R. CUSIN
B. BOURTOT

Une démonstration du théorème de Lowenheim-Skolem

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1966, tome 3, fascicule 1
, p. 9-16
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1966__3_1_9_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1966 t. 3-1

UNE DEMONSTRATION DU THEOREME DE LOWENHEIM-SKOLEM (*)

R. CUSIN & B BOURTOT

INTRODUCTION

Le théorème de Löwenheim-Skolem est une généralisation du théorème de Gödel concernant un ensemble dénombrable d'énoncés. La démonstration que nous présentons ici utilise les résultats logiques acquis dans la démonstration du théorème de Gödel. Donnons d'abord une définition :

Un ensemble J d'énoncés de E est simultanément réalisable dans un domaine I^* contenu dans I, s'il existe une application s de I dans I^* telle que s(J) soit contenu dans une validation de la sous-logique E^*.

De façon précise, nous nous proposons de démontrer :

Toute partie dénombrable et compatible J de E est simultanément réalisable dans un domaine dénombrable.

Cette proposition permet d'obtenir à titre de corollaire le théorème général cherché.

N.B. Le cas où J est fini se traite immédiatement.

En effet soit A la conjonction de tous les énoncés de J. Puisque J est compatible, l'énoncé $\neg A$ n'est pas démontrable, donc n'est pas universellement valide (théorème de Gödel). Il existe au moins une validation V_h de E ne contenant pas $\neg A$. Ainsi V_h contient l'énoncé A et, à fortiori, l'ensemble J.

CALCULS PRELIMINAIRES.

Nous allons démontrer la proposition particulière suivante :

Si J est une partie dénombrable et compatible de E telle que $\complement I_J$

(*) Conférence présentée aux "Journées d'Algèbre et Logique" de la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand (15-16 janvier 1966).

soit infini, alors il existe un domaine dénombrable I^* tel que $I_J \subset I^* \subset I$ et que J soit contenu dans une validation de la sous-logique E^*.

En effet la proposition générale s'en déduit par le raisonnement suivant :

Soit J une partie dénombrable et compatible de E; Si $\complement I_J$ est infini, il n'y a rien à démontrer. Si $\complement I_J$ est fini, les ensembles I et I_J sont dénombrables. On peut trouver une application s de I sur une partie I' de I, bijective de I_J sur I', et telle que $\complement s(I_J)$ soit infini. Alors s(J) est une partie dénombrable et compatible de E telle $\complement s(I_J) = \complement I_{s(J)}$ soit infini. Appliquons le résultat de la proposition particulière : il existe un domaine dénombrable I^* contenant $I_{s(J)}$ et contenu dans I (donc s applique I dans I^*), tel que s(J) soit contenu dans une validation de E^*.

<u>3ème lemme fondamental</u> : Soit E^+ la sur-logique de E construite sur le domaine de $I^+ = I \cup \{\varepsilon\}$, ε étant un individu nouveau. Soit V un sdc de E et f^x une formule quantifiable.

a) Si $\exists x[f^x] \in V$, mais pour tout $a \in I$, $(a/x)f^x \notin V$, alors il existe un sdc V^+ de E^+, contenant V et l'énoncé $(\varepsilon/x)f^x$.

b) Si $\forall x[f^x] \notin V$, mais pour tout $a \in I$, $(a/x)f^x \in V$, alors il existe un sdc V^+ de E^+, contenant V, mais ne contenant pas l'énoncé $(\varepsilon/x)f^x$.

<u>Preuve</u> : a) Etudions le premier cas et raisonnons par l'absurde, en supposant que $V \cup \{(\varepsilon/x)f^x\}$ soit une partie incompatible de E^+, c'est-à-dire contenuedans aucun des sdc de E^+. Il existe donc une partie finie V_0 de V telle que $V_0 \cup \{(\varepsilon/x)f^x\}$ soit une partie incompatible de E^+.

Désignons par A la conjonction des énoncés de V_o. L'énoncé $A \to \neg(\varepsilon/x)f^x$ est démontrable dans E^{++}, donc aussi l'énoncé $B = A \to \forall x[\neg f^x]$, puisque B ne contient pas l'individu ε .

Ainsi $B \in E$ et $B \in T^+$; par conséquent $B \in E \cap T^+ = T$.

Comme $A \in V$, il en résulte que $\neg\exists x[f^x] = \forall x[\neg f^x] \in V$, ce qui contredit le fait que V contient par hypothèse l'énoncé $\exists x[f^x]$.

