PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

L. WAELBROECK

Compacité et dualité en analyse linéaire

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1965, tome 2, fascicule 1
, p. 72-93

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1965__2_1_72_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1965 t.2-1

COMPACITE ET DUALITE EN ANALYSE LINEAIRE

L. Waelbroeck

(Université libre de Bruxelles)

Quelques propositions bien connues de la théorie de la dualité dans les espaces vectoriels topologiques sont présentées ici sous un jour un peu inhabituel. Les ovales compacts (ensembles convexes, équilibrés, munis d'une topologie compacte localement convexe) sont mis en évidence. On montre également comment ces ensembles peuvent servir de brique dans la construction d'espaces appelés ici de type ffl, tout comme les ovales complétants servent de brique dans la construction des b-espaces (des espaces à bornés complets).

Nous établissons un théorème de dualité, tout d'abord entre ovales complétants (espaces de Banach) et ovales compacts. Nous montrons comment ce théorème de dualité résiste aux passages à la limite projective, et inductive, montrons que tout espace localement convexe complet est une limite projective épique d'espaces de Banach, mais qu'il existe des limites projectives épiques d'espaces de Banach qui ne sont pas des espaces localement convexes complets.

Dans le sens positif, nous montrons que les limites projectives épiques de suites d'espaces de Banach sont des espaces de Fréchet ; en d'autres termes, tout espace ffl de type dénombrable est le dual d'un espace de Fréchet. On peut s'attendre à ce que ce résultat positif soit utile, une construction algèbrique d'un espace ffl fournissant souvent un espace de type dénombrable.

L'auteur espère avoir l'occasion de montrer autre part comment les théorèmes de dualité établis ici peuvent être appliqués en analyse linéaire.

1. LE DUAL D'UN ESPACE DE BANACH.

(1,1) La proposition suivante met bien en évidence les rapports existants entre dualité et compacité en analyse linéaire.

Proposition 1. Soit E un espace vectoriel, soit X une partie compacte convexe, symétrique, absorbante de E, soit τ une topologie compacte sur X, ayant les propriétés suivantes :

a. L'application $(a,b) \to \frac{a+b}{2}$ de $X \times X$ dans X est continue.

b. L'origine a un système fondamental de voisinages convexes symétriques.

Il existe alors un espace de Banach F, unique à une isométrie naturelle près, tel que E soit isomorphe au dual F^* de F, l'isométrie appliquant la boule unité S^* de F^* sur X, de manière bicontinue pour la topologie faible de F^* et τ .

L'espace F est encore isomorphe à l'espace des formes linéaires sur E dont la restriction à X est continue pour τ , avec la norme de la convergence uniforme sur X.

Nous ne supposons pas, mais établissons que τ est induite par une topologie localement convexe de E. On peut se demander dans quelle mesure cette extension n'est pas factice, l'auteur ne connaît pas de cas où τ n'est pas donnée à priori comme topologie induite par une topologie localement convexe de E, ou bien en tout cas, où on ne peut déterminer aisément une topologie localement convexe de E induisant τ , sans appliquer la proposition 1.

Si l'on sait alors qu'une telle topologie localement convexe existe, l'espace F des formes linéaires sur E dont la restriction à X est continue pour τ sépare X. La topologie induite par $\sigma(E,F)$ sur X sera séparée et moins fine que τ, donc identique à τ .

E s'identifie alors avec une partie de F^* , X avec une partie de S^*, la topologie τ avec la topologie induite par $\sigma(E^*,F)$ sur l'image. La boule unité S^* de F^* s'identifie au bipolaire de X qui est convexe, symétrique, et faiblement fermé, donc X s'identifie avec S^*, et comme X et S^* sont chacun absorbant, E s'identifie avec F^*.

Supposons ensuite connu un isomorphisme u de E avec le dual G^* d'un espace de Banach G, isomorphisme qui identifie X avec la boule unité T^* de G^*, d'une manière bicontinue pour les topologies τ et $\sigma(G^*,G)$. Les éléments de G sont des formes linéaires sur G^*

dont la restriction à T^* est $\sigma(G^*,G)$-continue. Leurs composées avec u sont des formes linéaires sur E dont la restriction à X est continue pour $\mathcal{T}$, donc des éléments de F. Une application $v : G \rightarrow F$ est ainsi définie. Cette application est évidemment isométrique. Elle est surjective, sinon $F^* = E$ posséderait un élément dont la restriction à vG serait identiquement nulle, or un tel élément devrait être appliqué sur zéro par l'isomorphisme u.

