow U$).

Si, pour tout objet U , $\mathcal{B}(U)$ est une base du filtre $\mathcal{G}(U)$, il est clair que P est un infracaisceau dès que, pour les idéaux $\Gamma \rightarrow U$ de $\mathcal{B}(U)$, les applications $\text{hom}(U, P) \rightarrow \text{hom}(\Gamma, P)$ sont injectives ; pour les faisceaux, on a un résultat analogue si l'on précise \mathcal{B} , à savoir :

(2.3.1) Proposition : Si \mathcal{B} est une base du site \mathcal{G} , un préfaisceau P est un faisceau pour \mathcal{G} dès que les applications $F(U) \rightarrow \text{hom}(\Gamma, P)$, définies par les idéaux $\Gamma \rightarrow U$ de \mathcal{B} , sont bijectives.

En effet, tout idéal Γ' de $\mathcal{G}(U)$ contient un idéal Γ de $\mathcal{B}(U)$ et, pour les produits fibrés :

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{V} & \Gamma' \\ & \rightarrow & \Gamma \end{array}, \quad V \in \mathcal{C}$$

on a, d'après (1.3.3) et l'universalité des limites à droite de C^0Ab :

$$\Gamma \rightarrow \Gamma' = \varinjlim_{V \in \Gamma'} (\Delta \rightarrow V)$$

d'où $\text{hom}(\Gamma', P) \rightarrow \text{hom}(\Gamma, P) = \varinjlim_{V \in \Gamma'} \text{hom}(V, P) \rightarrow \text{hom}(\Delta, P)$

Mais, comme les diagrammes composés :

$$\begin{array}{ccccc} \Delta & \xrightarrow{V} & \Gamma' & \rightarrow & U \\ & \rightarrow & \Gamma & \rightarrow & \end{array}$$

représentent des produits fibrés, les composantes de cette limite sont bijectives.

Corollaire : Soit T une topologie sur C et \mathcal{E} le site qu'elle définit ; alors,

un objet P de C^0Ab est un infrafaisceau (faisceau) pour T si, et seulement si, c'est un infrafaisceau (faisceau) pour \mathcal{E} .

En effet, d'après ce qui précède, P est un \mathcal{E} -faisceau si, et seulement si, les idéaux Γ engendrés par les recouvrements $U_\alpha \rightarrow U$ donnent $P(U) \cong \varprojlim_{V \in \Gamma} P(V)$ et, pour prouver que cette limite à gauche est bien le noyau de

$\prod_{\alpha} P(U_\alpha) \rightarrow \prod_{\beta} P(U_{\alpha\beta})$, il suffit de s'appuyer sur le résultat général suivant :

Lemme : Etant donnée, dans une catégorie I , une famille cofinale d'objets

(i_α) telle que tous les produits $i_\alpha \times i_\beta$ existent, on ne change pas la limite à gauche d'un préfaisceau P , défini sur I , en "réduisant" les morphismes de I aux composantes de ces produits $i_\alpha \times i_\beta$

(Pour cela, on verra que toute valeur au-dessus des $P(i_\alpha) \rightarrow P(i_\alpha \times i_\beta) \rightarrow P(i_\beta)$ peut être placée canoniquement au-dessus de P).

(2.3.2) Proposition : Si F est un infrafaisceau (faisceau) pour un site \mathcal{E}

sur C , pour tout morphisme couvrant (bicouvrant) $P \rightarrow Q$, l'application $\text{hom}(Q, F) \rightarrow \text{hom}(P, F)$ est injective (bijjective).

En effet, si $P \rightarrow Q$ est monique, $\text{hom}(Q, F) \rightarrow \text{hom}(P, F)$ est, d'après (2.3.1) une limite à gauche d'injections (bijections) ce qui entraîne la seconde assertion dans ce cas et la première en général.

Pour avoir la seconde assertion en général, il suffira de supposer $P \rightarrow Q$ épique ; dans ce cas, $P \rightarrow Q$ est le conoyau de sa relation d'équivalence $R \rightrightarrows P$ (cette propriété est évidente pour les groupes donc pour les préfaisceaux) et, par conséquent, $\text{hom}(Q, F) \rightarrow \text{hom}(P, F) \rightrightarrows \text{hom}(R, F)$ est un noyau ; comme le noyau $S \rightarrow R$ de $R \rightrightarrows P$ est couvrant, il s'ensuit que $\text{hom}(R, F) \rightarrow \text{hom}(S, F)$ est bijective, i.e, les deux morphismes $\text{hom}(P, F) \rightrightarrows \text{hom}(R, F)$ sont égaux et

qu'ainsi, $\text{hom}(Q, F) \rightarrow \text{hom}(P, F)$ est bijective.

3. Beaux sites.:

(3.1) Nous dirons qu'un site \mathcal{C} sur une catégorie pré-additive C est beau si :

(b.1) Il existe une base \mathcal{B} de \mathcal{C} telle que, pour tout objet U de C et tout idéal Γ de $\mathfrak{A}(U)$, les classes $\text{hom}(\Gamma, P)$, $P \in C^{\text{op}}\text{Ab}$, sont des ensembles.

(b.2) Chaque base $\mathcal{B}(U)$ possède une base $\mathcal{B}'(U)$ qui est un ensemble.

Exemples :

1/ Sur une petite catégorie, tout site est beau.

