

R. CUSIN

**Une démonstration concernant le théorème d'interpolation
généralisé aux ensembles d'énoncés**

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1966, tome 3, fascicule 2
, p. 62-70

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1966__3_2_62_0>

© Université de Lyon, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE DEMONSTRATION CONCERNANT LE THEOREME
D'INTERPOLATION GENERALISE AUX ENSEMBLES D'ENONCES.

Par R. CUSIN

1 - Introduction.

Les notations employées ainsi que les théorèmes énoncés dans ce paragraphe sont précisés dans [5] et [1].

Nous nous plaçons dans le cadre du calcul des prédicats restreint du premier ordre et sans égalité. Le langage utilisé comprend :

- Les individus notés a, b, c, \dots ; on suppose que l'ensemble formé est infini. Nous le noterons I .
- Les variables x, y, z, \dots formant un ensemble infini X .
- Les prédicats r_n^D , n étant l'indice et p le poids.
- Les connecteurs $\neg \wedge \vee \exists \forall$.
- Les énoncés (ou w.f.f. ne comportant aucune variable libre), qui forment un ensemble noté E .
- Les théorèmes formant un ensemble noté T . Ces théorèmes sont obtenus à partir d'un système de schémas d'axiomes et de règles de détachement classiques.

Nous définissons en outre le symbole \rightarrow en convenant que l'énoncé $A \rightarrow B$ représente l'énoncé $(\neg A) \vee B$.

Nous aurons besoin dans la suite des deux notions fondamentales suivantes :

1) La notion de système déductif complet (en abrégé sdc).

Nous nommerons ainsi toute partie V de E telle que :

a) - $T \subset V \neq E$

b) - V est stable pour la règle de modus ponens : $A \in V$ et $A \rightarrow B \in V$ implique $B \in V$.

c) - Pour tout $A \in E$, si $A \notin V$ alors $\neg A \in V$ et si $\neg A \notin V$ alors $A \in V$.

2) La notion de validation.

Toute application $g : E \rightarrow \{0,1\}$; $\{0,1\}$ étant considéré comme l'anneau booléien $Z/(2)$, et vérifiant :

$$I \left\{ \begin{array}{l} g(\neg A) = \neg g(A) \\ g(A \wedge B) = g(A) \cdot g(B) \\ g(A \vee B) = g(A) \cup g(B) \\ g(\exists x [f^X]) = \sup_{a \in I} g((a/x)f^X) \\ g(\forall x [f^X]) = \inf_{a \in I} g((a/x)f^X) \end{array} \right.$$

détermine un ensemble V_g , défini par $V_g = g^{-1}(\{1\})$, que l'on nomme, validation.

Un langage L du premier ordre sera encore appelé dans la suite une logique.

Une sur-logique L^+ de L est, par définition, une logique construite sur un ensemble I^+ d'individus, $I^+ \supset I$, les ensembles des variables, des connecteurs, des prédicats, restant les mêmes.

Enfin, un ensemble I d'énoncés est dit compatible si I est inclus dans au moins un sdc V de E , il est incompatible dans le cas contraire. On a alors : les deux théorèmes fondamentaux suivants :

Théorème 1 : (th. de complétude de Gödel) :

Pour que $A \in T$, il faut et il suffit que $g(A) = 1$ pour toute application $g : E \rightarrow \{0,1\}$ vérifiant les propriétés I précédentes.

Théorème 2 : (Théorème de Lowenheim-Skolem) :

Tout ensemble compatible I d'énoncés est contenu dans une validation d'une sous-logique. En outre, si l'ensemble des symboles utilisés (ens. des individus, des variables, des prédicats des connecteurs) a pour cardinal \aleph_α ($\alpha > 0$), alors l'ensemble I^+ des individus de la sur-logique L^+ de L peut être pris de sorte que sa cardinalité n'excède pas \aleph_α .

2 - Théorème d'interpolation.

Le théorème d'interpolation, donné par Craig [2] en 1957, puis renforcé par Lyndon [4] , en 1959, s'énonce sous la forme suivante :

Théorème d'interpolation [version de Lyndon].

Soient A et C des énoncés d'une logique L et tels que $A \rightarrow C \in T$. Si $\neg A \notin T$ (T étant l'ensemble des théorèmes) et si $C \notin T$, alors il existe un énoncé B tel que :

- i) - $A \rightarrow B \in T$ (ce qui équivaut à $A \vdash B$) et $B \rightarrow C \in T$,
- ii) - chaque occurrence d'un symbole de prédicat de B a une occurrence à la fois dans A et dans C avec le même signe, positif ou négatif.