La proposition serait établie si l'on savait que l'ensemble des formes linéaires sur E dont la restriction à X est continue pour la topologie $\mathcal{T}$ sépare X. Les deux paragraphes suivants seront consacrés à la démonstration de ce résultat.

Nous voulons encore faire une remarque. On rencontre fréquemment en analyse linéaire des parties compactes, convexes, symétriques X d'espaces localement convexes. La proposition établie permettra de parler sans plus de l'espace de Banach F dont E_X est le dual, si E_X est comme d'habitude l'espace vectoriel absorbé par X. Il s'agira de l'espace des formes linéaires sur E_X ayant une restriction continue à X.

(1,2) X étant un espace compact, est donc un espace uniforme. On obtient un système fondamental d'entourages de cette structure uniforme en associant à chaque voisinage A de O dans X l'ensemble U_A des $(x,y) \in X \times X$ tels que $x-y \in 2A$.

(Cette proposition est à comparer au lemme devenu classique de Grothendieck).

L'ensemble des U_A est évidemment une base de filtre, stable pour l'application $(x,y) \to (y,x)$. L'intersection des ensembles U_A se réduit à la diagonale. Pour établir le résultat, il suffira de montrer que cet ensemble de U_A est un filtre d'entourages, et que la topologie qui lui est associée est moins fine que la topologie $\mathcal{T}$ donnée.

Pour montrer que nous avons un filtre d'entourages, il suffira de montrer qu'à tout voisinage A de O, on peut associer un voisinage B de O tel que $x-z \in 2A$ si x, y, z appartiennent à X, tandis que $x-y \in 2B$, $y-z \in 2B$.

L'application $x \to x/2$ est un homéomorphisme de X avec $X/2$, muni de la topologie induite. Soit A un voisinage de O. On peut trouver un voisinage B de O tel que $A/2 \supseteq B \cap X/2$, donc tel que $A \supseteq 2B \cap X$. Nous pouvons prendre B convexe symétrique.

Supposons alors que $x-y \in 2B$ et que $y-z \in 2B$. Alors

$$\frac{x-z}{2} = \frac{1}{2}\left[(x-y) + (y-z)\right] \in 2B$$

tandis que $(x-z)/2 \in X$ puisque X est convexe symétrique et que $x \in X$, $z \in X$. Donc

$$\frac{x-z}{2} \in 2B \cap X \subseteq A$$

comme requis.

Pour la topologie associée à ce filtre d'entourages, l'ensemble des $(x + 2A) \cap X$, A un voisinage de l'origine, est un système fondamental de voisinages de x. Mais $(x + 2A) \cap X$ est un voisinage de x pour $\mathcal{T}$. En effet $-x \in X$, l'application $y \to (y-x)/2$ est une application continue de X dans X, et $(x + 2A) \cap X$ est l'image inverse de A pour cette application. Le filtre d'entourage décrit bien une topologie moins fine que $\mathcal{T}$ sur X.

(1,3) Reste à montrer que F sépare E. Soit $t \in X$, $t \neq 0$. Nous allons construire une forme linéaire sur E, qui ne s'annule pas en t, mais dont la restriction à X est continue pour $\mathcal{T}$.

Puisque $\mathcal{T}$ est séparée, et que $t \neq 0$, il existe un voisinage A_1 de 0 tel que $t \notin A_1$. Nous choisissons A_1 convexe fermé symétrique. t a un voisinage $(t + 2A_2) \cap X$ qui ne rencontre pas A_1. Comme $A_1 \subseteq X$, $t + 2A_2$ ne rencontre pas A_1 hors de X, et est donc disjoint de A_1. Nous prenons A_2 convexe symétrique fermé, $t \notin A_1 + 2A_2$ ou encore

$$2^{-2}t \notin 2^{-2}A_1 + 2^{-1}A_2$$

Mais $2^{-1}A_1$ est fermé, et $2^{-1}(2^{-1}A_1 + A_2)$ est une image continue de compact, et donc fermé.

Par récurrence nous supposons construite une suite $A_1, \ldots, A_k$ de voisinages de l'origine, qui sont convexes symétriques fermés, et tels que

$$2^{-k}t \notin 2^{-k}A_1 + \ldots + 2^{-1}A_k \quad = B_k$$

L'ensemble B_k étant fermé, puis choisissons un voisinage A_{k+1} de l'origine tel que $2^{-k}t \in B_k + A_{k+1}$, donc

$$2^{-k-1}t \in 2^{-1}(B_k + A_{k+1}) = B_{k+1}$$

et par récurrence B_{k+1} est convexe symétrique fermé si A_{k+1} l'est.