2/ Le site d'une topologie satisfait à la condition (b.1) parce que, pour l'idéal Γ engendré par un recouvrement $U_{\alpha} \rightarrow U$, on a (2.3.1 ; cor) :

$$\text{hom}(\Gamma, P) = \ker. \prod_{\alpha} P(U_{\alpha}) \xrightarrow{\rightarrow} \prod_{\alpha, \beta} P(U_{\alpha\beta})$$

En général, on n'est pas assuré de (b.2), cependant :

3/ Si les épimorphismes de C sont universels (i.e stables par changement de base) et si C possède un générateur (gros générateur) G dont toutes les sommes ΣG (les sommes finies) sont définies alors, le site de la topologie épique de C est beau : en effet, soit $V \rightarrow U$ un épimorphisme ; de toute paire $U \rightrightarrows U'$ de morphismes distincts on déduit, par composition, une paire $V \rightrightarrows U'$ de morphismes distincts ; il existe alors un morphisme $G \rightarrow V$ qui, par composition, donne une paire $G \rightrightarrows U'$ de morphismes distincts ce qui signifie qu'on a un ensemble (fini) I , de morphismes de G dans U factorisés par $V \rightarrow U$, tel que $\sum_I G \rightarrow U$ soit épique ; ainsi, tout idéal engendré par un épimorphisme de $\text{bit } U$ contient l'idéal engendré par un épimorphisme $\sum_I G \rightarrow U$ où I est une partie (finie) de $\text{hom}(G, U)$.

(3.2) Nous allons voir maintenant comment, sur un beau site, on peut associer à tout préfaisceau P un faisceau "universel".

En général, l'expression $\lim_{\Gamma \in \mathcal{B}(U)} \text{hom}(\Gamma, P)$ (i.e, la limite à droite du "foncteur" obtenu en composant $\text{hom}(\cdot, P)$ avec le foncteur source de $\mathcal{C}(U)$ dans \mathcal{C}) n'a pas de sens ; mais, si le site est beau, les classes $\text{hom}(\Gamma, P)$ sont des ensembles lorsque Γ décrit une (belle) base \mathcal{B} de \mathcal{C} et, pour une (petite) base $\mathcal{B}'(U)$ de $\mathcal{B}(U)$, $\lim_{\Gamma \in \mathcal{B}'(U)} \text{hom}(\Gamma, P)$ est alors définie, ce qui permet, vue la bonne catégorie $\mathcal{C}(U)^\circ$, de définir $\lim_{\Gamma \in \mathcal{B}(U)} \text{hom}(\Gamma, P) = P^+(U)$.

Le changement de base $\Gamma \xrightarrow[\gamma]{\gamma'} U' \xrightarrow[u]{u} U$, défini par un morphisme u de \mathcal{C} donne, à la limite, un morphisme $P^+(U) \rightarrow P^+(U')$ qui, par transitivité, fait de P^+ un préfaisceau et, en désignant par ϕ_γ le morphisme composé $\text{hom}(\Gamma, P) \rightarrow P^+(U) \xrightarrow{\sim} \text{hom}(U, P^+)$, on a alors le diagramme commutatif.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{hom}(\Gamma, P) & \xrightarrow{\phi_\gamma} & \text{hom}(U, P^+) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{hom}(\Gamma', P) & \xrightarrow{\phi_{\gamma'}} & \text{hom}(U', P^+)
 \end{array}$$

c'est-à-dire que :

$$(1) \quad \phi_{\gamma'}(f.x) = \phi_\gamma(f).u \quad , \quad f : \Gamma \rightarrow P$$

Par ailleurs, on peut supposer que l'idéal $1 : U \rightarrow U$ appartient à $\mathcal{B}(U)$ ce qui donne une application additive

$$P(U) \xrightarrow{\Pi_U} P^+(U)$$

naturelle en U d'où :

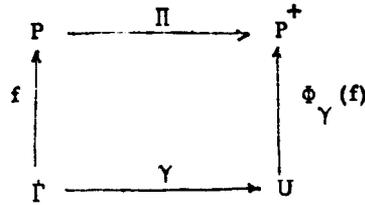
$$P(U) \xrightarrow{\Pi_U} P^+(U) = \text{hom}(U, P) \xrightarrow{\text{hom}(U, \Pi)} \text{hom}(U, P^+) = \phi_1$$

c'est-à-dire que :

$$(2) \quad \Pi.g = \phi_1(g) \quad , \quad g : U \rightarrow P$$

Avec ceci, on a le :

Lemme : Pour tout idéal $\gamma : \Gamma \rightarrow U$ de \mathcal{B} et tout morphisme $f : \Gamma \rightarrow P$, le diagramme de préfaisceaux



est commutatif.

A cet effet, considérons les éléments $u : V \rightarrow U$ de Γ ; ils se factorisent dans \mathcal{C}^0Ab suivant $V \xrightarrow{x} \Gamma \xrightarrow{\gamma} U$ et :



est évidemment un produit fibré ; les formules (2) et (1) donnent alors :

$$\Pi f.x = \phi_1(f.x) = \phi_\gamma(f).u = \phi_\gamma(f).\gamma.x$$

et, comme $\Gamma = \varinjlim V$, il s'ensuit que $\Pi.f = \phi_\gamma(f).\gamma$

(3.2.1) Proposition : Avec les notations précédentes :

- a/ Π est bicouvrant ;
- b/ P^+ est un infrafaisceau ;
- c/ Si P est un infrafaisceau, Π est monique et P^+ est un faisceau ;
- d/ Si P est un faisceau, Π est inversible.

Tout d'abord, on sait que la limite inductive $P^+(U) = \text{hcm}(U, P^+)$ est la réunion des images de ses composantes, i.e, tout morphisme $U \rightarrow P^+$ est de la forme $\phi_\gamma(f)$ où $\gamma : \Gamma \rightarrow U$ est un idéal de \mathfrak{B} et f un morphisme de Γ dans P ; le lemme qui précède montre alors que Π est couvrant. Si $f, g : U \rightarrow P$ est telle que $\Pi.f = \Pi.g$, i.e, $\phi_1(f) = \phi_1(g)$, on sait qu'il existe alors un idéal $\gamma : \Gamma \rightarrow U$ de \mathfrak{B} tel que $f.\gamma = g.\gamma$, i.e, Π est bicouvrant.

