PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

H. BUCHWALTER

Espaces vectoriels bornologiques

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1965, tome 2, fascicule 1
, p. 2-53

<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1965__2_1_2_0>

Publications du
Département de
Mathématiques
Lyon 1965 t.2-1

ESPACES VECTORIELS BORNOLOGIQUES

H. Buchwalter

Divers mathématiciens ont introduit, depuis quelques années, des structures non topologiques sur les espaces vectoriels appelées à rendre les mêmes services que les structures topologiques. Ainsi fleurissent les notions de pseudo-convergence et de pseudo-topologie dans [6] . Une synthèse a été mise en forme par L. Waelbroeck, [8] où les espaces portent le nom d'espaces à bornés convexes. Un rapprochement avec la théorie des espaces localement convexes est esquissé dans [10] où l'on trouve aussi un catalogue des problèmes ouverts (qui sont nombreux !) ainsi que le point de départ de diverses applications (algèbres à bornés de L. Waelbroeck ; différentiabilité ; espaces de fonctions analytiques).

Les espaces vectoriels admettront toujours comme corps de base le corps K, qui désignera indifféremment le corps $\mathbb{R}$ des réels ou le corps $\mathbb{C}$ des complexes.

1. CATEGORIE $\mathbb{E}\mathrm{VB}$ DES ESPACES VECTORIELS BORNOLOGIQUES.

(1,1) Catégorie $\mathbb{B}\mathrm{OR}$ des espaces bornologiques.

(1,1,1). Un objet de $\mathbb{B}\mathrm{OR}$ est défini par la donnée d'un ensemble X et d'une famille $\mathfrak{B}$ de parties de X, dites bornées, vérifiant :

(B) $\mathfrak{B}$ est un recouvrement de X, héréditaire, stable par réunion finie.

Cela signifie aussi que toute partie finie de X est bornée, que toute partie contenue dans une partie bornée est bornée, et que la réunion de deux parties bornées est bornée.

On dit souvent que $\mathfrak{B}$ définit sur X une bornologie.

Les morphismes de $\mathbb{B}\mathrm{OR}$ sont les applications bornées, c'est-à-dire les applications $f : (X_1, \mathfrak{B}_1) \longrightarrow (X_2, \mathfrak{B}_2)$ telles que $f(\mathfrak{B}_1) \subset \mathfrak{B}_2$, qui transforment donc toute partie bornée en une partie bornée.

(1,1,2) Ordre sur les bornologies.

Sur un même ensemble X une bornologie $\mathcal{A}$ est dite plus fine qu'une bornologie $\mathfrak{B}$ lorsque $\mathcal{A} \subset \mathfrak{B}$. Cela signifie encore que l'application identique 1_X de X, est un morphisme de $(X, \mathcal{A})$ dans $(X, \mathfrak{B})$.

Il est clair que la relation "$\mathcal{A}$ plus fine que $\mathfrak{B}$" structure l'ensemble de toutes les bornologies sur X en un treillis achevé.

Sur X, la bornologie la moins fine, ou bornologie grossière est celle pour laquelle X est borné. La bornologie la plus fine, où bornologie discrète n'admet pour bornes que les <u>parties finies</u> de X.

Il ne nous sera pas utile de poursuivre l'étude de la catégorie $\mathbb{B}$OR. Remarquons seulement qu'on pourrait facilement définir sur cette catégorie les notions de sous-espace, espace quotient, produit quelconque et somme quelconque.

<u>Exemples</u>. 1. Soient $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces bornologiques. Sur l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathbb{B}OR}(X,Y)$ on peut placer une bornologie associée aux bornologies $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Il suffit d'appeler bornées les parties P de Hom(X,Y) qui sont formées de <u>fonctions uniformément bornées</u>.

Ce sont en fait les parties "équibornées" de Hom(X,Y), c'est-à-dire telles que, pour tout $A \in \mathcal{A}$, l'ensemble $P(A) = \bigcup_{f \in P} f(A)$ soit un élément de $\mathcal{B}$.

2. Soient E,F deux espaces uniformes. L'ensemble $X = \mathcal{C}_u(E,F)$ des applications uniformément continues de E dans F est naturellement muni d'une bornologie $\mathcal{E}$, pour laquelle les bornés sont les ensembles uniformément équicontinus.

(1,2) <u>Catégorie</u> $\mathbb{E}$VB <u>des espaces vectoriels bornologiques</u>.

Soit E un espace vectoriel. Sur le corps de base K il existe une bornologie naturelle associée à la valeur absolue de K (ce qui montre qu'on pourrait procéder de même avec un corps valué quelconque).

On dit qu'une <u>bornologie</u> $\mathcal{B}$ <u>sur</u> E <u>est vectorielle</u> (ou compatible avec la structure vectorielle) si les applications $(\lambda, x) \to \lambda x$ de $K \times E$ dans E et $(x,y) \to x+y$ de $E \times E$ dans E sont <u>bornées</u>.

Cette définition sous-entend que l'on a placé sur les produits $K \times E$ et $E \times E$ des bornologies produits évidentes, où les parties bornées sont celles contenues dans un produit de parties bornées.

Il est facile de constater que $\mathfrak{B}$ est une bornologie vectorielle sur E si et seulement si l'axiome (BV) suivant est satisfait :

(BV) $\mathfrak{B}$ <u>est un recouvrement héréditaire de</u> E, <u>stable par homothétie, somme vectorielle, et passage à l'enveloppe équilibrée</u>.

Un objet de la catégorie $\mathbb{E}\mathrm{VB}$ des espaces vectoriels bornologiques est <u>un espace vectoriel</u> E <u>muni d'une bornologie vectorielle</u> $\mathfrak{B}$. Les morphismes sont les <u>applications linéaires et bornées</u>.

Dans un evb E il existe un système fondamental de bornés formé de parties équilibrées.

<u>Exemple</u>. Soit E un espace vectoriel topologique (evt). Les parties bornées de E au sens vectoriel topologique, forment une bornologie vectorielle sur E. Il importe de remarquer qu'on obtient là une bornologie tout à fait particulière vérifiant l'axiome de dénombrabilité suivant.

(D) <u>Pour qu'une partie</u> B <u>de</u> E <u>soit bornée il suffit que toute suite de</u> B <u>soit bornée</u>.

(1.2) <u>Produits, sous-espaces et quotients dans la catégorie</u> $\mathbb{E}\mathrm{VB}$.

On peut définir sur la catégorie $\mathbb{E}\mathrm{VB}$ les notions de sous-espace, espace quotient, produit, somme directe, limite projective, limite inductive. Pour la rapidité de l'exposé nous nous contentons de définir ce qui nous est indispensable pour poursuivre.

(1,3,1) Espace produit.

Soit $E=\prod_{i\in I} E_i$ un espace vectoriel produit d'une famille quelconque (non vide) d'espaces vectoriels E_i. Lorsque les E_i sont munis de bornologies vectorielles $\mathfrak{B}_i$ il existe sur E une bornologie vectorielle $\mathfrak{B}$ unique, la moins fine de toutes les bornologies rendant bornées toutes les projections $pr_i : E \longrightarrow E_i$. Les bornés de $\mathfrak{B}$ sont les parties de E contenues dans un "borné élémentaire" $B=\prod B_i$, où, pour tout $i\in I$, B_i est borné dans E_i. On constate :

(1,3,1) Proposition. Pour qu'une application linéaire $u:F \longrightarrow E$; d'un evb F dans E soit bornée il faut et il suffit que toutes les applications composées $u_i = pr_i \circ u : F \longrightarrow E_i$, soient bornées.

