PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

ANNE PRELLER

Sur le problème universel (liberté) des algèbres de Boole et des espaces de Boole par rapport aux ensembles

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1966, tome 3, fascicule 1
, p. 17-25
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1966__3_1_17_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1966 .3-1

SUR LE PROBLEME UNIVERSEL (LIBERTE) DES ALGEBRES DE BOOLE ET DES ESPACES DE BOOLE PAR RAPPORT AUX ENSEMBLES

Anne PRELLER

On se propose de démontrer l'existence d'algèbres de Boole libres par une méthode catégorique, méthode qui permet en même temps de démontrer l'existence d'espaces de Boole libres.

Dans le n° 1 on rappèle :

a) la définition d'objets libres (par rapport à un foncteur) d'une catégorie,

b) la dualité de la catégorie des algèbres de Boole et de la catégorie des espaces de Boole,

c) que tout épimorphisme des deux catégories est une application surjective.

Dans le n° 2 on "construit" les algèbres (espaces) libres en déduisant de cette construction quelques unes de leurs propriétés.

1. Définitions , rappels.

(1.0) Sauf mention expresse du contraire tout les foncteurs considérés seront covariants. Rappelons que pour tout foncteur S : $\mathbb{A} \to \mathbb{X}$ il y a équivalence entre

(G) Pour tout objet X de $\mathbb{X}$ il existe un objet TX de A et un morphisme

$\phi_X : X \to STX$ tels que pour tout objet A de A l'application $f \to Sf \circ \phi_X$ de Hom(TX,A) dans Hom(X,SA) soit une bijection et

(D) Il existe un foncteur $T : X \to A$ tel que pour tout objet A de $\mathbb{A}$ il existe un morphisme $\psi_A : TSA \to A$ tel que pour tout objet X de X l'application

$$g \to \psi_A \circ Tg$$

de Hom(X,SA) dans Hom(TX,A) soit une bijection.

Dans ces conditions, on peut toujours supposer que les bijections $f \to Sf \circ \phi_X$ et $g \to \psi_A \circ Tg$ sont réciproques l'une de l'autre.

Un objet B de $\mathbb{A}$ est dit S-libre sur un objet X de $\mathbb{X}$, s'il existe un morphisme $\phi_X : X \to SB$ tel que $f \to Sf \circ \phi_X$ de $Hom_A(B,A)$ dans $Hom_X(X,SA)$ soit une bijection.

$\mathbb{A}$B désignera la catégorie des algèbres de Boole dont les morphismes sont les applications qui conservent la conjonction, la disjonction et le complément. On les appellera homomorphismes.

$\mathbb{E}$B désignera la catégorie des espaces de Boole (espaces compacts totalement discontinus) dont les morphismes sont les applications continues.

1.1 <u>Proposition</u> : $\mathbb{E}$B est équivalente à la catégorie duale de $\mathbb{A}$B.

<u>Démonstration</u> : Il suffit de définir un foncteur contravariant $*$ de $\mathbb{A}$B dans $\mathbb{E}$B qui vérifie :

1°) Tout espace de Boole X est homéomorphe à un espace A^* où A est une algèbre de Boole.

2°) La restriction du foncteur $*$ à $Hom_{\mathbb{A}B}(A,B)$ est une bijection sur $Hom_{\mathbb{E}B}(B^*,A^*)$ où A et B sont des objets quelconques de $\mathbb{A}$B.

Soit donc A une algèbre de Boole, l'ensemble A^* des homéomorphismes de A dans 2 (2 désigne l'ensemble $\{o,1\}$ considéré soit comme un objet de $\mathbb{A}$B soit comme un objet de $\mathbb{E}$B) est fermé dans l'espace de Boole 2^A (muni de la topologie discrètes sur 2). A^* est donc un espace de Boole pour la topologie induite appelé espace dual de A. Si f est un homomorphisme de A dans B, désignons par f^* l'application continue de B^* dans A^* qui vérifie $f^*(s) = s_o f$ pour tout $s \in B^*$. Avec ces définitions $*$ est bien un foncteur contravariant de $\mathbb{A}\mathbb{B}$ dans $\mathbb{E}\mathbb{B}$.