Avant de montrer que P^+ est un infrafaisceau, remarquons que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 P & \xrightarrow{\Pi} & P^+ \\
 \uparrow u & & \uparrow \phi_{\gamma}(u) \\
 \Gamma & \xrightarrow{\gamma} & U
 \end{array}$$

se "maintient" lorsqu'on diminue Γ dans $\mathcal{B}(U)$, i.e, pour $\gamma' : \Gamma' \rightarrow U = \Gamma \xrightarrow{i} \Gamma \xrightarrow{\gamma} U$ on a $\phi_{\gamma'}(u) = \phi_{\gamma}(u.i)$; ceci dit, soit $\gamma : \Gamma \rightarrow U$ un idéal de \mathcal{B} et $f, g : U \rightarrow P^+$ une paire telle que $f.\gamma = g.\gamma$; il existe alors un idéal $\gamma' : \Gamma' \rightarrow U$ de \mathcal{B} , plus petit que Γ et une paire $u, v : \Gamma' \rightarrow P$ tels que $f = \phi_{\gamma'}(u)$, $g = \phi_{\gamma'}(v)$ et $\Pi.u = \Pi.v$ mais, Π étant bicouvrant, on peut trouver un égaliseur $i : \Gamma'' \rightarrow \Gamma'$ de (u, v) tel que $\gamma'' = \gamma'.i$ soit un idéal de $\mathcal{B}(U)$ d'où $f = \phi_{\gamma''}(u.i) = \phi_{\gamma''}(v.i) = g$ ce qui prouve que P^+ est un infrafaisceau.

Si P est un infrafaisceau, les composantes Π_U sont injectives en tant que limites inductives d'injections et, par conséquent, Π est monique dans $\mathcal{C}^0\text{Ab}$. Considérons maintenant un idéal $\gamma : \Gamma \rightarrow U$ de \mathcal{B} et un morphisme $u : \Gamma \rightarrow P^+$; Π étant un monomorphisme couvrant, on peut insérer ces morphismes dans un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 \Gamma' & \xrightarrow{i} & \Gamma & \xrightarrow{\gamma} & U \\
 \downarrow & & \downarrow u & & \\
 P & \xrightarrow{\Pi} & P^+ & &
 \end{array}$$

où $\gamma' = \gamma.i$ est un idéal de \mathcal{B} et, d'après le lemme précédent, il existe alors un morphisme $v : U \rightarrow P^+$ tel que $v.\gamma.i = u.i$; comme P^+ est un infrafaisceau, il s'ensuit que $v.\gamma = u$, i.e, $\text{hom}(U, P^+) \rightarrow \text{hom}(\Gamma, P)$ est surjective ce qui, d'après (2.3.1), assure que P^+ est un faisceau.

Quant à l'assertion d/ elle est évidente (la limite inductive d'un foncteur constant est égale à la valeur de ce foncteur).

Corollaire 1 : $P \rightarrow P^{++}$ est un objet initial de la catégorie des \mathcal{C} -faisceaux

| au-dessous du préfaisceau P .

Corollaire 2 : L'inclusion dans C^0Ab de la sous-catégorie pleine des \mathcal{G} -faisceaux

| admet un adjoint à gauche exact.

(L'exactitude à gauche du foncteur faisceau associé : $a : P \rightarrow P^{++}$ résulte de sa construction par limites inductives).

(3.2.2) Théorème : Soit \mathcal{G} un beau site sur une catégorie pré-additive C ;

alors, la catégorie $C_{\mathcal{G}}$ des \mathcal{G} -faisceaux de groupes est abélienne et complète.

On sait déjà que c'est une sous-catégorie complète à gauche de C^0Ab ; l'adjonction $a : P \rightarrow P^{++}$ en fait une catégorie complète à droite : en effet, toute famille de faisceaux F_i de somme P dans C^0Ab est de somme $a(P)$ dans $C_{\mathcal{G}}$ et, si $F' \rightarrow F \rightarrow P \rightarrow 0$ est une suite exacte de C^0Ab où F' et F sont des faisceaux alors, la suite $F' \rightarrow F \rightarrow a(P) = P^+ \rightarrow 0$ est exacte dans $C_{\mathcal{G}}$.

De plus :

(3.2.3) Proposition : Dans C^0Ab , les catégories de faisceaux sont stables

| par enveloppes injectives.

Compte tenu du fait évident qu'un infrafaisceau injectif est un faisceau, il suffira de montrer que :

Lemme : Toute extension essentielle d'un infrafaisceau est un infrafaisceau.

En effet, si $F \rightarrow P$ est une telle extension, pour tout idéal couvrant $\Gamma \rightarrow U$ et tout morphisme $U \rightarrow P$ de composé nul on a, avec le produit fibré $\Gamma' \rightarrow U \rightarrow P$ un morphisme nul $\Gamma \rightarrow \Gamma' \rightarrow F$; comme $\Gamma \rightarrow \Gamma'$ est un monomorphisme couvrant et F un infrafaisceau, il s'ensuit (2.3.2) que $\Gamma' \rightarrow F = 0$ ce qui, du fait que $F \rightarrow P$ est essentiel, donne $U \rightarrow P = 0$.

Corollaire : Soit C une petite catégorie pré-additive et \mathcal{G} un beau site sur

| C ; alors la catégorie abélienne des \mathcal{G} -faisceaux de groupes est à

| enveloppes injectives.

Car (lemme de Kan, corollaire 4) $C^{\circ}Ab$ est à enveloppes injectives et les sous-catégories de faisceaux sont exactes à gauche.