(1,3,2) Sous-espace.

Soient E un evb et F un sous-espace vectoriel de E. On peut munir F d'une bornologie vectorielle unique, la moins fine parmi celles rendant bornée l'injection canonique $j : F \longrightarrow E$. Une partie $B\subset F$ est bornée si et seulement si B est bornée dans l'espace E, ce qui montre encore que les bornés de F sont exactement les traces sur F des bornés de E.

(1,3,3) Espace quotient

Soient E un evb et H un sous-espace vectoriel de E. L'espace quotient E/H est muni d'une bornologie vectorielle unique, la plus fine parmi celles rendant bornée la surjection canonique $\varphi : E \longrightarrow E/H$

Une partie $B\subset E/H$ est bornée si et seulement si il existe une partie

<u>bornée</u> $A \subset E$ <u>telle que</u> $B \subset \varphi(A)$. Alors :

(1,3,3) <u>Proposition</u>. Pour qu'une application linéaire $u : E/H \longrightarrow F$, de E/H dans un evb F, soit bornée il faut et il suffit que la composée $v = u \circ \varphi : E \longrightarrow F$ soit bornée.

(1,4) <u>Convergence bornologique</u>.

On introduit une notion de convergence pour les suites d'un evb E, dite <u>convergence bornologique</u> (ou encore convergence locale au sens de Mackey) par la définition suivante ;

(1,4,1) <u>Définition</u>. Dans un evb E une suite (x_n) converge bornologiquement vers 0 s'il existe un borné B et une suite (ε_n) de scalaires, tendant vers 0, tels que, pour tout n, $x_n \in \varepsilon_n B$.

Comme il est loisible de choisir B équilibré, on peut supposer si l'on veut, que la suite (ε_n) est positive et décroissante vers 0.

Une suite (x_n) convergeant bornologiquement vers 0 est notée : $x_n \xrightarrow{M} 0$. On dit que $x_n \xrightarrow{M} x$ lorsque $(x_n - x) \xrightarrow{M} 0$;

Les propriétés de convergence bornologique sont résumées en :

(1,4,2) <u>Proposition</u>. a) Soit E un evb. Si $x_n \xrightarrow{M} x$, $y_n \xrightarrow{M} y$, et si $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ dans le corps K, alors $(x_n + y_n) \xrightarrow{M} (x+y)$ et $\lambda_n x_n \xrightarrow{M} \lambda x$.

b) Soit F un autre evb. Si $u : E \longrightarrow F$ est un morphisme et si $x_n \xrightarrow{M} 0$ dans E alors $u(x_n) \xrightarrow{M} 0$ dans F.

c) Réciproquement si F est un espace vectoriel topologique et si $u : E \longrightarrow F$ est une application linéaire qui transforme toute suite $x_n \xrightarrow{M} 0$ dans E en une suite

| $u(x_n)$ bornée dans F, alors u est bornée.

Démontrons seulement c). Si u était non bornée, il existerait un borné $A\in E$ tel que u(A) ne soit pas borné dans F. On pourrait donc trouver un voisinage de O dans F, soit W, tel que, pour tout $n: u(A) \not\subset nW$, et par conséquent une suite $a_n \in A$ telle que $u(a_n) \notin nW$. La suite $b_n = n^{-1/2}.a_n$ convergerait bornologiquement vers O dans E et la suite image $u(b_n)$ ne serait pas bornée dans F, ce qui est absurde.

Remarque. Dans c) on ne peut supposer que F est un evb quelconque. Toutefois si F est un evb vérifiant la condition (D) de (1,2), une application linéaire $u: E \longrightarrow F$ est bornée dès qu'elle transforme toute suite bornée de E en une suite bornée de F.

De toute façon on déduit de la proposition précédente le résultat important :

(1,4,2,1) Corollaire. Pour qu'une forme linéaire sur un evb E soit bornée il faut et il suffit qu'elle reste bornée sur toute suite de E convergeant bornologiquement vers O.

(1,5) Parties b-fermées d'un evb.

(1,5,1) Définition. On dit qu'une partie H d'un evb E est bornologiquement fermée (ou b-fermée pour simplifier) si les conditions $x_n \in H$ et $x_n \xrightarrow{M} x$ entraînent $x \in H$.

Par une vérification évidente, on obtient:

(1,5,2) Proposition. a) Dans un evb E une réunion finie et une intersection quelconque de parties b-fermées sont b-fermées.

b) Soit F un autre evb. Si $u:E \longrightarrow F$ est un morphisme, l'image réciproque par u d'une partie b-fermée de F est b-fermée dans E.

Remarque. On pourrait avec a) définir la b-fermeture d'une partie P quelconque de E comme l'intersection des parties b-fermées de E contenant P. Mais en général un point de cette b-fermeture n'est pas limite bornologique d'une suite de points de P. C'est pourquoi aussi on ne considère pas sur E la topologie dont les parties fermées sont les parties b-fermées de E.

(1,6) Espaces vectoriels bornologiques séparés.

(1,6,1) Définition. Un evb E est dit séparé lorsque tout sous-espace vectoriel borné est nul.

Cela revient à dire qu'il n'y a pas, dans E, de droite bornée, ou encore à postuler l'unicité de la limite de toute suite bornologiquement convergente. On constate aisément ;

(1,6,2) Proposition. a). Un produit $E=\prod E_i$ d'evb séparés E_i est un evb séparé.

b). Soit E un evb. Pour qu'un evb quotient E/H soit séparé il faut et il suffit que H soit un sous-espace vectoriel b-fermé de E.

c) Un sous-espace F d'un evb séparé E est séparé.

Démontrons b). La condition nécessaire se ramène, compte tenu de (1,5,2,b), à prouver que dans un evb séparé F, le sous-espace nul est b-fermé, ce qui est facile. Pour la condition suffisante, soit $K\varphi(x)$ une droite bornée de E/H. Il existe un borné $A\subset E$ tel que $K\varphi(x)\subset\varphi(A)$, donc $Kx\subset A+H$, ce qui entraine $x\in\frac{1}{n}.A+H$ et prouve l'existence d'une suite $x_n\in H$ telle que $x_n\xrightarrow{M} x$. Comme H est b-fermé on a $x\in H$ d'où $\varphi(x)=0$ ce qui termine la démonstration.

On peut interpréter différemment (1,6,2) en disant que, <u>dans une evb</u> E <u>les sous-espaces vectoriels b-fermés sont exactement les noyaux des morphismes</u> $u:E\longrightarrow F$ <u>dans des evb</u> F <u>séparés</u>.

(1,7) <u>Bornologies vectorielles sur</u> K^n.

On dit qu'un evb E est <u>presque-complet</u> si toute suite qui vérifie bornologiquement la condition de Cauchy est bornologiquement convergente. De toute évidence :

(1,7,1) <u>Proposition</u>. Tout sous-espace vectoriel b-fermé d'un evb presque-complet est un evb presque-complet. Réciproquement dans un evb séparé tout sous-espace vectoriel presque-complet est b-fermé.

On peut maintenant démontrer que sur un espace vectoriel de dimension finie, il n'existe qu'une seule bornologie vectorielle séparée. Pour cela :

(1,7,2) <u>Lemme</u>. Tout espace vectoriel bornologique séparé de dimension 1 est isomorphe au corps K des scalaires.