Par conséquent

$$t \notin \bigcup_k 2^k B_k = \bigcup_k \sum_1^k 2^{r-1} A_r = B'$$

L'ensemble B' est convexe équilibré. Il existe donc une forme linéaire u, telle que $u(t) = 1$, $|u(t)| \leq 1$ sur B'. Cette forme linéaire est en valeur absolue inférieure à 2^{-r+1} sur A_r, puisque $2^{r-1}A_r \subseteq B'$; elle est bien continue pour $\mathcal{T}$ sur X.

Ceci achève la démonstration de la proposition 1.

(1,4) Remarque. Au fond, nous n'avons utilisé que la continuité séparée de $(a + b)/2$ au paragraphe 1.2. Et le résultat permet d'établir la continuité simultanée. Si $a - a' \in 2A$, si $b - b' \in 2A$, avec A convexe, $(a + b)/2 - (a' + b')/2 \in 2A$. Il suffira de supposer que $(a + b)/2$ dépend continuement de a quel que soit b dans l'énoncé de la proposition 1.

2. LA CATEGORIE B^*.

(2,1) Nous avons donc vu comment le dual d'un espace de Banach pouvait être muni d'une structure qui permette de retrouver l'espace de Banach à un isomorphisme près, et donné une description axiomatique de cette structure (proposition 1).

Si $\mathbb{B}$ est la catégorie des espaces de Banach, nous avons établi l'équivalence de la catégorie duale de $\mathbb{B}$ avec la catégorie $\mathbb{B}^*$ dont les objets sont des triples $(E, X, \mathcal{T})$, où E est un espace vectoriel, où X est une partie convexe symétrique absorbante de E, et où $\mathcal{T}$ est une topologie compacte sur X telle que l'application $(x,y) \longrightarrow \frac{x+y}{2}$ soit continue, et telle que l'origine ait un système fondamental de voisinages convexes symétriques pour $\mathcal{T}$.

Si l'on estime raisonnable d'appeler morphisme dans la catégorie des espaces de Banach toute application linéaire $u : E \longrightarrow E'$ de norme finie, on est amené à poser la définition suivante :

Définition. Si $(E, X, \mathcal{T})$ et $(E', X', \mathcal{T}')$ sont deux objets de $\mathbb{B}^*$, un morphisme $(E, X, \mathcal{T}) \longrightarrow (E', X', \mathcal{T}')$ est une application $v : E \rightarrow E'$ telle que vX soit contenu dans un multiple de X', l'application étant continue pour la topologie $\mathcal{T}$ et la topologie déduite de $\mathcal{T}'$ par homothétie.

La proposition 1 décrit deux foncteurs "dual", chacun contravariant, de $\mathbb{B}$ vers $\mathbb{B}^*$ et de $\mathbb{B}^*$ vers $\mathbb{B}$, ainsi d'ailleurs qu'un isomorphisme de chacune des composées de ces deux foncteurs avec le foncteur identité. Nous avons ainsi la

Proposition 2. Chacune des deux catégories $\mathbb{B}$ et $\mathbb{B}^*$ est équivalente à la duale de l'autre.

(2,2) Soient F_1, F_2 deux espaces de Banach. L'espace $\mathrm{Hom}(F_1,F_2)$ est muni d'une manière naturelle d'une norme d'espace complet. La topologie forte (simple) de cet espace est intéressante. On sait que la restriction aux parties bornées de cette topologie l'est tout particulièrement.

Soient $\mathcal{E}_1 = (E_1, X_1, \mathcal{T}_1)$, $\mathcal{E}_2 = (E_2, X_2, \mathcal{T}_2)$ deux objets de B^{*}. On munit naturellement $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ d'une norme d'espace de Banach. La boule unité de cet espace est l'ensemble des $u : E \to E_2$ qui appliquent X_1 dans X_2, (et sont linéaires, et continus pour $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$).

L'espace compact $(X_2, \mathcal{T}_2)$ est un espace uniforme. On peut considérer sur la boule unité de $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ la topologie de la convergence uniforme sur X_1, pour la structure uniforme de X_2.

Proposition 3. Si $\mathcal{E}_1$ est le dual de F_1, et $\mathcal{E}_2$ le dual de F_2, la transposition est une application biunivoque de la boule unité de $\mathrm{Hom}(F_1, F_2)$ sur la boule unité $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1)$, application uniformément bicontinue pour la structure uniforme forte de la première boule unité, et la structure uniforme définie ci-dessus sur la seconde.