Voici une autre conséquence intéressante de (3.2.1) :

(3.2.4) Proposition : Pour un beau site \mathcal{E} sur une catégorie pré-additive C et un morphisme $P \rightarrow Q$ de $C^{\circ}Ab$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- a/ $P \rightarrow Q$ est bicouvrant pour \mathcal{E} ;
- b/ Pour tout \mathcal{E} -faisceau F , l'application $\text{hom}(Q, F) \rightarrow \text{hom}(P, F)$ est bijjective ;
- c/ $P^{++} \rightarrow Q^{++}$ est un isomorphisme de \mathcal{E} -faisceau.

On sait déjà (2.3.2) que a/ implique b/ qui donne c/ par adjonction ; enfin c/ entraîne a/ compte tenu du fait que les morphismes d'adjonction $P \rightarrow P^{++}$ et $Q \rightarrow Q^{++}$ sont bicouvrant (2.2.3 ; cor. 1).

Corollaire : Un beau site est déterminé par ses faisceaux.

4. Faisceaux images :

(4.1) Revenons à l'adjonction (1.3.3 ; cor.) définie par un foncteur additif $f : C \rightarrow D$ de catégories pré-additives entre les "catégories" $C^{\circ}Ab$ et $D^{\circ}Ab$: l'adjoint à droite $f^* : D^{\circ}Ab \rightarrow C^{\circ}Ab$ est défini par $f^*(Q) = \text{hom}(f., Q)$ et l'adjoint à gauche $*f : C^{\circ}Ab \rightarrow D^{\circ}Ab$ par $*f(P) = \varinjlim f \cdot i_p$ où i_p est le foncteur source de C_p dans C , alors :

(4.1;1) Lemme : Si f est pleinement fidèle, $*f$ l'est aussi.

En effet, comme $*f$ commute aux limites à droite et f^* aussi (ce qui est évident), le morphisme d'adjonction $1 \rightarrow f^* \cdot *f$, qui est inversible sur C , reste inversible dans $C^{\circ}Ab$.

C.Q.F.D.

D'autre part, $\ast f \cdot f^{\ast}(V)$ est, pour chaque objet V de \mathcal{D} , la limite à droite des objets de \mathcal{C} placés par f au-dessus de V et, par conséquent, dans $\mathcal{D}^{\circ}Ab$, l'image de la composante $\ast f \cdot f^{\ast}(V) \rightarrow V$ du morphisme d'adjonction $\ast f \cdot f^{\ast} \rightarrow 1$ est le sup. des images des morphismes $f(U) \rightarrow V$, i.e, c'est l'idéal sur V engendré par les morphismes $f(U) \rightarrow V$.

Pour un site \mathcal{D} sur \mathcal{D} , nous dirons que le foncteur f est dominant si toutes les composantes $\ast f \cdot f^{\ast}(V) \rightarrow V$ sont couvrantes pour \mathcal{D} ; il en résulte alors que, pour tout objet Q de $\mathcal{D}^{\circ}Ab$, $\ast f \cdot f^{\ast}(Q) \rightarrow Q$ est couvrant. Si f est pleinement fidèle, ces morphismes sont tous bicouvrants: il est aisé de voir, en effet, que, compte tenu de la pleine fidélité de $\ast f$, le morphisme couvrant $\ast f \cdot f^{\ast}(Q') \rightarrow Q'$ est un égaliseur de toute paire $Q' \rightrightarrows \ast f \cdot f^{\ast}(Q)$ égalisée par $\ast f \cdot f^{\ast}(Q) \rightarrow Q$.

Nous dirons qu'un objet U de \mathcal{C} domine un site \mathcal{E} sur \mathcal{C} si la sous-catégorie pleine $\text{end}(U)$ domine \mathcal{E} .

Exemple: Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne; pour qu'un objet U de \mathcal{C} domine la topologie épique de \mathcal{C} , il faut et il suffit que U soit un gros générateur de \mathcal{C} : en effet, l'idéal Γ sur un objet V engendré par les morphismes de U dans V est constitué par les morphismes $W \rightarrow V$ qui se factorisent suivant $W \rightarrow \sum_J U \rightarrow V$ où J est une partie finie de $I = \text{hom}(U, V)$; or Γ est couvrant pour la topologie si, et seulement si, il contient un épimorphisme, ce qui revient à dire qu'il existe un épimorphisme $\sum_J U \rightarrow V$.

Ceci se présente notamment pour une petite catégorie \mathcal{C} possédant un générateur sommable G , car, en prenant pour I la réunion des ensembles $\text{hom}(G, U)$, $U \in \mathcal{C}$, chaque objet U apparaît comme un quotient de $\sum_I G$.

(4.2) Relativement à deux sites $(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ et $(\mathcal{D}, \mathcal{D})$, on dit qu'un foncteur $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est continu si, pour tout faisceau G de \mathcal{D} , $f^*(G) = \text{hom}(f, G)$ est un faisceau de \mathcal{E} .

(4.2.2) Proposition : Soit $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur additif et \mathcal{D} un site sur \mathcal{D} ; alors, parmi les sites sur \mathcal{C} qui rendent f continu, il en existe un plus fin (Noté $f(\mathcal{D})$).

Pour un tel site \mathcal{E} , il est nécessaire que toutes les images $f^*(G)$ de faisceaux de \mathcal{D} soient des faisceaux ; la proposition résultera alors du :

(4.2.1) Lemme : Soit \mathcal{P} une classe d'objets de \mathcal{C}^{ob} ; les idéaux $\Gamma \rightarrow U$, $U \in \mathcal{C}$, tels que, pour tout changement de base $\Delta \xrightarrow{V} U$ dans \mathcal{C} , les applications $\text{hom}(V, P) \rightarrow \text{hom}(\Delta, P)$, $P \in \mathcal{P}$, soient bijectives, sont les idéaux couvrants d'un site \mathcal{E} ; ce site est le plus fin de ceux pour lesquels les préfaisceaux de \mathcal{P} soient des faisceaux.