Soit $E=Ke, e\neq 0$, un evb de dimension 1. L'application $u:E\longrightarrow K$ définie par $u(\lambda e)=\lambda$ est une forme linéaire bijective. Comme u^{-1} est bornée il suffit de prouver que u est bornée. Soit B un borné équilibré de E ; alors u(B) est équilibré dans K. Si u(B) n'était pas borné dans K on aurait nécessairement $u(B)=K$ d'où $B=E$, ce qui est absurde puisque E est séparé.

On tire de là :

(1,7,3) Théorème. Pour qu'une forme linéaire u sur un evb E soit bornée il faut et il suffit que son noyau soit b-fermé dans E.

La condition étant nécessaire, montrons qu'elle est suffisante. Si $H=\mathrm{Ker}\,u$ est b-fermé, E/H est un evb séparé de dimension 1, donc isomorphe au corps K, dans un isomorphisme v tel que $u=v\circ\varphi$, ce qui montre bien que u est bornée.

Alors :

(1,7,4) Théorème. Tout evb séparé E de dimension finie n est isomorphe à l'espace K^n.

Raisonnons par récurrence sur n en utilisant le fait que K est un corps valué complet, donc un evb presque-complet.

Soit (e_k), $1\leq k\leq n$, une base de E. Tout x de E s'écrit :
$x=\sum u_k(x)e_k$ où u_k est la forme linéaire $k^{\text{ième}}$ coordonnée.

Fixons k ; le noyau $\mathrm{Ker}.u_k$ est un hyperplan de E, de dimension (n-1), séparé, donc isomorphe à K^{n-1} en tant que sous-evb de E, d'après l'hypothèse de récurrence. Comme K^{n-1} est presque-complet puisque K l'est (évident), $\mathrm{Ker}.u_k$ est aussi presque-complet, donc b-fermé dans E, (1,7,1). Alors u_k est une forme linéaire bornée sur E, d'après (1,7,3). L'application $u=(u_k)_{1\leq k\leq n}$, de E dans K^n est donc bijective et bornée. Comme u^{-1} est trivialement bornée cela suffit.

2. CATEGORIE $\mathbb{E}BC$ DES E.V BORNOLOGIQUES CONVEXES.

De même que les espaces localement convexes (elc) se particularisent parmi les evt il convient d'étudier de façon plus détaillée les evb stables par passage à l'enveloppe convexe et du même coup à l'enveloppe disquée.

Dans toute la suite nous appelons disque un ensemble équilibré convexe et nous désignons par $\Gamma(A)$ l'enveloppe disquée de A.

Ces evb convexes sont nommés ici ebc ; ils forment une catégorie $\mathbb{E}BC$, dont les morphismes sont encore les applications linéaires et bornées. Un objet de $\mathbb{E}BC$ est donc un espace vectoriel E muni d'une famille $\mathfrak{B}$ de parties de E vérifiant l'axiome :

(BVC) $\mathfrak{B}$ est un recouvrement héréditaire de E tel que, pour tous

$A \in \mathfrak{B}, B \in \mathfrak{B}$ et $\lambda \in K$ on ait $\lambda\Gamma(A \cup B) \in \mathfrak{B}$.

Il est clair que dans un ebc il existe un système fondamental de parties bornées formé de disques.

(2,1) Sous-espaces - Espace produit - Limite projective.

(2,1,1) Sous-espace. Il suffit de remarquer que la bornologie induite sur un sous-espace vectoriel F par un ebc E est une bornologie convexe.

(2,1,2) Espace produit. De même un produit vectoriel bornologique d'ebc est en fait un ebc.

(2,1,3) Limite projective

On suppose que I est un ensemble préordonné, filtrant à droite pour un préordre $\leq$. On peut ne pas supposer que I est filtrant ; cependant nous introduisons cette condition pour parfaire la symétrie avec la notion de limite inductive.

Un système projectif (ou spectre projectif) d'ebc, indexé par I, est une famille (E_i, π_{ij}) où les E_i sont des ebc et les $\pi_{ij}: E_j \longrightarrow E_i$ des morphismes, définis pour $i\leq j$ et vérifiant :

(LP_1) Pour tout i, π_{ii} est l'application identique de E_i.

(LP_2) La condition $i\leq j\leq k$ entraîne $\pi_{ik} = \pi_{ij} \circ \pi_{jk}$

Soit L un ebc. On se donne des morphismes $u_i : L \longrightarrow E_i$ tels que, pour $i\leq j$ on ait : $u_i = \pi_{ij} \circ u_j$. L'application $\bar{u}=(u_i)$ de L dans le produit $F=\prod E_i$ est un morphisme tel que, pour $i\leq j$ on ait :

$(\pi_{ij} \circ pr_j - pr_i)\circ \bar{u} = 0$.

Soit donc $H_{ij}=\mathrm{Ker}.(\pi_{ij}\circ pr_j - pr_i)$ le noyau, dans l'espace produit F, de l'application $\pi_{ij}\circ pr_j - pr_i$. Puisque $\mathrm{Im}.\bar{u} \subset H_{ij}$ on a aussi $\mathrm{Im}\, \bar{u} \subset E= \bigcap_{i\leq j} H_{ij}$.

Désignons par π l'injection canonique de $E \longrightarrow F$, et par π_i l'application composée $\pi_i = pr_i \circ \pi : E \longrightarrow E_i$. Plaçons sur E la bornologie induite par celle de F, qui fait de E un ebc, sous-espace de F. On constate que :

. les applications $\pi_i : E \longrightarrow E_i$ sont des morphismes tels que pour $i\leq j$, on ait : $\pi_i = \pi_{ij} \circ \pi_j$.

. l'application $\overline{u} : L \longrightarrow F$, se factorise à travers E, en $\overline{u} = \pi \circ u$ où $u : L \longrightarrow E$ est un morphisme tel que, pour tout i, $u_i = \pi_i \circ u$

Tout cela se résume par le diagramme commutatif de morphismes :

$i \leq j$

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[d, "u"] \arrow[ddl, "u_j"'] \arrow[ddr, "u_i"] & \\
 & E \arrow[dl, "\pi_j"'] \arrow[dr, "\pi_i"] & \\
E_j \arrow[rr, "\pi_{ij}"] & & E_i
\end{tikzcd}$$

Ainsi le système (E, π_i) est solution d'un problème universel qu'il est inutile d'énoncer explicitement.

L'ebc E s'appelle limite projective du système projectif (E_i, π_{ij}). On le note lorsqu'aucune confusion n'est à craindre concernant les π_{ij}, $E = \varprojlim E_i$.

Remarques. 1. Les morphismes π_i étant les restrictions à E des morphismes pr_i de projection la condition $x=0$ dans E est équivalente à la condition : pour tout i, $\pi_i(x)=0$ dans E_i.

2. Les bornés de E sont les parties contenues dans un "borné élémentaire" $B = \bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1}(B_i)$ où, pour tout i, B_i est borné dans E_i.

3. E s'identifie exactement aux éléments $x=(x_i)$ du

produit $\prod E_i$ qui sont "cohérents", c'est-à-dire tels que, pour $i \leq j$, on ait : $x_i = \pi_{ij}(x_j)$.

4. La propriété universelle de E servira souvent à construire E à un isomorphisme près.

Notons les résultats :

(2,1,3,1) Proposition. Pour qu'une application linéaire $v: G \longrightarrow E$, d'un ebc G dans E, soit bornée il suffit que, pour tout i, l'application $v_i = \pi_i \circ v : G \longrightarrow E_i$, soit bornée.

(2,1,3,2) Proposition. Si les E_i sont tous des ebc séparés, leur limite projective E est séparée et b-fermée dans le produit $\prod E_i$.

