PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

ANNE PRELLER

Une catégorie duale de la catégorie des anneaux idempotents

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1966, tome 3, fascicule 1 , p. 26-30

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1966__3_1_26_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1966 t. 3-1

UNE CATEGORIE DUALE DE LA CATEGORIE DES ANNEAUX IDEMPOTENTS(*)

Anne PRELLER

Nous désignons par $\mathbb{AB}$ la catégorie des anneaux booléiens et des homomorphismes booléiens, par $\mathbb{J}$ la catégorie des anneaux idempotents et des homomorphismes d'anneaux. Nous dirons b-algèbre (resp. i-algèbre) pour un objet de $\mathbb{AB}$ (resp. de $\mathbb{J}$) et de même b-morphisme et i-morphisme

Rappelons que la catégorie $\mathbb{EB}$ formée des espaces booléiens et des applications continues est équivalente à la catégorie duale de $\mathbb{AB}$ et que cette équivalence est établie par le foncteur contravariant $* : \mathbb{AB} \quad \mathbb{EB}$ qui associe à une b-algèbre B son espace dual B^* et à un b-morphisme $f : B_1 \to B_2$ sa transposée $f^* : B_2^* \to B_1^*$. Le théorème de Stone est fondamental pour montrer que ce foncteur $*$ est bien une équivalence.

Halmos remarque dans "Boolean Algebras" après la démonstration du théorème de Stone que la plus grande partie de la théorie reste valable si l'on remplace compact par localement compact.

Voilà comme nous préciserons cette remarque :

1) <u>Le théorème de Stone reste valable pour les i-algèbres.</u>

Soit A une i-algèbre $A^\circ \subset 2^A$ l'ensemble des i-morphismes de A dans 2

Conférence présentée aux "Journées d'Algèbre et Logique" de la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand (15-16 Janvier 1966).

(2 désigne l'ensemble $\{o,1\}$ que nous considérerons soit comme b-algèbre, soit comme i-algèbre, soit même comme b-espace muni de la topologie discrète). A° est un b-espace, car il est fermé dans 2^A et $A^* = A^\circ - \{o\}$ est un espace localement compact de dimension 0 . Appelons donc i-espace tout espace X localement compact de dimension 0.

Notons X^* l'i-algèbre formée des compacts ouverts de X. Le théorème de Stone s'énonce maintenant comme suit :

a) <u>Soit A une i-algèbre</u>. L'application $\tau : A \to A^{**}$ qui au point $a \in A$ associe la partie $\tau(a) = \{h\ , h \in A^*\ h(a) = 1\}$ de A^* est un isomorphisme de A sur A^{**}.

b) <u>Soit X un i-espace</u>. L'application τ qui au point $x \in X$ associe l'i-morphisme $\tau(x)$ de X^* dans 2 défini par $\tau(x)(a) = 1 \Leftrightarrow x \in a$ est un homéomorphisme.

La catégorie des i-espaces et des applications continues n'est pourtant pas un modèle de la catégorie duale de $\mathbb{J}$.

2) <u>La catégorie des objets de $\mathbb{EB}$ au-dessous de 1 (b-espace dual de la b-algèbre 2) est équivalente à la catégorie duale de J.</u>

Nous le démontrerons en trois lemmes :

<u>Lemme 1</u> : Le foncteur injection $S : \mathbb{A}B \to \mathbb{J}$ possède un adjoint à gauche T qui est fidèle.

En effet, soit A une i-algèbre, A est une algèbre sur le corps 2. Désignons par TA l'algèbre obtenue par adjonction d'une unité à A. C'est-à-dire $TA = A \times 2$ avec l'addition : $(a,\varepsilon) + (b,\eta) = (a+b\ ,\ \varepsilon+\eta\ )$

la multiplication : $(a,\varepsilon)(b,\eta) = (ab + \varepsilon b + \eta a, \varepsilon\eta\ )$

Il est clair que TA est un anneau idempotent avec unité, que l'application $\phi_A : A \to STA$ définie par $\phi_A(a) = (a,o)$ est un i-morphisme injectif, et que

$\phi_A(A)$ un idéal maximal de TA. De plus, pour toute b-algèbre B et tout i-morphisme $f : A \to SB$ il existe un unique b-morphisme $h : TA \to B$ tel que $Sh \circ \phi_A = f$. En diagramme :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "A"] \arrow[dr, "f"'] & & STA \arrow[dl, "Sh"] \\ & SB & \end{tikzcd}$$

Ceci nous garantit bien un foncteur adjoint à gauche $T : \mathbb{J} \to \mathbb{A}B$ où Tf pour $f : A_1 \to A_2$ est défini par l'égalité $STf \circ \phi_{A_1} = \phi_{A_2} \circ f$ ou en diagramme

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "A_1"'] & A_2 \arrow[d, "A_2"] \\ STA_1 \arrow[r, "STf"'] & STA_2 \end{tikzcd}$$

Comme les i-morphismes ϕ_A sont des monomorphismes T est bien fidèle.