La seconde assertion résulte de la première.

Tout d'abord, la condition imposée est faite pour assurer l'axiome (1.2).

Pour prouver (s.1) considérons un idéal $\Gamma' \rightarrow U$ plus grand qu'un idéal $\Gamma \rightarrow U$ de $\mathcal{E}(U)$; soit $V \rightarrow U$ un morphisme de \mathcal{C} et :

$$\begin{array}{ccccc} \Delta & \longrightarrow & \Delta' & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma & \longrightarrow & \Gamma' & \longrightarrow & U \end{array}$$

le changement de base qu'il donne ; avec les changements de base $\phi \xrightarrow{W} \Delta'$, définis par les éléments $W \rightarrow V$ de Δ' , on sait que :

$$\Delta \rightarrow \Delta' = \lim_{\substack{\rightarrow \\ W \in \Delta'}} (\phi \rightarrow W)$$

d'où, pour $P \in \mathcal{P}$:

$$\text{hom}(\Delta', P) \rightarrow \text{hom}(\Delta, P) = \lim_{\substack{\rightarrow \\ W \in \Delta'}} . \text{hom}(W, P) \rightarrow \text{hom}(\phi, P)$$

mais, comme $\phi \begin{array}{c} \rightarrow W \\ \rightarrow \Gamma \end{array} \rightarrow U$ est un produit fibré, il s'ensuit que cette limite à gauche est une bijection et, par suite, $\text{hom}(V, P) \rightarrow \text{hom}(\Delta', P)$ est bijective, i.e., $\Gamma' \in \mathcal{C}(U)$.

Considérons maintenant un idéal $\Gamma \rightarrow U$ de \mathcal{C} et un idéal plus petit $\Gamma' \rightarrow U$ satisfaisant aux hypothèses de (s.3) ; soit :

$$\begin{array}{ccccc} \Delta' & \longrightarrow & \Delta & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma' & \longrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & U \end{array}$$

le changement de base défini par un morphisme $V \rightarrow U$ de \mathcal{C} ; pour $W \rightarrow U \in \Delta$, le changement de base $\phi' \begin{array}{c} \rightarrow W \\ \rightarrow \Delta' \end{array} \rightarrow U$ donne, par composition, un changement de base :

$$\begin{array}{ccccc} \phi' & \longrightarrow & W & & \\ \downarrow & & \downarrow & \searrow & \\ \Gamma' & \longrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & U \end{array}$$

et, comme par hypothèse $\phi' \rightarrow W \in \mathcal{C}(W)$, on a à la limite :

$$\text{hom}(\Delta, P) \cong \text{hom}(\Delta', P) \quad , \quad P \in \mathcal{P}$$

ce qui fait que $\text{hom}(V, P) \rightarrow \text{hom}(\Delta', P)$ est bijective, i.e., $\Gamma' \in \mathcal{C}(U)$

C.Q.F.D.

Lorsque \mathcal{P} est la classe des préfaisceaux représentables (i.e., les objets de \mathcal{C}^{Ab} isomorphes à ceux de \mathcal{C}), le site défini par le lemme s'appelle le site canonique ; en fait, lorsque \mathcal{C} est à 2-produits fibrés, son site canonique est celui d'une topologie : les recouvrements $U_\alpha \rightarrow U$ de la topologie canonique sont les familles épiques strictes universelles de \mathcal{C} , i.e., les familles telles que, pour tous objets V et W de \mathcal{C} , les diagrammes :

$$\text{hom}(V, W) \rightarrow \prod_{\alpha} \text{hom}(V_{\alpha}, W) \rightrightarrows \prod_{\alpha, \beta} \text{hom}(V_{\alpha\beta}, W)$$

définis par les produits fibrés :

$$\begin{array}{ccccc} & & V & \rightarrow & V \\ V & \xrightarrow{\alpha\beta} & V & \xrightarrow{\alpha} & V \\ & & V & \xrightarrow{\beta} & V \end{array} \quad ,$$

représentent des noyaux.

Voici une précision apportée à (4.2.2).

(4.2.3) Proposition : Si un foncteur pleinement fidèle $f : C \rightarrow \mathcal{D}$ domine un beau site \mathcal{D} alors, un idéal de C est couvrant pour $f(\mathcal{D})$ si, et seulement si, son image par $\ast f$ est bicouvrante pour \mathcal{D} .

En effet, si $\Gamma \rightarrow U$ est un idéal couvrant de $f(\mathcal{D})$ on a, pour tout faisceau G de \mathcal{D} : $\text{hom}(U, f^*(G)) \cong \text{hom}(\Gamma, f^*(G))$ d'où, par adjonction, $\text{hom}(f(U), G) \cong \text{hom}(f(\Gamma), G)$ de sorte que, d'après (3.2.4), $\ast f(\Gamma) \rightarrow f(U)$ est bicouvrant pour \mathcal{D} .

Réciproquement, considérons un idéal $\Gamma \rightarrow U$ de C tel que $\ast f(\Gamma) \rightarrow f(U)$ soit bicouvrant pour \mathcal{D} ; compte tenu de la pleine fidélité de $\ast f$ et de la préservation des limites par f^* , on déduit des produits fibrés

$$\begin{array}{ccc} Q & \rightarrow & f(V) \\ & \rightarrow & f(\Gamma) \end{array} \rightarrow f(U) \quad , \quad V \in C \quad ,$$

les produits fibrés

$$\begin{array}{ccc} f^*(Q) & \rightarrow & V \\ & \rightarrow & \Gamma \end{array} \rightarrow U$$

et, comme $\ast f \cdot f^*(Q) \rightarrow Q \rightarrow f(V)$ est bicouvrant, l'application

$\text{hom}(V, f^*(G)) \rightarrow \text{hom}(f^*(Q), f^*(G))$, qui, par adjonction, s'identifie à

$\text{hom}(f(V), G) \rightarrow \text{hom}(\ast f \cdot f^*(Q), G)$, est alors une bijection pour tout faisceau G de \mathcal{D} .