Cela résulte du fait que chaque espace H_{ij} est b-fermé dans le produit $\prod E_i$, qui est un ebc séparé.

Enfin rappelons une propriété algèbrique :

(2,1,3,3) Proposition. Si tous les morphismes π_{ij} sont injectifs il en est de même des morphismes π_i.

(2,2) Espace quotient. Somme directe. Limite inductive.

(2,2,1) Espace quotient.

Il est bien clair qu'un quotient E/H d'un ebc E est encore un ebc.

(2,2,2) Somme directe.

Soit $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ un espace vectoriel somme directe d'une famille quelconque d'ebc E_i. Il existe sur E une bornologie vectorielle convexe unique, la plus fine parmi celles rendant bornées les injections canoniques $\theta_i : E_i \longrightarrow E$. Les bornés de E sont les parties de E contenues dans l'enveloppe disquée d'une réunion finie d'images de bornés des espaces E_i, c'est-à-dire qu'un système fondamental de bornés dans E est formé des disques $B = \Gamma(\bigcup_{i\in J} \theta_i(B_i))$ où J est une partie <u>finie</u> quelconque de I et, pour $i \in J$, B_i un borné quelconque de E_i.

On voit aisément :

(2,2,2,1) <u>Proposition</u>. Soit F un ebc. Si $u : E \longrightarrow F$ est une application linéaire, pour qu'elle soit bornée, il faut et il suffit que toutes ses restrictions $u_i = u \circ \theta_i : E_i \longrightarrow F$, soient bornées.

<u>Remarque</u>. Lorsque I est un ensemble <u>fini</u>, la somme directe $\bigoplus E_i$ coïncide bornologiquement avec le produit $\prod E_i$. Cette affirmation permet de voir que, dans le cas général, un borné de $E = \bigoplus E_i$ est une partie de E, contenue et bornée dans un espace $E_J = \bigoplus_{i\in J} E_i = \prod_{i\in J} E_i$, où J est une partie finie de I. A ce titre, si tous les E_i sont séparés, il en est de même de tous les E_J de sorte que E ne possède aucune droite bornée.

Ainsi :

(2,2,2,2) <u>Proposition</u>. Une somme directe d'ebc séparés est un ebc séparé.

(2,2,2) <u>Limite inductive</u>.

Soit I un ensemble préordonné filtrant à droite pour un préordre $\leqslant$. Un système inductif (ou spectre inductif) d'ebc, indexé par I, est une famille $(E_i\ ,\pi_{ji})$ où les E_i sont des ebc et les $\pi_{ji} : E_i \longrightarrow E_j$ des morphismes, <u>définis pour $i \leq j$</u>, et vérifiant :

(LI_1). <u>Pour tout i,</u> π_{ii} <u>est l'application identique de</u> E_i.

(LI_2). <u>La condition</u> $i \leq j \leq k$ <u>entraîne</u> $\pi_{ki} = \pi_{kj} \circ \pi_{ji}$

Soit L un ebc. On se donne des morphismes $u_i : E_i \longrightarrow L$, tels que, pour $i \leq j$, on ait : $u_i = u_j \circ \pi_{ji}$. L'application unique $\overline{u} = (u_i)$ telle que, pour tout i : $\overline{u} \circ \theta_i = u_i$, est un morphisme de la somme directe $F = \bigoplus E_i$ dans L. La condition : $u_i = u_j \circ \pi_{ji}$ pour $i \leq j$, imposée aux morphismes u_i se traduit par :

$$i \leq j \quad \Rightarrow \quad \overline{u} \circ (\theta_i - \theta_j \circ \pi_{ji}) = 0$$

Soit donc $N_{ji} = \mathrm{Im}(\theta_i - \theta_j \circ \pi_{ji})$ l'image, dans F, de l'application $(\theta_i - \theta_j \circ \pi_{ji})$. Puisque $N_{ji} \subset \mathrm{Ker}.\overline{u}$, on a aussi $N \subset \mathrm{Ker}.\overline{u}$ où $N = \sum N_{ji}$ est le sous-espace vectoriel de F engendré par tous les N_{ji}.

Désignons par π l'application canonique : $F \longrightarrow F/N = E$, par π_i l'application composée $\pi_i = \pi \circ \theta_i : E_i \longrightarrow E$. Plaçons sur $E = F/N$ la bornologie quotient, qui fait de E un ebc.

On constate que ;

. <u>les applications</u> $\pi_i : E_i \longrightarrow E$ <u>sont des morphismes tels</u> que, pour $i \leq j$, on ait $\pi_i = \pi_j \circ \pi_{ji}$.

. <u>l'application</u> $\overline{u} : F \longrightarrow L$, <u>se factorise à travers</u> E, <u>en</u> $\overline{u} = u \circ \pi$ <u>où</u> $u : E \longrightarrow L$ <u>est un morphisme tel que</u>, <u>pour tout</u> i, <u>on ait</u> : $u_i = u \circ \pi_i$.

Tout cela se résume par le diagramme commutatif de morphismes :

$i \leq j$

$$
\begin{tikzcd}
& L & \\
& E \arrow[u, "u"] & \\
E_i \arrow[uur, "u_i"] \arrow[ur, "\pi_i"] \arrow[rr, "\pi_{ji}"] & & E_j \arrow[uul, "u_j"'] \arrow[ul, "\pi_j"']
\end{tikzcd}
$$

Aussi le système (E, π_i) est solution d'un problème universel qu'on se dispense d'expliciter. L'ebc E s'appelle limite inductive des ebc E_i. On le note généralement $E = \varinjlim E_i$.

<u>Remarques</u>. 1. Le morphisme $\pi : \bigoplus E_i \longrightarrow E$ étant surjectif, on voit que E est vectoriellement engendré par les sous-espaces $\pi_i(E_i)$. Mais pour $i \leq j$ on a $\pi_i(E_i) = \pi_j \circ \pi_{ji}(E_i) \subset \pi_j(E_j)$.
<u>Par suite</u>, E <u>est réunion filtrante des sous-espaces</u> $\pi_i(E_i)$.

2. Pour les mêmes raisons <u>les bornés de</u> E <u>sont exactement les ensembles de la forme</u> $B = \pi_i(B_i)$ où i est fixé quelconque, et B_i borné dans E_i.

Citons encore les résultats :

(2,2,3,1) <u>Proposition</u>. Pour qu'une application linéaire $v : E \longrightarrow G$ de E dans un ebc G soit bornée il faut et il suffit que, pour tout i, l'application $v_i = v \circ \pi_i : E_i \longrightarrow G$, soit bornée.

(2,2,3,2) Proposition. Si tous les morphismes π_{ji} sont injectifs il en est de même des morphismes π_i.

Mais il n'est pas toujours vrai qu'une limite inductive d'ebc sep soit séparée. La question est résolue avec :

(2,2,3,3) Proposition. Pour que $E = \varinjlim E_i$ soit séparé il faut et il suffit que, pour tout i, $\mathrm{Ker}.\pi_i$ soit un sous-espace vectoriel b-fermé de E_i.

La condition est nécessaire puisque, lorsque E est séparé, (0) est b-fermé dans E, donc $\mathrm{Ker}.\pi_i$ l'est aussi dans E_i. Réciproquement soit $x \in E$ tel que Kx soit borné. On peut trouver un indice i et un borné $B_i \subset E_i$ tels que $x = \pi_i(x_i)$ et $Kx \subset \pi_i(B_i)$. Alors, pour tout entier n , $x_i \in \frac{1}{n} .B_i + \mathrm{Ker}.\pi_i$, ce qui entraîne, $\mathrm{Ker}.\pi_i$ étant b-fermé, $x_i \in \mathrm{Ker}.\pi_i$ donc $x=0$.