Il est évident que la transposition conserve les normes. Il s'agit encore de montrer que l'application est bicontinue (uniformément). Mais la structure uniforme forte de la boule unité de $\mathrm{Hom}(F_1, F_2)$ est engendrée par les écarts

$$d_f(u_1, u_2) = \| u_1 f - u_2 f \|$$

($f \in F$). La structure uniforme de X_1 est engendrée par les écarts $\nu_f(s,t) = |\langle f, s\rangle - \langle f, t\rangle|$, ($f \in F$). La structure uniforme de la convergence uniforme sur X_2 dans l'espace des applications de X_2 dans X_1 est engendrée par les écarts.

$$\nu'_f(v_1, v_2) = \max_{s \in X_2} |\langle f, v_1 s - v_2 s\rangle|$$

et $\langle f, (v_1-v_2)s\rangle = \langle (u_1-u_2)f, s\rangle$ si u_1 est la transposée de v_1, et u_2 celle de v_2. Par conséquent

$$\begin{aligned}\nu'_f(v_1,v_2) &= \max_{s\in X_2} |\langle f, (v_1-v_2)s\rangle| \\ &= \max_{s\in X_2} |\langle (u_1-u_2)f, s\rangle| \\ &= \|(u_1-u_2)f\| = d_f(u_1,u_2)\end{aligned}$$

ce qui montre bien que l'on a un isomorphisme de structures uniformes.

(2,3) Il reste deux propriétés à signaler explicitement.

Soient $\mathcal{E} = (E, X, \mathcal{T})$ et F des objets de $\mathbb{B}^*$ et $\mathbb{B}$ duaux l'un de l'autre. F est séparable si et uniquement si $\mathcal{T}$ est métrisable. Si F est séparable, une partie totale dénombrable de F définit une famille dénombrable d'écarts suffisant à déterminer $\mathcal{T}$ qui est donc métrisable. Réciproquement, si $\mathcal{T}$ est métrisable, F est isomorphe à un sous-espace de C(X) qui est séparable.

Soient $\mathcal{E}_1 = (E_1, X_1, \mathcal{T}_1)$ et $\mathcal{E}_2 = (E_2, X_2, \mathcal{T}_2)$ des objets de $\mathbb{B}^*$, et soient F_1, F_2 les espaces de Banach duaux de $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$.

Soit $u : E_1 \to E_2$ un morphisme de $\mathcal{E}_1$ vers $\mathcal{E}_2$, et soit $v : F_2 \to F_1$ le morphisme transposé. L'application u est biunivoque si, et uniquement si v applique F_2 sur un sous-espace dense de F_1, comme on le voit immédiatement en appliquant le théorème de Hahn-Banach.

3. LIMITES INDUCTIVES FORMELLES.

(3,1) Soit $\mathbb{K}$ une catégorie. Une nouvelle catégorie, $\overrightarrow{\lim}\ \mathbb{K}$ sera définie de la manière suivante. Un objet de $\overrightarrow{\lim}\ \mathbb{K}$ sera un système (I, A_i, u_{ij}) où I est ordonné filtrant, où A_i est un objet de $\mathbb{K}$ pour tout $i \in I$, où u_{ij} est un morphisme de A_i dans A_j pour tout $i \leq j$, et où $u_{ik} = u_{jk} \circ u_{ij}$ si $i \leq j \leq k$. Moyennant un abus de notation évident, les objets de lim $\mathbb{K}$ seront notées $\overrightarrow{\lim}\ A_i$, $\overrightarrow{\lim}_i A_i$ ou encore $\overrightarrow{\lim}_{i \in I} A_i$.

On définit encore les morphismes de la catégorie $\overrightarrow{\lim}\ \mathbb{K}$ par

$$\operatorname{Hom}(\overrightarrow{\lim}\ A_i, \overrightarrow{\lim}\ B_j) = \overleftarrow{\lim}_i\ \overrightarrow{\lim}_j \operatorname{Hom}(A_i, B_j)$$

Il est clair que l'on peut composer ces morphismes, qu'une nouvelle catégorie est effectivement définie.