1°) Soit X un espace de Boole, le sous-ensemble A des parties à la fois ouvertes et fermées de X (appelées ofs) est une sous-algèbre de $\mathfrak{P}(X)$, appelée algèbre duale de X. L'application ϕ de X dans l'espace de Boole A^* définie par :

$$\phi(x)(a) = 1 \Leftrightarrow x \in a \text{ pour tout } x \text{ de } X \text{ et tout } a \text{ de } A$$

est un homéomorphisme. On a donc montré 1°).

2°) Soient A une algèbre de Boole, A^* son espace dual., A^{**} l'algèbre duale de A^*. L'application ψ_A de A dans A^{**} définie par $\psi_A(a) = \{x; x \in A^*$ et $x(a) = 1\}$ pour tout a de A, est un isomorphisme, (voir[2] § 18). Pour une application continue α de B^* dans A^* (B algèbre de Boole quelconque) désignons par α^* la restriction de α^{-1} à A^{**} qui est un homomorphisme de A^{**} dans B^{**}.

Alors $\alpha = (\psi_B^{-1} \circ \alpha^* \circ \psi_A)^*$

car pour tout a de A et pour tout y de B^* :

$$\alpha(y)(a) = 1 \Leftrightarrow \alpha(y) \in \psi_A(a) \Leftrightarrow y \in \alpha^*(\psi_A(a))$$

$$\Leftrightarrow y(\psi_B^{-1}(\alpha^*(\psi_A(a)))) = 1$$

$$\Leftrightarrow y_o(\psi_B^{-1} \circ \alpha^* \circ \psi_A)(a) = 1 \quad (\psi_B^{-1} \circ \alpha^* \circ \psi_A)^*(y)(a) = 1.$$

Soit maintenant f un homomorphisme de A dans B, on a

$$f = \psi_B^{-1} \circ f^{**} \circ \psi_A$$

car pour tout $a \in A$ $\psi_B^{-1} \circ f^{**} \circ \psi_A(a) = \psi_B^{-1}(f^{*-1}(\{x; x \in A^*, x(a) = 1\}))$
$= \psi_B^{-1}(\{y; y \in B^*, f^*(y)(a) = 1\}) = \psi_B^{-1}(\{y; y \in B^*, y(f(a)) = 1\}) = f(a)$

Par conséquent, si f et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}\mathbb{B}}(A,B)$, si $f^* = g^*$ alors $f = g$.

1.2 <u>Proposition</u> : Soit A une sous-algèbre de B, distincte de B, alors il existe un homomorphisme de A dans 2 qui possède au moins deux extensions distinctes à B.

<u>Démonstration</u> : Soit $x \in B - A$, l'ensemble des $p \in A$ tels que : "$p > x$ ou $p > x'$ " (x' désigne le complément de x) engendre un filtre F de A. Car $0 = pq$ où $p > x$ et $q > x'$ entraine $p \leq q'$ donc $p < x$, contradiction. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre de A contenant F. $\mathcal{U} \cup \{x\}$ et $\mathcal{U} \cup \{x'\}$ sont des parties compatibles de B, car $0 = yx$ (resp. $0 = y.x'$) avec $y \in \mathcal{U}$ entraine $y' > x$ (resp. $y' > x'$) donc $y' \in \mathcal{U}$, contradiction. Il existe deux ultrafiltres $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ de B avec $\mathcal{U} \cup \{x\} \subset \mathcal{U}_1$, $\mathcal{U} \cup \{x'\} \subset \mathcal{U}_2$ et $\mathcal{U}_1 \cap A = \mathcal{U} = \mathcal{U}_2 \cap A$. Il suffit de prendre les fonctions caractéristiques de $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ et $\mathcal{U}$ respectivement.

1.2.1 <u>Corollaire</u> : Tout épimorphisme de la catégorie $\mathbb{A}$B est surjectif.

1.3 <u>Proposition</u> : Soit X un sous-espace de Boole de l'espace Y, distinct de Y. Il existe une application continue de X dans 2 qui possède au moins deux extensions à Y distinctes.