On déduit de là :

(2,2,3,4) Proposition. Lorsque les applications π_i sont toutes injectives E est séparé si et seulement si tous les E_i sont séparés.

Car $\mathrm{Ker}.\pi_i$ étant nul dans E_i , $\mathrm{Ker}.\pi_i$ b-fermé signifie exactement que E_i est séparé.

Lorsque toutes les π_{ji} sont injectives, on a en fait, avec (2,2,3,2) la situation suivante :

(2,2,3,5) E <u>est un espace vectoriel réunion filtrante de sous-espaces vectoriels</u> E_i <u>sur lesquels existent des bornologies convexes</u> $\mathcal{B}_i$ <u>telles que</u> $E_i \subset E_j \Rightarrow \mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}_j$. <u>Sur</u> E <u>la bornologie est définie par</u>

<u>la famille</u> $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_i$, <u>elle est séparée si et seulement si toutes les</u> $\mathcal{B}_i$ <u>le sont</u>.

Nous verrons que tout ebc peut s'obtenir de cette façon et même que, dans le cas séparé, on peut choisir pour les E_i des espaces normés.

(2,3) <u>Disques complétants dans un espace vectoriel</u>.

Dans un espace vectoriel E on associe à tout disque A de E l'espace vectoriel $E_A = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda A$, qui est l'espace vectoriel engendré par A. On munit cet espace E_A de la <u>semi-norme</u> jauge de A :

$$x \in E_A \qquad p_A(x) = \inf_{\substack{x \in \lambda A \\ \lambda > 0}} \lambda$$

(2,3,1) <u>Définition</u>. On dit que A est un disque normant (resp : complétant) lorsque E_A est un espace normé (resp : un espace de Banach).

Dire que A est normant signifie encore que A ne contient aucune droite.

L'ensemble des disques de E est un treillis pour l'inclusion, avec les opérations $A \wedge B = A \cap B$ et $A \vee B = \Gamma(A \cup B)$. En fait on utilise aussi la somme vectorielle $(A + B)$. Comme $\Gamma(A\cup B) \subset (A + B) \subset 2\Gamma(A\cup B)$ on a $E_{(A+B)} = E_{\Gamma(A\cup B)}$ et sur cet espace commun les semi-normes $p_{(A+B)}$ et $p_{\Gamma(A\cup B)}$ sont équivalentes de sorte que $(A + B)$ et $\Gamma(A\cup B)$ sont simultanément normants ou complétants.

(2,3,2) <u>Proposition.</u> Soient A et B deux disques d'un espace vectoriel E . Alors :

a) $E_{(A\cap B)} = E_A \cap E_B$; $E_{(A+B)} = E_A + E_B$

b) $p_{A\cap B}(x) = \mathrm{Max}(p_A(x) ; p_B(x))$

c) $p_{(A+B)}(x) = \inf\limits_{\substack{x = y+z \\ y\in E_A, z\in E_B}} \mathrm{Max}(p_A(y), p_B(z))$

Les vérifications sont évidentes avec la définition d'une jauge.

Convenons maintenant une fois pour toutes de choisir sur un produit $E = E_1 \times E_2$ de deux espaces E_1 et E_2, semi-normés par des semi-normes respectives p_1 et p_2, la semi-norme produit $p = \mathrm{Max}(p_1, p_2)$ définie par : $p(x_1, x_2) = \mathrm{Max}(p_1(x_1), p_2(x_2))$.
Cela étant :

(2,3,3) Proposition. Soient A et B deux disques d'un espace vectoriel E.

a) La suite d'espaces semi-normés :

$$0 \longrightarrow E_{(A\cap B)} \xrightarrow{u} E_A \times E_B \xrightarrow{v} E_{(A+B)} \longrightarrow 0$$

où u et v sont définies par $u(x) = (x,x)$ et $v(x,y) = x-y$ est exacte.

b) Si q est, sur $E_A \times E_B$, la semi-norme produit, alors $p_{A\cap B} = q\circ u$ est la semi-norme induite et $p_{(A+B)}$ est la semi-norme quotient .

Le fait que la suite est exacte est bien connu (cf : Bourbaki Algèbre linéaire) et se retrouve aisément. Quant à la partie métrique de la proposition elle résulte de (2,3,2).

En suivant une suggestion de L. Waelbroeck on introduit :

(2,3,4) Définition. Deux disques A et B d'un espace vectoriel E sont dits associés lorsque leur somme (A+B) est un disque normant.

Dans ce cas, évidemment, A et B sont déjà des disques normants.

La proposition (2,3,2) conduit alors au critère suivant :

(2,3,5) Proposition. Soient A et B deux disques de E. Pour que A et B soient associés il faut et il suffit que $E_{(A\cap B)}$ soit fermé dans $E_A \times E_B$.

En effet, en tant qu'espace semi-normé, $E_{(A+B)}$ est isométrique au quotient $(E_A \times E_B)/E_{(A\cap B)}$, donc $E_{(A+B)}$ est séparé, c'est-à-dire normé, si et seulement si $E_{(A\cap B)}$ est fermé dans $E_A \times E_B$.

On déduit de là sans difficulté :

(2,3,6) Théorème. Soient A et B deux disque complétants de E. Pour que $A \cap B$ soit complétant il faut et il suffit que A et B soient associés. Alors (A+B) est complétant.

Pour étudier l'image d'un disque complétant par une application linéaire, on voit, en préliminaire :

(2,3,7) Proposition. Soient E, F deux espaces vectoriels et $u : E \to F$ une application linéaire. Pour tout disque A de E l'espace semi-normé $F_{u(A)}$ est isométrique à l'espace semi-normé quotient E_A/N où $N = (\mathrm{Ker}.u) \cap E_A$.

La restriction de u à E_A opère de E_A dans $F_{u(A)}$ et elle est surjective. Son noyau est exactement N ce qui assure l'isomorphisme algèbrique $F_{u(A)} \simeq E_A/N$. Mais, pour $y \in F_{u(A)}$:

$$p_{u(A)}(y) = \inf_{y \in \lambda u(A)} \lambda = \inf_{y = u(x)} \left(\left(\inf_{x \in \lambda A} \lambda\right)\right) = \inf_{y = u(x)} p_A(x).$$

Comme application :

(2,3,8) <u>Théorème</u>. Soient E, F deux espaces vectoriels et $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Si A est un disque complétant de E, $u(A)$ est un disque complétant de F si et seulement si c'est un disque normant de F.

Il est maintenant extrêmement tentant d'appliquer les résultats donnés par (2,3,6) pour retrouver sous une forme simplifiée et plus générale un théorème de Grothendieck ([4] , Intr.IV.4.th.A).

(2,3,9) <u>Théorème</u>. Soit (B_n) une suite de disques complétants dans un espace vectoriel E. Soit A un disque complétant de E, associé à tous les B_n. On suppose $A \subset \bigcup B_n$. Alors il existe un entier m tel que A soit absorbé par B_m.

Avec (2,3,6) on voit que $H_n = E_{(A \cap B_n)}$ et un espace de Banach. L'injection $j_n : H_n \longrightarrow E_A$ est une application linéaire continue de l'espace de Banach H_n dans l'espace de Banach E_A. L'hypothèse $A \subset \bigcup B_n$ assure : $E_A = \bigcup j_n(H_n)$.