$\mathbb{K}$ s'immerge dans $\overrightarrow{\lim}\ \mathbb{K}$, l'immersion est un foncteur universel de $\mathbb{K}$ dans une catégorie possédant suffisamment de limites inductives mais $\overrightarrow{\lim}\ \mathbb{K}$ sera en général une vraie extension de $\mathbb{K}$, même si $\mathbb{K}$ possèdant suffisamment de limites inductives.

Nous nous intéresserons à une sous-catégorie pleine de $\overrightarrow{\lim}\ \mathbb{K}$, que nous appellerons $\overrightarrow{\lim}$ mono $\mathbb{K}$. Les objets de $\overrightarrow{\lim}$ mono $\mathbb{K}$ seront les objets (I, A_i, u_{ij}) de $\mathbb{K}$ tels que u_{ij} soit un monomorphisme quels que soient i, j. Nous parlerons encore de limites inductives moniques d'objets de $\mathbb{K}$.

On remarque que la catégorie $\overrightarrow{\lim}$ mono $\mathbb{E}$ns est équivalents à la catégorie des ensembles bornologiques, ce qui montre effectivement que nous avons une vraie extension de la catégorie initiale, au moins dans ce cas particulier.

(3,2) Nous nous intéresserons à la catégorie $\overrightarrow{\lim}$ mono $\mathbb{B}^*$. Il est clair que cette catégorie est équivalente à une catégorie ffl, dont les objets sont construits à partir des ovales compacts des paragraphes 1 et 2 comme les b-espaces (espaces à bornés complets) le sont à partir des ovales complétants. Les objets de ffl seront appelés des ffl-espaces, ou encore des espaces farfelus.

Un ffl-espace sera un triplet $(E, \mathfrak{B}, \mathcal{T})$ où E est un espace vectoriel, $\mathfrak{B}$ un ensemble de parties de E (dites bornées) et où est une correspondance associant à chaque élément B de $\mathfrak{B}$ une topologie $\mathcal{T}(B)$ sur B de manière telle que les axiomes suivants soient vérifiés.

a. Toute partie finie de E est bornée.

b. Toute réunion finie de parties bornées est bornée.

c. Tout sous-ensemble d'une partie bornée est bornée.

d. Un multiple d'un ensemble borné est borné.

e. La fermeture convexe d'un ensemble borné est bornée.

f. Le seul sous-espace vectoriel borné de E est l'espace vectoriel nul.

g. Si B_1, B_2 sont bornés, l'application $(b_1,b_2) \rightarrow (b_1 = b_2)$ de $B_1 \times B_2$ sur $B_1 = B_2$ est continue pour les topologies $\mathcal{T}(B_1)$, $\mathcal{T}(B_2)$ et $\mathcal{T}(B_1 + B_2)$.

h. Si $B \subseteq B'$, $\mathcal{T}(B)$ est la topologie induite par $\mathcal{T}(B')$ sur B

i. Si B est borné convexe équilibré, l'origine a un système fondamental de voisinages convexes équilibrés pour $\mathcal{T}(B)$.

j. Tout borné B est contenu dans un borné B' tel que $\mathcal{T}(B')$ soit compacte.

Les espaces ffl sont donc des espaces "bornologiques compacts convexes", ces mots étant entendus correctement.

Tout naturellement, si $(E, \mathfrak{B}, \mathcal{T})$ et $(E', \mathfrak{B}', \mathcal{T}')$ sont deux espaces ffl, un morphisme du premier dans le second sera une application $u : E \to E'$ qui applique chaque borné de E sur un borné de E', continûment pour les topologies $\mathcal{T}(B)$; $\mathcal{T}'(uB)$.

(3,3) Les espaces ffl sont construits de manière telle que les catégories $\overrightarrow{\lim}$ mono $\mathbb{B}^{*}$ et ffl soient équivalentes.

Un ffl espace sera dit simple s'il possède un borné absorbant, auquel cas ce borné absorbera tout les bornés de la structure (s'il est compact convexe symétrique). On voit que la catégorie des ffl espaces simples est équivalente à $\mathbb{B}^{*}$. D'autre part tout espace ffl est exprimable comme limite inductive monique de ffl-espaces simples, et si les E_i, F_j sont simple ,

$$\mathrm{Hom}(\overrightarrow{\lim}\, E_i \,,\, \overrightarrow{\lim}\, F_j) = \overleftarrow{\lim}_i\, \overrightarrow{\lim}_j\, \mathrm{Hom}(E_i \,,\, F_j)$$

(Il est essentiel que les E_i soient simples pour assurer cette relation).