Conclusion : L'ensemble $V \cup \{(\varepsilon/x)f^x\}$ est compatible, donc contenu dans un sdc V^+ de E^+.

b) Pour obtenir le second résultat, il suffit de poser $g^x = \neg f^x$ et d'appliquer le résultat précédent :

$\exists x[g^x] = \neg\forall x[f^x] \in V$, mais pour tout $a \in I$, $(a/x)g^x = \neg(a/x)f^x \notin V$.

Il existe donc un sdc V^+ de E^+ contenant V et tel que

$(\varepsilon/x)f^x = \neg(\varepsilon/x)g^x \notin V$.

Conséquence du 3ème lemme : Soit B un énoncé quelconque et V un sdc de E qui n'est pas B-validant . Alors en adjoignant un nombre au plus fini d'individus nouveaux à I, on peut construire une surlogique E^+ de E, telle que V soit contenu dans un sdc B-validant de E^+. (Il suffit d'appliquer le lemme successivement à toutes les formules quantifiables $(x/b)B$, de façon à obtenir finalement un sdc V^+ qui soit (B,b)-validant pour tout $b \in I_B$. Le processus est fini, car I_B est fini).

La démonstration ;

1) Soit J une partie compatible et dénombrable de E avec $\complement I_J$ infini. L'ensemble I_J est dénombrable, mais peut être fini : soit I_o un domaine infini dénombrable contenant I_J et tel que $\complement I_o$ soit infini. J est aussi une partie compatible et dénombrable de la sous-logique E_o construite sur I_o : J est

donc contenue dans un sdc V_o de E_o. L'ensemble infini $\complement I_o$ peut être partagé en deux parties infinies disjointes K_o et K'_o .

2) Nous appliquons le 3ème lemme (conséquence) successivement à tous les énoncés $B_n (n \in N)$ de l'ensemble dénombrable $S_J(E_o)$. Nous construirons une chaîne dénombrable de surlogiques E'_n de E_o vérifiant pour tout n :

$$\begin{cases} \text{- le domaine } I'_n \text{ est dénombrable ; } I'_n - I'_{n-1} \text{ est fini ; } I'_{n-1} \subset I'_n \subset I_o \cup K_o \\ \text{- il existe un sdc } V'_n \text{ de } E'_n \text{, contenant } V'_{n-1} \text{ et } (B_1 , B_2 , \ldots , B_n)\text{-validant.} \end{cases}$$

- soit alors E_1 la logique construite sur $I_1 = \bigcup_{n \in N} I'_n$

I_1 est dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles dénombrables.

$\complement I_1$ est infini car $\complement I_1$ contient K'_o infini. $I_o \subset I_1 \subset I$

- L'ensemble T_1 des énoncés démontrables de E_1 est $\bigcup_{n \in N} T'_n$ (en notant T'_n l'ensemble des énoncés démontrables de E'_n).

En effet $A \in T_1 \Rightarrow$ il existe n tel que $A \in E'_n \Rightarrow A \in T_1 \cap E'_n = T'_n \Rightarrow A \in \bigcup_n T'_n$

$A \in \bigcup_n T'_n \Rightarrow$ il existe n tel que $A \in T'_n \subset T_1 \rightarrow A \in T_1$.

- L'ensemble $V_1 = \bigcup_n V'_n$ est un sdc de E_1. En effet

- $T_1 \subset V_1$ car $T'_n \subset V'_n$ pour tout n .
- Si A et $A \rightarrow B \in V_1$, il existe n tel que A et $A \rightarrow B \in V'_n$ (car les sdc V'_n forment une chaîne) ; d'où $B \in V'_n \Rightarrow B \in V_1$.
- Pour tout énoncé $A \in E_1$, soit $A \in V_1$, soit $\neg A \in V_1$.

  $A \notin V_1 \Rightarrow$ pour tout n , $A \notin V'_n$. Or il existe p tel que $A \in E'_p$.

  Donc $\neg A \notin V'_p \Rightarrow \neg A \in V_1$.

- V_1 est un sdc $S_J(E_o)$-validant, c'est-à-dire B_n-validant pour tout $n \in N$.

  En effet pour tout n, V'_n est B_n-validant, et $V'_n \subset V_1$.