Ainsi E_A est réunion dénombrable de sous-espaces $j_n(H_n)$. D'après le théorème de Baire, l'un, $j_m(H_m)$, de ces sous-espaces est non maigre dans E_A. Alors j_m est une application linéaire continue entre deux espaces de Banach dont l'image est non maigre. Cela assure, avec un théorème de Banach, que j_m est surjective, donc bijective et continue, donc un isomorphisme (avec le théorème des isomorphismes de Banach). Il résulte de là qu'il existe $\mu > 0$ tel que $A \cap B_m \supset \mu A$ ce qui signifie que B_m absorbe A.

(2,4) Disques bornés dans un ebc.

Lorsque E est un ebc il existe dans E un système fondamental de bornés formé de disques A. La famille des disques bornés de E est ordonnée par inclusion et pour $A \subset B$, l'injection $\pi_{BA} : E_A \longrightarrow E_B$ est bornée. Comme E est réunion des espaces E_A, on a :

(2,4,1) Proposition. Tout ebc E est limite inductive des espaces semi-normés E_A, lorsque A décrit les disques bornés de E (ou un système fondamental de disques bornés).

Si E est un ebc séparé, c'est la limite inductive des espaces normés E_A.

Dans un ebc séparé, deux disques bornés sont toujours associés car leur somme est bornée. Les théorèmes (2,3,6) et (2,3,8) donnent donc :

(2,4,2) Proposition. a) Soient A et B deux disques bornés complétants d'un ebc séparé E. Alors $A \cap B$, $(A+B)$ et $\Gamma(A \cup B)$ sont des disques bornés complétants.

b) Soient F un autre ebc séparé et $u : E \longrightarrow F$ un morphisme. L'image u(A) d'un disque borné complétant de E est un disque borné complétant de F.

On voit, avec cette proposition, que la famille $\mathfrak{B}_c$ des parties de E contenues dans un disque borné complétant définit sur E une bornologie plus fine que la bornologie initiale de E. Il suffit pour s'en assurer de voir que $\mathfrak{B}_c$ est un recouvrement de E. Mais, E étant séparé, tout disque borné qui est enveloppe disquée d'une partie finie de E est complétant, comme il résulte aisément de (1,7,4).

(2,5) Ebc complets.

Ils convient d'étudier les ebc séparés tels que leur bornologie coïncide avec la bornologie $\mathfrak{B}_c$, soit ;

(2,5,1) Définition. Un ebc E est dit complet s'il est déjà séparé et s'il possède un système fondamental de bornés formé de disques complétants.

Evidemment un ebc complet E est la limite inductive des espaces de BanachE_A, lorsque A décrit l'ensemble des disques bornés complétants de E.

Les résultats de stabilité sont excellents puisque :

(2,5,2) Proposition. a) Soient E un ebc complet H un sous-espace vectoriel b-fermé de E. Alors H et E/H sont des ebc complets.

b) Un produit, une somme directe, d'ebc complets est un ebc complet.

c) Une limite projective d'ebc complets est complète. Une limite inductive d'ebc complets est complète pourvu qu'elle soit séparée.

Il suffit de conjuguer les résultats concernant la séparation avec ceux concernant les disques bornés complétants.

Exemple. Si E est un espace localement convexe séparé et semi-complet (toute suite de Cauchy de E est convergente), il est facile de vérifier que tout disque borné et fermé de E est complétant. Ainsi les bornés de E définissent sur E une bornologie complète.

(2,6) Les b-tonneaux dans un ebc séparé.

On voit aisémént que dans un ebc E, une partie H est b-fermée si et seulement si, pour tout disque borné $A \subset E$, la partie $H \cap E_A$ est fermée dans l'espace semi-normé E_A.

(2,6,1) Définition. On dit qu'une partie T de E est un tonneau bornologique (ou un b-tonneau) lorsque T est un disque absorbant b-fermé.

Exemple. Un tonneau dans un espace localement convexe est déjà un b-tonneau pour la bornologie associéé ; la réciproque étant généralement fausse.

On sait qu'un résultat important de Bourbaki ([1] . § 3.n°4 lemme 1) concernant les tonneaux conditionne le théorème de Banach-Steinhaus. On obtient ici une généralisation naturelle avec :

(2,6,2) Théorème. Dans un ebc séparé E, tout b-tonneau absorbe tout disque borné complétant.

En effet si A est un disque borné complétant $T_A = T\cap E_A$ est un disque absorbant fermé dans l'espace de Banach E_A. C'est un tonneau de E_A, donc un voisinage de 0, puisque E_A est tonnelé. Il en résulte que T_A contient un ensemble μA, pour $\mu > 0$, ce qui signifie que T absorbe A.

(2,6,2,1) Corollaire. Dans un ebc complet, tout b-tonneau est bornivore (c'est-à-dire qu'il absorbe tout borné).

Voilà un résultat qui a son utilité dans une étude bornologique des espaces d'applications linéaires bornées $\mathrm{Hom}_{\mathbb{E}\,\mathrm{BC}}(E,F)$.

(2,7) Les ebc dénombrables.

(2,7,1) Définition. Un ebc E est dit dénombrable s'il est séparé et possède un système fondamental dénombrable de disques bornés.

Ainsi un ebc dénombrable est déjà une limite inductive dénombrable d'espaces normés. Nous allons voir que ces ebc jouent, en théorie des ebc, le même rôle que les evt métrisables en théorie des evt. En particulier on obtient des théorèmes tout à fait analogues au théorème du graphe fermé et au théorème des isomorphismes de Banach. D'ailleurs ces résultats ont été indiqués, dans un contexte différent et un peu moins général, par Grothendieck ([4] . Intr. IV.4. th. B). Il ne faut donc pas s'étonner que l'outil essentiel soit le théorème (2,3,9).

(2,7,2) <u>Définition</u>. Dans un ebc E, on dit qu'un disque A est associé à la bornologie de E lorsque A est associé à tous les disques bornés de E.

Il suffit d'ailleurs, pour que A soit associé à la bornologie de E, qu'il soit associé à tous les disques bornés d'un système fondamental de bornés de E.

Remarquons qu'un disque A associé à la bornologie de E est déjà normant. Enfin, dans un ebc séparé tout disque borné est associé à la bornologie de E.

Le théorème (2,3,9) rappelé a pour conséquence immédiate :

(2,7,3) <u>Théorème</u>. Dans un ebc dénombrable et complet tout disque complétant A associé à la bornologie de E est borné.

En application, démontrons le théorème du "graphe fermé" qu'il convient ici d'appeler th. du graphe b-fermé ! Pour cela les préliminaires évidents suivants sont nécessaires :

(2,7,4) <u>Proposition</u>. Soient E,F deux ebc et G un sous-espace vectoriel du produit $E \times F$. Pour que G soit b-fermé dans $E \times F$ il faut et il suffit que, pour tout disque borné $A \subset E$ et tout disque borné $B \subset F$, le sous espace vectoriel $G \cap (E_A \times F_B)$ soit fermé dans l'espace semi-normé $E_A \times F_B$.

(2,7,5) <u>Proposition</u> Soient E,F deux ebc , $u : E \to F$ une application linéaire, G le graphe de u. Pour tout disque borné $A \subset E$ et tout disque borné $B \subset F$ l'espace semi-normé $F_{(u(A)+B)}$ est isométrique à l'espace semi-normé quotient

$(E_A \times F_B)/(G \cap (E_A \times F_B))$.