4. THEOREME DE DUALITE.

(4,1) Nous dirons qu'un espace ffl, $(E, \mathfrak{B}, \mathcal{T})$ a la propriété de Hahn-Banach si l'ensemble F des formes linéaires sur E dont la restriction aux éléments B de $\mathfrak{B}$ est continue pour $\mathcal{C}(B)$ sépare E. Muni de la topologie de la convergence uniforme sur les éléments de $\mathfrak{B}$, cet espace de formes linéaires sera appelé le "dual" de E.

Proposition 4. La catégorie des ffl-espaces ayant la propriété de Hahn-Banach est équivalente à la duale de celle des espaces localement convexes complets.

Nous établirons la proposition énoncée ci-dessus dans ce paragraphe, et nous donnerons d'autre part un exemple de ffl-espaces n'ayant pas la propriété de Hahn-Banach. Nous montrerons ainsi que la catégorie ffl est une vraie extension de la catégorie duale de celle des espaces localement convexes complets.

En un certain sens, tout espace localement convexe complet est une limite projective, pour des applications épiques, d'espaces de Banach, mais il existe des limites projectives épiques d'espaces de Banach qui ne sont pas des espaces localement convexes complets.

(4,2) Soit donc $(E, \mathfrak{B}, \mathcal{C})$ un ffl-espace ayant la propriété de Hahn-Banach. Soit F le dual de E, avec sa topologie localement convexe. Soit ensuite F^{*} le dual de l'espace localement convexe F, avec la ffl-structure que l'on définit au moyen de ses parties équicontinues, et de la topologie faible de chaque partie équicontinue.

E s'identifie avec un sous-espace de F^{*}, les éléments de $\mathfrak{B}$ sont appliqués sur des parties équicontinues de F^{*}, l'application est continue pour $\mathcal{C}(B)$ et pour la topologie faible de la partie équicontinue considérée.

Cette application est même bicontinue pour ces deux topologies, puisqu'un nombre suffisant d'éléments de $\mathfrak{B}$ sont compacts.

Chaque partie équicontinue de F^{*} est l'image d'un élément de $\mathfrak{B}$. Soit en effet A équicontinu. Alors $A \subseteq V°$ (le polaire de V) pour un voisinage V de l'origine dans F, et $V \supseteq B°$ pour un $B \in \mathfrak{B}$ puisque F est équipé de la topologie de la $\mathfrak{B}$-convergence. Donc $A \subseteq B°°$, et $B°° = B$ si B est compact convexe équilibré.

L'espace ffl donné est donc naturellement isomorphe au dual de F, si nous mettons sur le dual de F la ffl structure naturelle, définie par l'ensemble des parties équicontinues de F^{*} et le topologie faible des parties équicontinues.

Partons maintenant d'un espace localement convexe complet, F. Soit F^{*} son dual, avec la structure ffl naturelle. Soit ensuite F_1 l'espace localement convexe dual de l'espace ffl F^{*} (F^{*} a la propriété de Hahn-Banach). On identifie évidemment F avec un sous-espace de F_1, la topologie induite sur F par celle de F_1 est la topologie donnée initialement. Le théorème sera établi si nous montrons que F est dense dans F_1.

Mais l'image de F est un ensemble de formes linéaires séparant F^{*}, qui est le dual de F_1 (en vertu de ce que nous avons montré ci-dessus). Et une partie de F_1 ne peut séparer $F_1{}^{*}$ que si elle est totale, en vertu du théorème de Hahn-Banach.

(4,3) Nous voulons encore montrer que ffl est une vraie extension de la catégorie duale de celle des espaces localement convexes complets. Pour cela, il s'agit d'exhiber un espace ffl n'ayant pas la propriété de Hahn-Banach.

Soit I l'intervalle fermé $[0,1]$ avec la mesure de Lebesgue. Soit M(I) l'espace des fonctions mesurables définies p.p. sur I. Une partie $A \subseteq M(I)$ est majorée s'il existe une fonction $F \geq 0$ dans M(I) telle que $|u(x)| \leq F(x)$ p.p. pour tout u A. Soit alors $\mathfrak{B}$ l'ensemble des parties de M(I) qui sont majorées et relativement compactes en mesure. Pour chaque $B \in \mathfrak{B}$, soit $\tau(B)$ la topologie induite sur B par la convergence en mesure.

On sait que la convergence en mesure est métrisable, complète sur M(I), et induit une topologie localement convexe sur les parties majorées. Il en résulte que $(M(I), \mathfrak{B}, \tau)$ est un espace ffl. Nous allons montrer que le dual de cet espace est nul.