Remarque : Lyndon définit le signe d'un symbole de prédicat d'un énoncé A de la façon suivante :

une occurrence d'un symbole r_n^p de prédicat apparaissant dans l'écriture d'un énoncé A est dite positive si ce symbole est dans le champ d'un nombre pair (éventuellement nul) de signe \neg ; dans le cas contraire, l'occurrence est dite négative.

En 1963, Henkin publia une généralisation de ce théorème aux ensembles d'énoncés [3]. Sa démonstration est indépendante de celle de Lyndon et n'utilise pas le fait que le résultat soit vrai pour deux ensembles réduits à un énoncé chacun. Comme corollaire, Henkin établit l'équivalence entre la notion de déductibilité de l'ensemble K d'énoncés sous les hypothèses de I ($I \vdash K$) et la notion sémantique de conséquence (que nous allons préciser). Nous nous proposons ici de suivre une autre voie ; nous établirons l'équivalence entre la déductibilité sans hypothèse et la notion de conséquence, puis nous utiliserons le théorème de Lyndon pour obtenir celui d'Henkin. Pour cela, nous sommes amenés à poser la définition suivante :

Définition 1 : Soient I et K des ensembles d'énoncés ; nous dirons que I mène sémantiquement à K (ou encore que K est une conséquence de I), et nous noterons $I \models K$, si toute validation de toute sur-logique quelconque L^+ de L contenant I rencontre K .

Proposition 1. Dire que K est une conséquence de I équivaut à dire que K se déduit de I au sens de la déductibilité sous hypothèse ;
Autrement dit : $I \models K \Leftrightarrow I \vdash K$.

Preuve : Rappelons que $I \vdash K$ signifie, par définition, que (I, K) est incompatible, ce qui équivaut à dire qu'il existe un ensemble fini A_1, \dots, A_n d'énoncés de I et un ensemble fini B_1, \dots, B_m d'énoncés de K , tels que

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_n \vdash B_1 \vee \dots \vee B_m.$$

1) - $I \vdash K \Rightarrow I \models K$.

Supposons que $I \vdash K$ et que $I \not\models K$ (ce qui signifie que K n'est pas une conséquence de I) ; alors, il existe une validation V_h^+ d'une sur-logique L^+ de L telle que $I \subset V_h^+$ et telle que $K \cap V_h^+ = \emptyset$. Il en résulte que $\neg K \subset V_h^+$, et par suite que $I \cup \neg K \subset V_h^+$. Ceci est impossible puisque $I \cup \neg K$ est incompatible.

N.B. $\neg K$ est une abréviation qui signifie : l'ensemble des négations des énoncés de K .

2) - $I \models K \Rightarrow I \vdash K$.

Raisonnons encore par l'absurde. Si $I \cup \neg K$ est non incompatible, alors il est contenu dans un sdc V de E ; mais puisque tout sdc peut être immergé dans une validation d'une sur-logique de L (§1 th. 2), il s'ensuit qu'il existe une L^+ validation V_h^+ de L^+ telle que $I \cup \neg K \subseteq V_h^+$. Comme d'autre part $I \models K$ et que $I \subseteq V_h^+$, il en résulte l'existence d'un $B \in K$ tel que $B \in V_h^+$ et comme d'après ce qui précède $\neg B \in V_h^+$, on obtient une contradiction.

Théorème d'interpolation [version d'Henkin].

Soient I et K des ensembles d'énoncés tels que $I \models K$ et tels que, I ne soit pas incompatible et qu'il existe une validation V_{h_0} de L telle que $K \cap V_{h_0} = \emptyset$. Alors, il existe un énoncé B qui vérifie :

- i) - $I \vdash B$ et $B \vdash K$,
- ii) - tout symbole de prédicat ayant une occurrence positive ou négative dans B a une occurrence de même signe à la fois dans au moins une formule de I et une formule de K .

Preuve : Supposons que $I \models K$, et remarquons que l'on peut se contenter du cas où $I \cap K = \emptyset$ car sinon la preuve est triviale. D'après la proposition 1 on a $I \vdash K$, ce qui équivaut à dire qu'il existe A_1, \dots, A_n appartenant à I et C_1, \dots, C_m appartenant à K tels que : $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \vdash C_1 \vee \dots \vee C_m$. Posons alors $A = A_1 \wedge \dots \wedge A_n$ et $C = C_1 \vee \dots \vee C_m$; on a $A \vdash C$, ce qui équivaut à dire que $A \vdash C \in T$. D'après le théorème de Lyndon (applicable ici puisque A n'est pas incompatible et que C n'est pas un théorème), nous savons qu'il existe un énoncé B formé des symboles de prédicats occurrant dans A et C avec les mêmes signes, et tel que :

$A \rightarrow B \in T$ et $B \rightarrow C \in T$. Ce qui précède implique que $I \vdash B$ et $B \vdash K$; et comme en outre la condition ii) du théorème d'Henkin est évidemment satisfaite, le théorème est prouvé.