Cette dernière proposition s'obtient à partir de (2,3,7) appliqué à la fonction linéaire $v : E \times F \longrightarrow F$, définie par $v(x,y) = u(x)-y$, et au disque borné $A \times B$ de $E \times F$, compte tenu de l'égalité $G = \mathrm{Ker}.v$ et de l'isométrie d'espaces semi-normés $(E \times F)_{A \times B} \simeq E_A \times F_B$.

On tire de là, en conjuguant (2,7,4) et (2,7,5) :

(2,7,6) Théorème. Soient E,F deux ebc, $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire, G le graphe de u. Pour que G soit b-fermé dans $E \times F$ il faut et il suffit que, pour tout disque borné $A \subset E$, $u(A)$ soit un disque associé à la bornologie de F.

Puis tout naturellement :

(2,7,7) Théorème du graphe b-fermé.

Soient E un ebc complet, F un ebc dénombrable et complet $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Pour que u soit bornée il faut et il suffit que son graphe G soit b-fermé dans $E \times F$.

La condition est trivialement nécessaire (car F est séparé). Montrons qu'elle est suffisante. Mais G étant b-fermé dans $E \times F$, pour tout disque borné $A \subset E$, que l'on peut supposer complétant, $u(A)$ est un disque de F, associé à la bornologie de F, donc complétant, ((2,3,8)), donc borné ((2,7,3)).

Comme conséquence évidente :

(2,7,8) Théorème des isomorphismes.

> Soient E un ebc dénombrable et complet, F un ebc complet. Toute application linéaire u : E $\longrightarrow$ F bijective et bornée est un isomorphisme.

En effet le graphe G^{-1} de u^{-1} est b-fermé dans $E \times F$ puisque c'est aussi le graphe G de u.

(2,7,8,1) Corollaire. Soit E un ebc complet. S il existe dans E un disque borné A absorbant, E est un espace de Banach.

Comme on peut supposer A complétant l'injection $E_A \longrightarrow E$ est bijective et bornée, donc un isomorphisme.

3. LES FONCTEURS $\underline{T}$ ET $\underline{B}$.

(3,1) Foncteur $\underline{B}$.

Nous désignons par $\mathbb{E}$LC la catégorie des espaces localement convexes (non nécessairement séparés), les morphismes étant évidemment les applications linéaires continues.
A tout elc E associons l'espace vectoriel sous-jacent, muni de la structure bornologique définie par les bornés de E, au sens vectoriel topologique, c'est-à-dire les parties de E absorbées par tout voisinage de 0. On obtient ainsi un ebc que nous notons $\underline{B}E$. Il est clair que, toute application linéaire continue entre deux elc transformant les bornés en bornés, on a l'inclusion, en général stricte :

(3,1,1) $$\mathrm{Hom}_{\mathbb{E}\mathrm{LC}}(E,F) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{E}\mathrm{BC}}(\underline{B}E,\underline{B}F)$$

Autrement dit la correspondance $\underline{B}$ est exactement un foncteur covariant de la catégorie $\mathbb{E}LC$ dans la catégorie $\mathbb{E}BC$.

(3,2) Foncteur $\underline{T}$

Sur un ebc E il existe une topologie τ localement convexe unique qui est la plus fine de celles rendant bornés (au sens topologique) les bornés de E. Les voisinages de 0 pour τ sont les parties de E contenant un disque bornivore (c'est-à-dire absorbant les bornés de l'ebc E). L'espace localement convexe obtenu est désigné par $\underline{T}E$. Il admet un système fondamental de voisinages de 0 formé de disques bornivores.

On vérifie sans difficulté l'inclusion

(3,2,1) $$\mathrm{Hom}_{\mathbb{E}BC}(E,F) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{E}LC}(\underline{T}E,\underline{T}F)$$

qui exprime que $\underline{T}$ est un foncteur covariant de la catégorie $\mathbb{E}BC$ dans la catégorie $\mathbb{E}LC$.

Exemple. Si E est un ebc complet, $\underline{T}E$ est un elc tonnelé. En effet, tout tonneau U de $\underline{T}E$ est un b-tonneau de E car la convergence bornologique dans E entraîne la convergence dans $\underline{T}E$. A ce titre U est bornivore dans E, d'après (2,6,2,1) ce qui veut dire que c'est un voisinage de 0 dans $\underline{T}E$.

(3,3) Relations entre $\underline{B}$ et $\underline{T}$.

(3,3,1) En général, étant donné un elc E, la topologie de l'espace $\underline{T}\underline{B}E$ est plus fine que celle de E, c'est-à-dire que l'application 1_E, identique de E, est un morphisme de $\underline{T}\underline{B}E$ dans E :

$$1_E : \underline{T}\underline{B}E \longrightarrow E$$

(3,3,2) De même, pour un ebc E, la bornologie de $\underline{BT}E$ est moins fine que celle de E. Alors 1_E est un morphisme de E dans $\underline{BT}E$:

$$1_E \; : \; E \longrightarrow \underline{BT}E.$$

(3,3,3) Les relations importantes (et évidentes) sont :

$$\begin{cases} \underline{TBT} = \underline{T} \\ \underline{BTB} = \underline{B} \end{cases}$$

et telles ont pour conséquences les égalités :

$$\begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathrm{I\!E\,LC}}(\underline{T}E,\underline{T}F) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{I\!E\,BC}}(\underline{BT}E,\underline{BT}F) \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{I\!E\,BC}}(\underline{B}E,\underline{B}F) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{I\!E\,LC}}(\underline{TB}E,\underline{TB}F) \end{cases}$$

(3,3,4) <u>On peut voir que</u> $\underline{B}$ <u>est un foncteur adjoint à</u> droite à $\underline{T}$ ce qui se traduit par l'égalité :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{I\!E\,BC}}(E,\underline{B}F) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{I\!E\,LC}}(\underline{T}E,F)$$

valable pour tout ebc E et tout elc F.

Pour démontrer cette égalité il suffit de prouver l'inclusion $\mathrm{Hom}(E,\underline{B}F) \subset \mathrm{Hom}(\underline{T}E,F)$, l'inclusion inverse étant triviale. Or soit u une application linéaire bornée de E dans F ; pour tout W, voisinage de 0 disqué dans F, $u^{-1}(W) = V$ est un disque bornivore de E, donc un voisinage de 0 dans $\underline{T}E$.

(3,3,5) <u>Elc bornologiques et ebc topologiques.</u>

Les relations (3,3,3) invitent à étudier les elc E tels que $E = \underline{TB}E$. On sait que ce sont exactement les elc bornologiques et nous conservons cette dénomination.

Pour un elc quelconque, $\underline{TB}E$ est évidemment un elc bornologique dit elc bornologique associé à E.

Par analogie, nous dirons qu'un ebc E est topologique lorsque E = $\underline{\underline{B}}\underline{\underline{T}}$E.Lorsque E est quelconque, $\underline{\underline{B}}\underline{\underline{T}}$E est dit ebc topologique associé à E.

Il est clair, avec (3,3,3) que, <u>pour tout elc</u> E, $\underline{B}$E <u>est un ebc topologique</u>, de même que, <u>pour tout ebc</u> E, $\underline{T}$E <u>est un elc bornologique</u>.

(3,4) <u>Conditions de séparation</u>.

On sait que dans un elc E une droite est bornée si et seulement si elle est contenue dans l'adhérence de l'origine. Cela signifie qu'<u>un elc</u> E <u>est séparé si et seulement si l'ebc</u> $\underline{B}$E <u>est séparé</u>.