<u>Conclusion</u> : nous avons construit une surlogique E_1 de E_o telle que :

$$\begin{cases} I_1 \text{ dénombrable ; } I_o \subset I_1 \subset I \text{ ; } \complement I_1 \text{ infini ;} \\ \text{Il existe un sdc } V_1 \text{ de } E_1 \text{ contenant } V_o \text{ et } S_J(E_o)\text{-validant.} \end{cases}$$

Remarquons que V_1 n'est pas nécessairement $S_J(E_1)$-validant. Il nous faut donc continuer le processus de la façon suivante :

3) En utilisant les résultats du paragraphe précédent, nous construisons une chaîne dénombrable de surlogiques E_n de E_o, vérifiant pour tout n :

$$\begin{cases} I_n \text{ dénombrable } ; I_{n-1} \subset I_n \subset I ; \mathrm{U} \complement I_n \text{ infini} \\ \text{il existe un sdc } V_n \text{ de } E_n \text{ contenant } V_{n-1} \text{ et } S_J(E_{n-1})\text{-validant.} \end{cases}$$

- soit E^* la surlogique de E_o construite sur $I^* = \bigcup_n I_n$

I^* <u>est dénombrable</u>, contient I_o, donc I_J et est contenu dans I.

- soit $V^* = \bigcup_n V_n$. La démonstration du paragraphe précédent permet d'affirmer que V^* <u>est un sdc de</u> E^* <u>contenant</u> J.

- V^* <u>et</u> $S_J(E^*)$<u>-validant</u>. En effet, si $B \in S_J(E^*)$, il existe $n \in N$ tel que $B \in S_J(E_n)$. Le sdc V_{n+1} de E_{n+1} est B-validant et, à fortiori, V^* est B-validant.

4) Pour terminer la démonstration, il suffit d'appliquer le corollaire du 1er lemme fondamental. L'ensemble J, étant contenu dans un sdc $S_J(E^*)$-validant de E^*, est aussi contenu dans une validation de E^*.

<u>Quelques conséquences</u>.

Plusieurs théorèmes se déduisent à titre de corollaires de la proposition que nous venons de démontrer. Nous les groupons de la façon suivante :

Si J est une partie <u>dénombrable</u> de E, les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) J est compatible

(2) J est simultanément réalisable dans un domaine dénombrable.

(3) J est simultanément réalisable dans un domaine quelconque.

(4) Toute partie finie de J est simultanément réalisable dans un domaine quelconque.

Preuve ;

1 ⇒ 2 c'est la proposition que nous avons démontrée.

2 ⇒ 3 trivial, puisque tout ensemble dénombrable est équipotent à une partie d'un ensemble infini.

3 ⇒ 1 Supposons J simultanémant réalisable dans un domaine I^* ; il existe une application s de I dans I^* telle que s(J) soit contenu dans une validation V^* de E^*. Donc J est contenu dans $\bar{s}^1(V^*)$ qui est un sdc de E (2ème lemme fondamental - remarque) : J est compatible.

1 ⇔ 4 trivial en utilisant l'équivalence 1 ⇔ 3. Car pour que J soit compatible il faut et il suffit que toute partie finie de J soit compatible.

Retenons la forme classique :

Théorème de Löwenheim-Skolem : Si un ensemble dénombrable d'énoncés est simultanément réalisable dans un domaine quelconque, il est simultanément réalisable dans un domaine dénombrable.

Théorème de compacité : Pour qu'un ensemble dénombrable d'énoncés J soit simultanément réalisable dans un domaine quelconque, il suffit que toute partie finie de J le soit.

Généralisation.

Rappelons qu'une sur-logique E^+ d'une logique E est par définition, la logique construite sur un ensemble d'individus I^+, $I^+ \supset I$, l'ensemble des variables et celui des prédicats restants les mêmes.

Le théorème précédent se généralise alors comme suit :

Théorème : Soit J un ensemble d'énoncés d'une logique E construite sur I, on suppose en outre que Card(J) = $\aleph_\alpha$ et Card(I) = $\aleph_\beta$ ($\aleph_\alpha, \aleph_\beta \geq \aleph_0$) ; si J est compatible, alors, il existe une sur-logique E^+ de E construite sur un ensemble d'individus I^+ de cardinal inférieur ou égal au plus grand des deux cardinaux $\aleph_\alpha$ et $\aleph_\beta$, et telle que J soit simultanément réalisable dans E^+.