(4.2.4) Corollaire : Un morphisme de C^{Ab} est bicouvrant pour $f(\mathcal{D})$ si, et seulement si, son image par $\ast f$ est bicouvrante pour \mathcal{D} .

Par adjonction, on voit comme précédemment que les morphismes bicouvants sont préservés par $\ast f$.

Réciproquement, considérons un morphisme $P \rightarrow P'$ tel que $\ast f(P) \rightarrow \ast f(P')$

soit bicouvrant ; tout d'abord, si $P' = U \in \mathcal{C}$, la décomposition triangulaire ${}_{*}\mathcal{f}(P) \rightarrow Q \rightarrow \mathcal{f}(U)$ dans $\mathcal{D}^{\circ}Ab$ induit dans $\mathcal{C}^{\circ}Ab$ la décomposition triangulaire $P \rightarrow \mathcal{f}^{*}(Q) \rightarrow U$ (${}_{*}\mathcal{f}$ est pleinement fidèle et \mathcal{f}^{*} est exact) et, comme l'idéal $\mathcal{f}^{*}(Q) \rightarrow U$ devient le morphisme bicouvrant ${}_{*}\mathcal{f} \cdot \mathcal{f}^{*}(Q) \rightarrow Q \rightarrow \mathcal{f}(U)$, il résulte de (4.2.3) que $P \rightarrow U$ est couvrant ; un petit raisonnement par changement de base, analogue à celui de (4.2.3) permet de montrer alors que, pour P' quelconque, $P \rightarrow P'$ est couvrant.

Enfin, pour toute paire $U \rightrightarrows P$ égalisée par $P \rightarrow P'$, le noyau $\Delta \rightarrow \mathcal{f}(U) \rightrightarrows \mathcal{f}(P)$ est un idéal couvrant de sorte que $\mathcal{f}^{*}(\Delta) \rightarrow U$ est un égaliseur couvrant de $U \rightrightarrows P$.

C.Q.F.D.

Désignons par a le foncteur faisceau associé $Q \rightarrow Q^{++}$ dans \mathcal{D} ; avec tout ceci, on a le lemme de réduction de Giraud .

Théorème : Soit \mathcal{D} un beau site sur une catégorie pré-additive \mathcal{D} , \mathcal{C} une sous-catégorie pleine et dominante de \mathcal{D} ; alors, l'inclusion $\mathcal{f} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ définit, au moyen des foncteurs \mathcal{f}^{*} et $a \cdot {}_{*}\mathcal{f}$ une équivalence entre la catégorie des faisceaux de \mathcal{D} et celle des faisceaux de $\mathcal{f}(\mathcal{D})$.

Tout d'abord, le morphisme bicouvrant ${}_{*}\mathcal{f} \cdot \mathcal{f}^{*}(G) \rightarrow G$ devient, pour tout faisceau G de \mathcal{D} , l'isomorphisme $a \cdot {}_{*}\mathcal{f} \cdot \mathcal{f}^{*}(G) \rightarrow a(G) = G$ (3.2.4).

Il s'agit donc de montrer que, pour tout faisceau F de $\mathcal{f}(\mathcal{D})$, $F \rightarrow \mathcal{f}^{*} \cdot a \cdot {}_{*}\mathcal{f}(F)$ est inversible, i.e, pour tout objet U de \mathcal{C} , l'application $\text{hom}(U, F) \rightarrow \text{hom}(\mathcal{f}(U), a \cdot {}_{*}\mathcal{f}(F))$ est bijective ; cette application s'obtient en associant à tout $U \rightarrow F$ le morphisme composé $\mathcal{f}(U) \rightarrow {}_{*}\mathcal{f}(F) \rightarrow a \cdot {}_{*}\mathcal{f}(F)$.

Si deux morphismes $U \rightrightarrows F$ donnent le même composé, il existe, ${}_{*}\mathcal{f}(F) \rightarrow a \cdot {}_{*}\mathcal{f}(F)$ étant bicouvrant, un égaliseur bicouvrant $Q \rightarrow \mathcal{f}(U) \rightrightarrows {}_{*}\mathcal{f}(F)$ d'où l'égaliseur bicouvrant $\mathcal{f}^{*}(Q) \rightarrow U \rightrightarrows F$ et, comme F est un faisceau, il s'ensuit que les deux morphismes $U \rightrightarrows F$ sont égaux.

Considérons maintenant un morphisme $f(U) \rightarrow a_* f(F)$; le changement de base :

$$\begin{array}{c} Q \rightarrow {}^*f(F) \rightarrow a_* f(F) \\ \rightarrow {}^*f(U) \rightarrow a_* f(F) \end{array}$$

donnant un morphisme bicouvrant $Q \rightarrow f(U)$, le morphisme $f^*(Q) \rightarrow U$ est bicouvrant et, par conséquent, $f^*(Q) \rightarrow F$ se factorise par lui ; on obtient alors un morphisme $U \rightarrow F$ tel que :

$${}^*f \cdot f^*(Q) \rightarrow f(U) \rightarrow {}^*f(F) \rightarrow a_* f(F) = {}^*f \cdot f^*(Q) \rightarrow f(U) \rightarrow a_* f(F)$$

mais, puisque $a_* f(F)$ est un faisceau et que ${}^*f \cdot f^*(Q) \rightarrow f(U)$ est bicouvrant, il s'ensuit que :

$$f(U) \rightarrow {}^*f(F) \rightarrow a_* f(F) = f(U) \rightarrow a_* f(F)$$

ce qui termine la démonstration.