Remarques.

a) - Les hypothèses I non incompatible et K possédant une intersection vide avec au moins une validation V_h de L sont nécessaires ; sinon, comme le prouvent les contre-exemples suivants, le théorème n'est plus vrai.

1)- Prendre pour I , $I = \{A, \neg A\}$ et pour K , $K = \{C\}$, où A et C sont des énoncés quelconques sans aucun symbole de prédicat commun.

Il est clair que $I \models K$, bien que pourtant il soit impossible de trouver B satisfaisant à i) et ii).

2)- Prendre pour I , $I = \{A\}$ et pour K , $K = \{C, \neg C\}$ où A est un énoncé non incompatible et C un énoncé sans aucun symbole de prédicat commun avec A . Il est clair que $I \models K$ (car toute validation contient soit C soit $\neg C$), bien qu'il soit impossible de trouver B satisfaisant à i) et ii).

b) - Dans la preuve du théorème d'Henkin, nous affirmons que $A = A_1 \wedge \dots \wedge A_n$ est non incompatible et que $C = C_1 \vee \dots \vee C_m$ n'est pas un théorème. Ces affirmations reposent sur le fait que si A était incompatible, alors I le serait, et que si C était un théorème, en particulier, $C_1 \vee \dots \vee C_m \in V_{h_0}$ (théorème de compatibilité sémantique : cf th. 1 § 1), V_{h_0} étant l'une des validations telle que $K \cap V_{h_0} = \emptyset$. Mais alors, comme $\neg C_1 \in V_{h_0}, \dots, \neg C_m \in V_{h_0}$, $\neg C_1 \wedge \dots \wedge \neg C_m \in V_{h_0}$ et donc $\neg(C_1 \vee \dots \vee C_m) \in V_{h_0}$; ce qui serait contradictoire. Par suite, $C \notin V_{h_0}$, et donc C n'est pas un théorème.

c) - Il semblerait que du théorème de Lyndon on puisse tirer un résultat positif concernant l'algèbre de Tarski-Lindembaum obtenue par passage au

quotient, et relatif au fait que cette algèbre est sans trou (un treillis est dit sans trou, si $a < b$ implique l'existence d'un élément c tel que $a < c < b$). Malheureusement, l'existence de l'énoncé "intermédiaire" affirmée par ce théorème, ne nous permet pas de conclure (tout au moins de façon évidente) à ce résultat. En effet, si $A \rightarrow C \in T$ et si $C \rightarrow A \notin T$, il n'est pas certain que l'on n'ait pas, par exemple, $A \leftrightarrow B \in T$ (où B est l'énoncé "intermédiaire"), ou $B \leftrightarrow C \in T$. On peut trouver de nombreux contre-exemples, dont le suivant :

$$A = r_n^1(a) \wedge [r_m^1(b) \vee \neg r_m^1(b)] \quad a, b, c, \text{ distincts}$$

$$C = r_n^1(a) \vee r_k^1(c). \quad m, n, k, \text{ distincts.}$$

Il est clair que $A \rightarrow C \in T$ (on peut utiliser la th. 1 § 1 pour le voir), mais que $C \rightarrow A \notin T$; il est clair en outre, que A n'est pas incompatible et que C n'est pas un théorème ; enfin, l'énoncé B ne peut être que $r_n^1(a)$, et alors : $A \leftrightarrow B \in T$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] B. BOURTOT & R. CUSIN : Une démonstration du théorème de Löwenheim-Skolem. Pub. de L'Inst. de Math. Fac. Sc. LYON - 1966. t. 3 fasc. 1.
- [2] W. CRAIG : Linear reasoning - The Journal of Sym. Log. vol. 22 (1957) , p. 250-268.
- [3] L. HENKIN : Extension of the Craig-Lyndon interp. theo. The Journ. of Sym. Log. Vol 28 (1963), p. 201-216.
- [4] R. LYNDON : An interpol. theor. in the predicate calculus. Pac. Jour. of Math. vol. 9 (1959) p. 129-142.
- [5] D. PONASSE : Une démonstration du théorème de Gödel Publ. de l'Inst. de Math. de LYON. 1966. t. 3 fasc. 1.

Manuscrit remis le 1 juin 1966

R. CUSIN
Assistant
Département de Mathématiques
15 quai Claude Bernard
LYON