<u>Démonstration</u> : Les ofs de Y séparent les points et les fermés de Y. Il existe un of $\mathcal{U}$ de Y qui contient X et dont le complémentaire $\mathcal{U}'$ est non vide. Soit f_1 l'application identiquement nulle de Y dans 2, f_2 la fonction caractéristique de $\mathcal{U}'$. f_1 et f_2 sont deux applications continues distinctes de Y dans 2 qui coïncident sur X.

1.3.1 <u>Corollaire</u> : Tout épimorphisme de la catégorie EB est surjectif.

2. <u>Existence d'algèbres et d'espaces de Boole libres.</u>

2.0. Désignons par S le foncteur (fidèle) de $\mathbb{A}$B (resp. $\mathbb{E}$B) dans $\mathbb{E}$ns qui à une algèbre (resp. espace) de Boole fait correspondre l'ensemble sous-jacent

2.1 Proposition : L'algèbre de Boole $T\{p\} = \{o,p,p',1\}$ (resp. l'espace de Boole $T\{p\} = \{p\}$) est S-libre sur l'ensemble $\{p\}$.

Démonstration : il est clair qu'il faut poser $\phi_{\{p\}}(p) = p$, le reste étant évident.

2.2. Les catégories $\mathbb{AB}$ et $\mathbb{EB}$ possèdent des produits directs quelconques, donc compte tenu de 1.1, des sommes directes quelconques. (Le produit direct de la famille vide n'est pas exclu, car l'algèbre $\{o\}$ et l'espace $\{p\}$ sont des objets finaux. Par conséquent, la somme directe de la famille vide est l'algèbre 2 dans $\mathbb{AB}$ et l'espace vide dans $\mathbb{EB}$).

2.3 Proposition : Pour tout ensemble X il existe un objet TX de $\mathbb{AB}$ (resp. $\mathbb{EB}$) S-libre sur X.

Démonstration : Tout ensemble étant une somme directe de l'ensemble $\{p\}$, c'est une conséquence de 2.2 et du

2.3.1 Lemme : Soit S un foncteur de $\mathbb{A}$ dans $\mathbb{X}$, $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'objets de X telle que

1) Pour tout $i\in I$, il existe un objet TX_i de $\mathbb{A}$, S-libre sur X_i

2) $\coprod_{i\in I} X_i(q_i)$ existe dans $\mathbb{X}$

3) $\coprod_{i\in I} TX_i(h_i)$ existe dans $\mathbb{A}$,

alors il existe un objet $T\amalg X_i$ de A, S-libre sur $\amalg X_i$ et

$$T\left(\coprod_{i\in I} X_i\right) = \coprod_{i\in I} TX_i$$

En effet, pour tout $i\in I$ on a $Sh_i \circ \phi_{X_i} \in \mathrm{Hom}(X_i, S\amalg TX_i)$, donc il existe $\phi_{\amalg X_i} \in \mathrm{Hom}(\amalg X_i, S\amalg TX_i)$ tel que $\phi_{\amalg X_i} \circ q_i = Sh_i \circ \phi_{X_i}$ pour tout $i\in I$.

Associons à $f\in \mathrm{Hom}(\amalg TX_i, A)$ le morphisme $Sf \circ \phi_{X_i} \in \mathrm{Hom}(\amalg X_i\ , SA)$ et composons cette application avec les trois bijections suivantes :

$Sf_o\phi_{\amalg X_i} \rightarrow (Sf_o\phi_{\amalg X_i} \circ q_i)_{i\in I}$ de $\mathrm{Hom}(\amalg X_i\ , SA)$ dans $\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}(X_i, SA)$

$(Sf_o\phi_{\amalg X_i} \circ q_i)_{i\in I} = (S(f_o h_i)\circ\phi_{X_i})_{i\in I} \rightarrow (f_o h_i)$ de $\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}(X_i,SA)$ dans $\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}(TX_i,A)$

$(f_o h_i)_{i\in I} \rightarrow f$ de $\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}(TX_i, A)$ dans $\mathrm{Hom}(\coprod TX_i, A)$

C'est-à-dire, l'application $f \rightarrow Sf\circ\phi_{\amalg X_i}$ est rétractable par une bijection et, par conséquent est elle-même une bijection.