Preuve : Remarquons que $\mathrm{Card}(S_J(E)) \leqslant \aleph_\alpha . \aleph_\beta = \max(\aleph_\alpha, \aleph_\beta)$, et ordonnons bien $S_J(E)$: $S_J(E) = [B_0 , \ldots , B_\omega , \ldots\ldots]$. D'après la conséquence du 3ème lemme fondamental, il existe une sur-logique E_0 de E (éventuellement $E_0 = E$) construite sur $I_0 = I \cup \{$nb fini d'individus (éventuellement vide)$\}$ et un sdc V_0 de E_0, tels que V_0 soit V_0-validant. Il suffit alors de procéder par récurrence transfinie en désignant par $P(\gamma)$ la propriété suivante :

" il existe une sur-logique E_γ de E construite sur $I_\gamma (\supset I)$ et un sdc V_γ de E_γ qui soit B_ω-validant pour tout $\omega < \gamma$; en outre, E_γ est une sur-logique des E_ω pour $\omega < \gamma$, et $V_\gamma \supset V_\omega$ pour $\omega < \gamma$ ".

1°) $P(0)$ est vraie d'après ce qui précède.

2°) Supposons $P(\gamma)$ vraie pour $0 \leqslant \gamma < \delta$ et montrons $P(\delta)$:

Considérons la logique E' construite sur $I' = \bigcup\limits_{0 \leqslant \gamma < \delta} I_\gamma$, et soit $V' = \bigcup\limits_{0 \leqslant \gamma < \delta} V_\gamma$; les I_γ et les V_γ formant une chaîne croissante, il en résulte que V' est un sdc de E', et que de plus V' est B_γ-validant pour tout γ, $\gamma < \delta$ (la démonstration est analogue à celle du cas dénombrable). Considérons alors l'énoncé B_δ ; d'après la conséquence du lemme 3, on peut, en rajoutant au besoin un nombre fini d'éléments à I' trouver une sur-logique E" de E' et un sdc $V'' (\supset V')$ de E" qui soit B_δ-validant. Posons $E'' = E_\delta$ et $I'' = I_\delta$, $V'' = V_\delta$, il en résulte que $P(\delta)$ est vérifiée.

D'après le principe de récurrence transfinie, $P(\gamma)$ est vraie pour tout γ. Il suffit alors de considérer la logique E^1 construite sur $I^1 = \bigcup\limits_\gamma I_\gamma$ et $V^1 = \bigcup\limits_\gamma V_\gamma$, pour affirmer que V^1 est un sdc de E^1, et que V^1 est $S_J(E)$-validant.

Remarquons d'autre part que $\mathrm{Card}(I^1) \quad \sum_{\gamma\ (\text{directe})} \mathrm{Card}(I_\gamma) \leq \aleph_\alpha . \aleph_\beta =$ $= \max (\aleph_\alpha, \aleph_\beta)$.

En remarquant que V^1 n'est pas nécessairement $S_J(E^1)$-validant, on recommence le processus une infinité dénombrable de fois : il existe E^2; construite sur $I^2 (\supset I^1)$, et un sdc V^2 de E^2 tels que E^2 soit une sur-logique de E^1_1 , $V^2 \supset V^1$, et V^2 est $S_J(E^1)$-validant ; et ainsi de suite .... On obtient finalement une sur-logique E^+ de E et un sdc V^+ de E^+ tel que $V^+ \supset V$, et tel que V^+ Soit $S_J(E^+)$-validant. L'assertion concernant la cardinalité est vérifiée puisque :

$$\mathrm{Card}(I^+) \leq \sum_{n \in N} \mathrm{Card}(I^n) \leq \sum_{\text{dénombrable}} \max(\aleph_\alpha, \aleph_\beta) = \max (\aleph_\alpha, \aleph_\beta).$$

Remarque :

Le théorème précédant prouve, en particulier, que si l'ensemble des symboles utilisés (ensembles des individus, des variables, des prédicats, des connecteurs) a pour cardinalité $\aleph_\alpha$, alors tout ensemble d'énoncés compatibles est simultanément réalisable dans un domaine de cardinalité inférieure ou égale à $\aleph_\alpha$. C'est généralement sous cette forme plus faible que le théorème précédent se trouve énoncé dans la littérature.

Un corollaire important du théorème précédent est le :

Théorème de compacité : Tout ensemble J d'énoncés dont toute partie finie

est simultanément réalisable dans une logique E (construite sur I)

est simultanément réalisable dans une sur-logique E^+ de E.

La preuve est triviale et utilise le fait que $\phi(J)$ engendre un filtre propre de E/R.

Bernard BOURTOT
Département de Mathématiques
15, quai Claude Bernard LYON

Roger CUSIN
Assistant à la Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
15, quai Claude Bernard LYON