Soit φ une forme linéaire non identiquement nulle sur M(I). Cette forme linéaire est discontinue en mesure, il existe une suite $u_1, \dots, u_n, \dots$ d'éléments de M(I) qui tend vers zéro en mesure, et telle que $\varphi(u_n) \to 1$. Toute suite convergeant en mesure a une suite partielle majorée, supposons donc la suite donnée majorée. Alors $X = \{0, u_1, \dots, u_n, \dots\}$ est majoré, est compact en mesure, mais n'a pas une restriction continue en mesure sur X.

Le dual de M(I) ne sépare donc pas M(I).

(4,4) La topologie bornologique d'un espace bornologique est la topologie localement convexe la plus fine pour laquelle les bornés de la structure sont topologiquement bornés. Si $(E, \mathfrak{B}, \mathfrak{T})$ est un espace ffl, il est raisonnable de considérer la topologie localement convexe la plus fine sur E qui induise sur chaque partie bornée B une topologie moins fine que $\mathfrak{T}(B)$. Nous appellerons cette topologie farfelogique.

Pour que la topologie farfelogique soit séparée, il faut et il suffit bien entendu que E ait la propriété de Hahn-Banach. Faisons donc cette hypothèse.

Soit F l'espace localement convexe complet dual de $(E, \mathfrak{B}, \mathfrak{T})$. Une forme linéaire sur E sera continue pour la topologie farfelogique si, et uniquement si elle appartient à F, bien entendu. Un ensemble de formes linéaires sur E sera équicontinu pour la topologie farfelogique si, et uniquement si il est équicontinu et borné sur chaque partie bornée B de E. Cet ensemble de formes linéaires sera donc équicontinu dans le dual de E farfelogique si, et uniquement si il est relativement compact dans F.

La topologie farfelogique de E est donc la topologie de convergence uniforme sur les parties compactes de F.

5. LES THEOREMES DE MACKEY-ARENS ET DE GROTHENDIECK.

Le lecteur aura observé le lien entre la farfelogie, le théorème de Mackey-Arens et le théorème de complétion de Grothendieck.

Le théorème de Mackey-Arens est quasi-démontré au paragraphe 4.

Soit en effet $\mathfrak{B}$ un ensemble saturé de parties relativement faiblement compactes de E, pour une dualité entre E et F_o. Pour chaque $B \in \mathfrak{B}$, soit $\tau(B)$ la topologie faible de B. Alors $(E, \mathfrak{B}, \tau)$ est un ffl-espace ayant la propriété de Hahn-Banach. F_o sépare E, est donc dense dans le dual de $(E, \mathfrak{B}, \tau)$, et a ainsi le même dual que ce dual. Mais le bidual de $(E, \mathfrak{B}, \tau)$ est précisément $(E, \mathfrak{B}, \tau)$, si l'on adopte les conventions faites au prargraphe 4.

On observe, si F_o est un espace localement convexe non nécessairement complet, et si F est son complété, que le dual farfelu de F_o s'identifie vec celui de F, et que le complété de F_o s'identifie donc avec l'espace des formes linéaires sur le dual de F_o, dont la restriction aux parties équicontinues de F_o est faiblement continue. Nous avons ainsi obtenu une partie du théorème de Grothendieck.

Pour obtenir le tout, nous devons immerger E dans un espace ffl lorsque (E,F) est une dualité, et $\mathfrak{B}_o$ est une famille de parties faiblement précompactes de E, recouvrant E, etsaturée. Nous commençons par immerger E dans F^+, dual algèbrique de F, nous considérons la réunion E_1 des adhérences faibles des éléments de $\mathfrak{B}_o$ dans F^+, la bornologie sur E_1 ayant pour bornés les parties de F^+ contenues dans une adhérence faible d'élément de $\mathfrak{B}_o$, et pour chaque tel borné, sa topologie faible. E_1 est effectivement un espace ffl, le lemme de Grothendieck montre que le dual de E_1 coïncide avec l'espace des formes linéaires sur E ayant des restrictions faiblement continues sur les éléments de $\mathfrak{B}$.

Nous achevons ainsi la démonstration.

6. ESPACES DE TYPE DENOMBRABLE.

(6,1) Un espace ffl sera dit de type dénombrable s'il possède une famille dénombrable de parties bornées. Nous établirons deux propositions intéressant ces espaces de type dénombrable :

Proposition 5. Un espace ffl de type dénombrable a la propriété de Hahn-Banach.