2.3.1. Corollaire : Tout objet de $\mathbb{A}$B (resp. $\mathbb{E}$B) est objet quotient d'un objet S-libre.

En effet, S est fidèle (voir[4] 1.2)

2.4. Proposition : Tout objet S-libre de $\mathbb{A}$ (resp. $\mathbb{E}$B) est projectif et un cospérateur.

Démonstration : tout ensemble (non vide) étant projectif et un coséparateur, c'est une conséquence de 1.2 et 1.3 et les deux lemmes suivants :

2.4.1. Lemme : Soit S un foncteur de $\mathbb{A}$ dans $\mathbb{X}$ vérifiant (D), alors

1/ Si T est fidèle, alors S conserve les séparateurs. S'il existe un objet A de $\mathbb{A}$ tel que SA soit un séparateur, alors T est fidèle

2/ Si S est fidèle, alors T conserve les séparateurs. S'il existe un objet X de $\mathbb{X}$ tel que TX soit un coséparateur, alors S est fidèle.

2.4.2 Lemme : soit S un foncteur de $\mathbb{A}$ dans $\mathbb{X}$ vérifiant (D) alors :

Si S conserve les épimorphismes, alors T conserve les projectifs.

Si $\mathbb{X}$ possède un coséparateur projectif et si T conserve les projectifs, alors S conserve les épimorphismes.

Démonstration de 2.4.1, 1/ par exemple. Soient f,g $\mathrm{Hom}_{\mathbb{X}}(X,Y)$. Il y a équivalence entre

a) $\exists\, h\in\mathrm{Hom}(Y,SA)\ h\circ f \neq h\circ g$;

b) $\exists\, h\in\mathrm{Hom}(Y,SA), \psi_A\circ Th\circ Tg, = \psi_A\circ Th\circ Tg,$

c) $\exists h' \in Hom(TY,A), h'.Tf = h'.Tg$

Si T est fidèle, si A est un séparateur de $\mathbb{A}$ et si $f \neq g$, alors il existe bien un $h \in Hom(Y,SA)$ tel que $h_o f \neq h_o g$.

Si SA est un séparateur de X et si $f \neq g$, alors il existe un $h' \in Hom(TY,A)$ tel que $h'_o Tf \neq h'_o Tg$, donc aussi $Tf \neq Tg$.

Démonstration de 2.4.2. Supposons que S conserve les épimorphismes, montrons que T conserve les projectifs : soit $p \in Hom_{\mathbb{A}}(A,B)$ un épimorphisme et $k \in Hom_{\mathbb{A}}(TX,B)$. Par hypothèse, $Sp \in Hom_{\mathbb{X}}(SA,SB)$ est un épimorphisme et $Sk \in Hom_{\mathbb{X}}(STX,SB)$. X étant projectif, il existe $f \in Hom_X(X,SA)$ tel que $Sp_o f = Sk\ _o\phi_X$. Il existe $h \in Hom(TX,A)$ tel que $f = Sh_o\phi_X$. D'où $S(p_o h)_o\phi_X = Sk_o\phi_X$ et finalement $p_o h = k$.

Supposons que X est un coséparateur projectif de $\mathbb{X}$ et que T conserve les projectifs. Soit $p \in Hom_{\mathbb{A}}(A,B)$ un épimorphsime ; si les morphismes g_1 , $g_2 \in Hom_{\mathbb{X}}(SB,Y)$ sont distincts, il existe $f \in Hom_{\mathbb{X}}(X,SB)$ tel que $g_{1o}f \neq g_{2o}f$ car X est un coséparateur. Il existe $h \in Hom_A(TX,B)$ tel que $Sh_o\phi_X = f$. Donc $g_1 o Sh\ o\phi_X \neq g_2 o Sh o\phi_X$. TX étant projectif, il existe un k dans $Hom_{\mathbb{A}}(TX,A)$ tel que $p o k = h$. Donc $g_1 o Sp o SK o\phi_X \neq g_{2}o\ Sp o Sk o\phi_X$ et par conséquent $g_1 o Sp \neq g_2 o Sp$ c'est-à-dire Sp est un épimorphisme.