En particulier nous pouvons dire avec des abus de langage évidents : l'application $\phi: A^{\circ} \to (TA)^{*}$ qui à $h \in A^{\circ}$ fait correspondre son unique prolongement $\phi(h) \in TA^{*}$ est une bijection.

<u>Lemme 2</u> : $\mathbb{J}$ est équivalente à $\mathbb{A}B_2$, la catégorie des objets de $\mathbb{A}B$ au-dessus de 2.

En effet, soit A une i-algèbre et h_A l'unique b-morphisme de TA dans 2 dont le noyau est égal à $\phi_A(A)$.

Nous poserons donc $FA = h_A$.

Soit $f : A_1 \to A_2$ un i-morphisme $Tf : TA_1 \to TA_2$ est un b-morphisme qui rend le diagramme suivant commutatif.

$$\begin{tikzcd} TA_1 \arrow[dr, "h_{A_1}"] \arrow[d, "Tf"'] & \\ TA_2 \arrow[r, "h_{A_2}"'] & 2 \end{tikzcd}$$

Nous poserons donc $Ff = Tf$.

Pour montrer que le foncteur (covariant) F est une équivalence nous utiliserons le lemme de Gabriel :

1) tout objet $h : B \to 2$ de $\mathbb{A}B_2$ est isomorphe à un objet FA, en l'occurence à $F \ker h$ ($\ker h$ désigne ici $h^{-1}(\{o\})$.).

2) la restriction de F à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{J}}(A_1,A_2)$ est une bijection sur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{A}B_2}(FA_1,FA_2)$.

L'injectivité est une conséquence immédiate de la fidélité de T.

Si f $\mathrm{Hom}_{\mathbb{A}B_2}(FA_1,FA_2)$ nous avons $h_{A_2} \circ f = h_{A_1}$, donc $\phi_{A_1}(A_1) = \ker(h_{A_2} \circ f)$ ce qui entraine $f(\phi_{A_1}(A_1)) \subset \phi_{A_2}(A_2)$. Il est clair ensuite que $f = F(\phi^{-1}_{A_2} \circ f \circ \phi_{A_1})$.

<u>Lemme 3</u> : La catégorie duale de $\mathbb{A}B_2$ est équivalente à la catégorie $\mathbb{E}B^1$.

En effet, comme le foncteur $*$: $\mathbb{A}B \to \mathbb{E}B$ transforme le diagramme

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "h_1"] & \\ & 2 \\ B_2 \arrow[ur, "h_2"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B_1^* & \\ & 1 \arrow[ul, "h_1^*"'] \arrow[dl, "h_2^*"] \\ B_2^* \arrow[uu, "f^*"] & \end{tikzcd}$$

il est bien clair que par extension le foncteur $*$ définit une équivalence de $\mathbb{A}B_2$ dans $\mathbb{E}B^1$.

3) <u>Interprétation</u> :

Un objet $\alpha : 1 \to X$ de $\mathbb{E}B^1$ est entièrement déterminé par son but X et le point ω de X, image par α de l'unique point de 1. De même un morphisme f $\hom_{\mathbb{E}B^1}(\alpha_1,\alpha_2)$ est une application continue $f : Y_1 \to Y_2$(Y_i but de α_i) telle que $f \circ \alpha_1 = \alpha_2$, c'est-à-dire $f(\omega_1) = \omega_2$. Il est facile de voir que l'on définit ainsi un isomorphisme de $\mathbb{E}B^1$ dans la catégorie $\mathbb{JE}$ des espaces booléiens pointés, catégorie dont les objets (X,ω) sont des espaces booléiens X dans lequel on a distingué un point ω et dont les morphismes sont les applications continues entre ces espaces qui conservent le point distingué. Avec cette nouvelle interprétation, l'équivalence entre $\mathbb{J}$ et $\mathbb{J}\,\mathbb{E}$ associe à l'i-algèbre A l'espace (TA^*, h_A) et à l i-morphisme $f : A_1 \to A_2$ l'application pointée $Tf^* : TA_2^* \to TA_1^*$ telle que $Tf^*(h_{A_2}) = h_{A_1}$. Remarquons encore que la bijection $\phi : A^\circ \to TA^*$ qui à $h \in A^\circ$ associe son "prolongement" $\phi\,(h)$ à TA est un homéomorphisme et que $\phi(o) = h_A$. Si pour l'i-morphisme $f : A_1 \to A_2$ nous posons $f^\circ : A_2^\circ \to A_1^\circ$, $f^\circ(h) = h \circ f$, nous aurons $f^\circ = \phi^{-1} \circ Tf^* \circ \phi$ et finalement le foncteur $\circ : \mathbb{J} \to \mathbb{J}\,\mathbb{E}$ qui à l'i-algèbre A associe le b-espace pointé $(A^\circ, 0)$ et à l'i-morphisme $f : A_1 \to A_2$ la transposée $f^\circ : A_2^\circ \to A_1^\circ$ est une équivalence.

Anne PRELLER
Assistante associée
Département de Mathématiques
15, quai Claude Bernard LYON