5. Applications :

(5.1) Si C est une petite catégorie abélienne, on sait, d'après le lemme de Kan, que la catégorie $C^{\circ}Ab$ est abélienne, complète et à enveloppes injectives ; d'autre part (que C soit petite ou grande) la sous-catégorie pleine \tilde{C} de $C^{\circ}Ab$, constituée par les préfaisceaux exacts à gauche, est la catégorie des faisceaux de la topologie épique de C de sorte que, au moyen du foncteur faisceau associé, qui est exact, \tilde{C} hérite des propriétés de $C^{\circ}Ab$ (3,2 ; 2 et 3) ; de plus :

(5.1.1) Lemme : Toute catégorie abélienne C est équivalente à une sous-catégorie pleine et exacte de \tilde{C} .

Car si $0 \rightarrow U' \rightarrow U \rightarrow U'' \rightarrow 0$ est une suite exacte de C , la suite $0 \rightarrow U' \rightarrow U \rightarrow U''$ reste exacte dans $C^{\circ}Ab$ donc dans \tilde{C} , sous-catégorie exacte à gauche ; pour montrer que $U \rightarrow U''$ est épique dans \tilde{C} , il s'agit de s'assurer que $\text{hom}(U'', F) \rightarrow \text{hom}(U, F) = F(U'') \rightarrow F(U)$ est injective pour tout objet F de \tilde{C} , ce qui est clair.

Avec tout ceci, on a le :

Théorème (Freyd) : Toute petite catégorie abélienne est équivalente à une sous-catégorie pleine et exacte d'une catégorie abélienne complète à générateur projectif.

Pour avoir la forme duale de ce résultat, il suffit de se rappeler que \tilde{C} est complète, qu'elle possède assez d'injectifs et que le faisceau, associé au générateur $\Sigma U, U \in C$, de $C^o Ab$, est un générateur G de \tilde{C} ; dans ces conditions, si P est le produit des quotients de G , toute extension injective S de P est un séparateur de \tilde{C} : en effet, si $G \rightarrow I \rightarrow A$ est la décomposition triangulaire d'un morphisme non nul, en composant $P \rightarrow S$ avec une section $I \rightarrow P$ de la projection $P \rightarrow I$, on obtient un monomorphisme $I \rightarrow S$ qui se relève suivant $A \rightarrow S$ et $G \rightarrow A \rightarrow S = G \rightarrow I \rightarrow S$ n'est pas nul ; comme G est un générateur, c'est terminé.

Supposons maintenant que C soit une (grande) catégorie abélienne avec un gros générateur G ; on se rappelle qu'alors la topologie épique de C est belle et que G domine le site de cette topologie (exemples de 3.1 et 4.1) ; en appliquant alors le lemme de réduction, on a ; a :

(5.1.2) Proposition : Si une catégorie abélienne C possède un gros générateur G , le foncteur $\text{hom}(G, .)$ est une équivalence de la catégorie \tilde{C} sur une sous-catégorie pleine de la catégorie des modules à droite sur $\text{end}(G)$; l'inclusion de cette sous-catégorie de modules admet un adjoint à gauche exact.

Corollaire (Mitchell).

Toute petite sous-catégorie B , pleine et exacte, d'une catégorie abélienne A , complète à générateur projectif G , est équivalente

à une sous-catégorie pleine et exacte d'une catégorie de modules.

Pour cela, considérons la sous-catégorie pleine et exacte C de A engendrée par B et $G' = \sum_I \Sigma G$ où I est la réunion des ensembles $\text{hom}(G, U)$, $U \in B$; il est clair que G' est un gros générateur projectif de C et il suffit alors d'appliquer (5.1.2) pour avoir, à fortiori, le lemme de Mitchell.

Corollaire (Mitchell-Freyd).

Toute petite catégorie abélienne est équivalente à une sous-catégorie pleine et exacte d'une catégorie de modules.

(5.2) Rappelons qu'une famille de morphismes $U_\alpha \rightarrow U$ d'une catégorie C est épique si, pour tout objet V de C , l'application

$$\text{hom}(U, V) \rightarrow \prod_\alpha \text{hom}(U_\alpha, V)$$

est injective ; lorsque la famille U_α est sommable, ceci revient à dire que $\Sigma U_\alpha \rightarrow U$ est épique.

Si C possède des 2-produits fibrés, on dit que la famille $U_\alpha \rightarrow U$ est épique stricte si les diagrammes :

$$\text{hom}(U, V) \rightarrow \prod_\alpha \text{hom}(U_\alpha, V) \rightrightarrows \prod_{\alpha, \beta} \text{hom}(U_{\alpha\beta}, V)$$

définis par les produits fibrés $U_{\alpha\beta} \rightarrow U_\alpha \rightarrow U$, $U_{\alpha\beta} \rightarrow U_\beta \rightarrow U$; lorsque C est complète à droite, ceci revient à dire que la suite :

$$\sum_{\alpha, \beta} U_{\alpha\beta} \rightrightarrows \sum_\alpha U_\alpha \rightarrow U$$

représente un conoyau.

Grâce à la construction connue du produit fibré, il est aisé de montrer, pour une catégorie abélienne C complète à droite, l'équivalence des assertions suivantes :

a/ Toute famille épique est stricte ;

b/ Les sommes sont exactes (i.e, toute somme directe de monomorphismes est monique).

Rappelons aussi qu'une famille épique (stricte) est universelle si les familles qui s'en déduisent par changement de base sont épiques (strictes). Pour une catégorie abélienne \mathcal{C} complète à droite, les assertions suivantes sont équivalentes :

a' / Toute famille épique est stricte universelle ;

b' / Les sources sont universelles ;

c' / Pour tout morphisme $u : U \rightarrow V$ et toute famille filtrante croissante V_α de sous-objets de V , on a :

$$\bar{u}^1(\sup V_\alpha) = \sup \bar{u}^1(V_\alpha) ,$$

d' / Pour tout sous-objet U de V et toute famille filtrante croissante V_α de sous-objets de V , on a :

$$U_1(\sup V_\alpha) = \sup (U_1 V_\alpha)$$

(Axiome de Grothendieck).