2.4.3 Corollaire : Pour tout objet S-libre TX de AB (repp.EB) l'application $\phi_X : X \to STX$ est injective.

Démonstration : par exemple l'ensemble 2 est un séparateur de Ens, donc (2.4.1, 1/) T est fidèle.

2.4.4 Corollaire : Un objet de $\mathbb{A}$B (resp. EB) est projectif si et seulement si il est le retract d'un objet S-libre.

2.4.5 Corollaire : les algèbres complètes et complètement distributives sont injectives dans $\mathbb{A}$B ; les espaces de Cantor sont injectifs dans EB.

Démonstration : une telle algèbre est isomorphe à $\mathfrak{P}(X) = 2^X$ pour un certain ensemble X. Or 2^X est l'algèbre duale du S-libre TX de $\mathbb{E}$B. De même, l'espace de Cantor 2^X est l'espace dual du S-libre TX de $\mathbb{A}$B.

2.5. <u>Proposition</u> : Si TX est une algèbre (resp. espace) S-libre sur l'ensemble X, la partie $\phi_X(X)$ engendre (resp. est partout dense) dans TX.

<u>Démonstration</u> : TX est alors aussi S-libre sur $\phi_X(X)$, c'est donc une conséquence de 1.2 et 1.3.

2.6. Proposition : Si TX = TY, alors Card X = Card Y (valable pour $\mathbb{A}$B et $\mathbb{E}$B)

<u>Démonstration</u> :

- cas $\mathbb{A}$B : l'espace dual de TX est 2^X. Si TX = TY alors on a aussi $2^X = 2^Y$. Si X est fini, alors Y aussi et Card(X) = card (Y). Si X est infini, alors Y aussi et le cardinal de l'ensemble des ofs de 2^X est celui de X. Donc : Card(X) = card(TX) = card(TY) = card(Y).

- cas $\mathbb{E}$B : si TX = TY, alors $\mathfrak{P}(X)$ est isomorphe à $\mathfrak{P}(Y)$, les atomes de $\mathfrak{P}(X)$ sont en bijection avec les atomes de $\mathfrak{P}(Y)$, c'est-à-dire card(X) = card(Y).

2.7. <u>Remarque</u> : l'espace de Boole libre sur l'ensemble X est le compactifié de Stone-Čech $\beta(X)$ de l'espace discret X. D'abord $\beta(X)$ est totalement discontinu. Il suffit de vérifier que les ofs séparent les points. Scient donc x et $y \in \beta(X)$, $x \neq y$. Il existe deux ouverts $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ avec $x \in \mathcal{U}_1$, $y \in \mathcal{U}_2$, $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \emptyset$, la trace de chacun des ces ouverts sur X est non vide.

Soit h le prolongement par continuité à $\beta(X)$ de la fonction caractéristique de $\mathcal{U}_1 \cap X$. L'of $\mathcal{U} = h^{-1}(\{1\})$ contient x et ne contient pas y. Ensuite si Y est un espace de Boole quelconque, à toute application f de l'ensemble X dans Y, correspond canoniquement une application continue de l'espace discret X dans l'espace compact Y qui se factorise donc par une application continue unique h de $\beta(X)$ dans Y, c'est-à-dire $f = h_o\phi_X$ où ϕ_X désigne l'injection canonique de X dans $\beta(X)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] GABRIEL : Thèse, B.S.M.F. tome 90 chap. I

[2] HALMOS : Boolean Algebras, Van Nostrand 1963

[3] PUPIER : Foncteurs adjoints. Séminaires d'algèbre Lyon 1963-1964 exp. 12

[4] PUPIER : Notion de liberté dans les catégories. Séminaire d'algèbre Lyon 1964-1965

Anne PRELLER
Assistante associée
Département de Mathématiques
15, qaui Claude Bernard LYON