Proposition 6. Un espace ffl de type dénombrable est le dual d'un espace séparable si, et uniquement si les topologies $\mathcal{T}(B)$ sont toutes métrisables.

Si la proposition 5 est intéressante, c'est parce que certains raisonnements ffl d'algèbre topologique fourniront tout naturellement des espaces de type dénombrable (comme sous-espace ou sous-algèbre engendré par un ensemble fini ou une famille dénombrable de compacts). Nous sommes sûrs que de tels espaces sont des duaux d'espaces $\mathfrak{F}$.

La proposition 6 sera jugée intéressante par ceux qui pensent que la vraie dénombrabilité implique aussi métrasibilité ou séparabilité.

(6,2) Soit E un espace ffl de type dénombrable. Soit $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots$ une suite fondamentale de bornés convexes symétriques, soit $\mathcal{T}_k = \mathcal{T}(B_k)$. Nous supposons que $\mathcal{T}_k$ est compact, cela ne nuit pas à la généralité.

Soit alors F_k l'espace des formes linéaires sur E_k, dont la restriction à B_k est continue pour τ_k, avec la topologie de la convergence uniforme sur B_k. (E_k est l'espace vectoriel absorbé par B_k).

La restriction est une application linéaire continue, u_k, de F_k dans F_{k-1}. L'image $u_k F_k$ est dense dans F_{k-1}, puisque la transposée de u_k est l'application identique de E_{k-1} dans E_k, et qu'un homomorphisme d'espaces de Banach a une image dense si sa transposée est biunivoque. La norme de u_k est inférieure à l'unité puisque $B_{k-1} \subseteq B_k$.

Soit alors $x \in E$, $x \in E_k$ pour k suffisamment grand. Supposons même que $x \in B_k$. Soit ensuite $t_k \in F_k$ tel que $t_K(x) = 1$. Un tel élément existe si $x \neq 0$. L'image de u_{k+1} est dense dans F_k, choisissons $t_{k+1} \in F_{k+1}$ tel que $\| u_{k+1} t_{k+1} - t_k \|_{F_k} < \varepsilon_k$.
Puis par récurrence, choisissons t_{k+r} tel que

$$\| u_{k+r} t_{k+r} - t_{k+r-1} \|_{F_{k+r-1}} < \varepsilon_{k+r-1}$$

La suite de formes linéaires u_{k+r} est définie sur une suite croissante de sous-espaces de E, et converge uniformément sur chaque B_{k+r}. La limite est définie sur tout E, est continue sur chaque B_{k+r}, et prend au point t une valeur non nulle. (Nous supposons implicitement que $\sum \varepsilon_k < 1$).

(6,3) Reste à montrer que F est séparable si chaque τ_k est métrisa sable. F_k est séparable quel que soit k. Nous devons trouver une suite d'éléments de F, qui sépare E, à partir bien entendu de suites d'éléments de F_k qui séparent E_k.

Soit donc t_{kj} une suite totale d'éléments de F_k. Pour chaque r, soit t_{kjr} un élément de F tel que $\| u_k t_{kjr} - t_{kj} \| < 2^{-r}$. (Où u_k est l'application restriction de F dans F_k). Si $x \in E$, $x \neq 0$, nous pouvons trouver k tel que $x \in E_k$, puis t_{kj} tel que $t_{kj}(x) \neq 0$. Si alors $u_k t_{kjr}$ est suffisamment voisin en norme de t_{kj}, $t_{kjr}(x) = u_k t_{kjr}(x) \neq 0$, et le résultat est démontré.

Corrections :

page 9, ligne 2 du bas, lire : les morphismes de V.

page 17, ligne 1, lire : commutatifs.

page 18, lire p à coté de la première flèche verticale du diagramme

page 22, ligne 3, lire : $M_1 \amalg_A M_2$.

page 23, lire (1,7,1,1) devant le diagramme.

page 30, ligne 15-16, lire : toute relation d'équivalence réalisable est effective.

page 35, lire (2,2,1,1) devant le diagramme.

page 43, ligne 2, lire : d'homomorphie.

page 50, lire : (3,1,2,1) devant le diagramme.

pages 51-52, supprimer "Cependant dans une $\ldots_{g}$ est alors une représentation".

page 57, ligne 9, lire : relation d'équivalence réalisable compatible.

page 59, ligne 9, lire (3,3,2) <u>Définition</u>.

page 62, ligne 9, lire m.(m×m).

page 63, ligne 6 du bas, lire C_{Ω}-groupe.