Ceci dit, on a le résultat suivant :

(5.2.1) Proposition : Si \mathcal{C} est une petite catégorie abélienne à sommes universelles alors, pour la topologie canonique, tout faisceau additif de groupes est représentables.

En effet, la topologie canonique étant plus fine que la topologie épique, un tel faisceau F est exact à gauche ; de plus, les composantes $U_\alpha \rightarrow \Sigma U_\alpha$ d'une somme formant une famille épique, i.e, un recouvrement de la topologie canonique, on a la suite exacte :

$$F(\Sigma U_\alpha) \rightarrow \prod_\alpha F(U_\alpha) \xrightarrow{\rightarrow} \prod_{\alpha, \beta} F(U_{\alpha\beta}) = 0$$

$$\text{i.e } F(\Sigma U_\alpha) \cong \prod_\alpha F(U_\alpha) ;$$

or, le critère d'adjonction de Freyd ([1], p. 124) assure qu'un préfaisceau additif de groupes, défini sur une petite catégorie complète à droite, est représentable dès qu'il transforme les sommes en produits et les conoyaux en noyaux, ce qui est le cas de F .

Corollaire 1 : Une petite catégorie abélienne C à sommes universelles est
 | complète, à enveloppes injectives, et ses limites inductives sont
 | exactes.

Car le foncteur faisceau associé lui fait hériter des propriétés de $C^{\circ}Ab$.

Corollaire 2 : Dans toute catégorie abélienne C à sommes universelles, les
 | limites inductives sont exactes.

Soit $(U_{\alpha} \rightarrow V_{\alpha})$ un petit système inductif de monomorphismes de C de limite à droite $U \rightarrow V$, considérons la sous-catégorie A , exacte et complète à droite de C , engendrée par les morphismes $U_{\alpha} \rightarrow U_{\beta}$, $V_{\alpha} \rightarrow V_{\beta}$, $U_{\alpha} \rightarrow U_{\beta}$; cette catégorie s'obtient en prenant les analyses de ces morphismes et toutes les sommes directes de ces morphismes puis en itérant ce procédé; de la sorte, A est une petite catégorie et $U \rightarrow V$, qui d'après le corollaire 1 est un monomorphisme de A , reste monique dans C .

Lorsque C n'est plus forcément petite, le critère d'adjonction de Freyd nous assure cependant que

(5.2.1') Proposition : Si C est une catégorie abélienne à sommes universelles
 | et à générateur G alors, pour la topologie canonique de C tout
 | faisceau additif de groupes est représentable.

Dans ces conditions, on s'assurera aussi que :

- 1/ la topologie canonique de C est belle
- 2/ G domine le site canonique de C .

Par conséquent, grâce au lemme de réduction, on a le :

(5.2.2) Théorème (Petresco-Gabriel).: Si une catégorie abélienne C , à sommes universelles, possède un générateur G , le foncteur $\text{hom}(G, .)$ est une équivalence de C sur une sous-catégorie pleine de la catégorie des

modules à droites sur $\text{end}(G)$; l'inclusion de cette sous-catégorie de modules admet un adjoint à gauche exact.

Corollaire (Grothendieck) : Une telle catégorie est à enveloppes injectives.

(5.3) Pour terminer, remarquons que, pour une catégorie quelconque C , la théorie des faisceaux de groupe sur C se ramène au cas où C est pré-additive ; en effet : on peut associer à C une catégorie pré-additive C^a de façon universelle, i.e, tout préfaisceau, défini sur C , à valeurs dans une catégorie pré-additive A se prolonge à C^a suivant un préfaisceau additif unique : les objets de cette catégorie C^a sont ceux de C et ses groupes de morphismes $\text{Hom}(U,V)$ sont les groupes libres engendrés par les ensembles de morphismes $\text{hom}(U,V)$ de C .

Sur ce, si \mathcal{C} est un site sur C (cf[5]), les idéaux de C^a engendrés par les cribles couvrants de \mathcal{C} sont les idéaux couvrants d'un site \mathcal{C}^a sur C^a : pour cela, il suffit de remarquer que, pour tous objets U et V de C , les morphismes de $\mathcal{C}^a(U)$ issus de V sont les éléments du groupe libre engendré par les morphismes de $\mathcal{C}(U)$ issus de V ; ceci permet de voir que les faisceaux de \mathcal{C} à valeurs dans A s'identifient canoniquement aux faisceaux de \mathcal{C}^a à valeurs dans A .

BIBLIOGRAPHIE :Pour les limites et les foncteurs adjoints :

- [1] MITCHELL : Theory of categories (acad. press. 1965)
 [2] POITOU : Introduction à la théorie des catégories
 (Offilib. Paris 1965).

Pour les limites de groupes :

- [3] BOURBAKI : Algèbre linéaire (Hermann. 1963 ; 3ème édition).

Pour les sites et faisceaux :

- [4] M. ARTIN : Grothendieck Topologies (Harvard. 1962).
 [5] VERDIER : Théorie des faisceaux (I. H. E. S. 1963-1964).

Pour la théorie des classes :

- [6] KELLEY : General Topology - appendix (Van Nostrand 1955).

Autres références :

- [7] FREYD : Abelian Categories (Harper. Row. 1964).
 [8] PETRESCO-GABRIEL : Caractérisation des catégories abéliennes avec
 générateurs et limites inductives exactes (CR. Acad. Sc.
 (Paris 27 avril 1964).

Manuscrit remis le 9 juin 1966

René OUZILLOU
 Maître-Assistant
 Département de Mathématiques
 15, quai Claude Bernard
 LYON 7^e