Par contre un ebc E peut être séparé sans que l'elc $\underline{T}$E le soit. Divers contre-exemples ont été donnés parmi lesquels citons ceux de L. Waelbroeck ([9]) et de G. Marinescu-C. Foias ([7]) qui établissent que la topologie de $\underline{T}$E peut même être grossière en prenant pour E un ebc complet.

Ceci nous amène à la définition :

(3,4,1) <u>Définition</u>. Un ebc E est dit topologiquement séparé (ou t-séparé) si et seulement si $\underline{T}$E est un elc séparé.

On trouve dans la note citée de Marinescu-Foias une condition nécessaire et suffisante, malheureusement peu maniable, pour qu'un ebc soit t-séparé. Nous utiliserons le critère suivant, évident par lui-même.

(3,4,2) Proposition. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ebc E soit t-séparé est qu'il existe sur E une topologie localement convexe séparée $\mathcal{T}$ telle que les bornés de E soient déjà bornés pour $\mathcal{T}$.

Désormais nous nous limitons à l'étude des ebc t-séparés, formant la catégorie $\mathbb{E}BC_{ts}$. Si $\mathbb{E}LC_s$ désigne la catégorie des elc séparés, l'essentiel est de voir que le foncteur $\underline{B}$ opère de $\mathbb{E}LC_s$ dans $\mathbb{E}BC_{ts}$ tandis que le foncteur $\underline{T}$ opère de $\mathbb{E}BC_{ts}$ dans $\mathbb{E}LC_s$.

4. LA DUALITE.

(4,1) Le dual d'un elc séparé.

Etant donné un elc séparé E, nous désignons son dual par E', réservant la notation E^* au dual algèbrique de E. On sait que $E' = \mathrm{Hom}_{\mathbb{E}LC}(E,K)$ est l'espace des formes linéaires continues sur E. Il n'existe pas de topologie unique naturellement associée à la topologie de E. Par contre si l'on choisit d'appeler bornés dans E' les parties de E' contenues dans le polaire d'un voisinage de O de E (autrement dit les parties équicontinues de E'), on obtient une bornologie sur E', bien attachée à la topologie de E.

Dans toute la suite E' désigne donc le dual de E muni de sa bornologie équicontinue.

Comme toute partie équicontinue de E' est fortement bornée le critère (3,4,2) assure que E' est un ebc t-séparé. De plus toute partie équicontinue étant contenue dans un disque faiblement compact, donc faiblement complet, donc complétant, on a :

(4,1,1) Proposition. Pour tout elc séparé E, le dual E' èst un ebc t-séparé complet.

Exemple. Le dual E' d'un elc métrisable est un ebc t-séparé dénombrable et complet.

(4,2) Comparaison entre E' et le dual fort E'_β.

Nous désignons par E'_β le dual fort de l'elc E, muni de sa topologie forte. Il s'agit de comparer les elc $\underline{T}E'$ et E'_β et les ebc E' et $\underline{B}E'_\beta$. Déjà :

(4,2,1) Proposition. Pour que $E' = \underline{B}E'_\beta$ il faut et il suffit que E soit un elc infratonnelé.

Car en effet E est infratonnelé (ou quasi-tonnelé) si et seulement si toute partie fortement bornée de E' est équicontinue.

Puisque tout voisinage fort de E'_β, choisi disqué, absorbe les parties fortement bornées, donc aussi les parties équicontinues, on voit que la topologie $\underline{T}E'$ est plus fine que la topologie forte. Cependant elle n'est pas tellement plus fine puisque :

(4,2,2) Proposition. Pour tout voisinage disqué W de $\underline{T}E'$ le bipolaire $W^{\circ\circ}$ (adhérence de W pour la topologie faible $\sigma(E',E)$) est un voisinage fort.

Car W absorbe les parties équicontinues, donc son polaire W° est absorbé par les voisinages de O dans E, c'est-à-dire que W° est borné dans E (plus précisément dans $\underline{B}E$). Ceci exprime que $W^{\circ\circ}$

est un voisinage fort. Ainsi :

(4,2,2,1) <u>Corollaire</u>. Pour que $\underline{T}E' = E'_\beta$ il faut et il suffit que tout disque de E' absorbant les parties équicontinues contienne un disque faiblement fermé (pour $\sigma(E',E)$) absorbant les parties équicontinues.

Chacune des conditions $\underline{B}E'_\beta = E'$ ou $\underline{T}E' = E'_\beta$ entraine l'une ou l'autre des deux conditions <u>équivalentes</u> $\underline{TB}E'_\beta = \underline{T}E'$ ou $\underline{BT}E' = \underline{B}E'_\beta$. Pour voir ce que signifie exactement la propriété $\underline{BT}E' = \underline{B}E'_\beta$, remarquons que les ebc $\underline{BT}E'$ et $\underline{B}E'$ vérifient tous deux la condition (D) de (1.2). Il en résulte qu'ils sont identiques dès qu'ils ont les mêmes <u>suites</u> bornées. Comme la bornologie de $\underline{B}E'_\beta$ est moins fine que celle de $\underline{BT}E'$, car la topologie de E'_β est moins fine que celle de $\underline{T}E'$, on a :

(4,2,3) <u>Proposition</u>. Pour que $\underline{B}E' = \underline{BT}E'$ (ou $\underline{T}E' = \underline{TB}E'_\beta$) il faut et il suffit que toute <u>suite</u> fortement bornée de E' soit bornée dans $\underline{BT}E'$.

Ce n'est pas encore très probant. Cependant :

(4,2,3,1) <u>Corollaire</u>. Si toute suite fortement bornée de E' est équicontinue alors $\underline{T}E' = \underline{TB}E'_\beta$, c'est-à-dire que $\underline{T}E'$ est exactement l'elc bornologique associé au dual fort E'_β de E.

(4,2,3,2) <u>Corollaire</u>. Si toute suite fortement bornée de E' est équicontinue, pour que $\underline{T}E' = E'_\beta$ il faut et il suffit que le dual fort E'_β soit bornologique.

Remarques. 1. La condition "toute suite fortement bornée de E' est équicontinue" est plus générale que celle choisie par Grothendieck dans sa définition des espaces (DF) ([2]). On voit bien ici en quoi elle généralise la condition "E est infratonnelé".

2. Pour un espace métrisable non distingué E (il en existe !) on a $\underset{\sim}{B}E'_\beta = E'$ car E est infratonnelé, mais aussi $\underset{\sim}{T}E' \neq E'_\beta$ car E'_β n'est pas bornologique ([2], th. 7).

3. Un sort tout à fait spécial semble être réservé aux elcs séparés E tels que l'on ait à la fois $E' = \underset{\sim}{B}E'_\beta$ et $\underset{\sim}{T}E' = E'_\beta$. Il s'agit des elc séparés infratonnelés dont le dual fort est bornologique. Leurs propriétés premières sont exposées dans [2].

(4,3) Le dual d'un ebc t-séparé.

Soit E un ebc t-séparé. Nous désignons son dual par $E^\times$. C'est l'espace $E^\times = \mathrm{Hom}_{\mathbb{E}BC}(E,K)$ des formes linéaires bornées sur E. Puisque E est t-séparé, $E^\times$ n'est pas réduit à (o) ; plus précisément E et $E^\times$ sont même en dualité séparante comme il résulte de l'égalité (3;3,4) qui donne ici l'égalité algèbrique $E^\times = (\underset{\sim}{T}E)'$.

Sur $E^\times$ on place la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de E. Comme ces bornés de E sont déjà faiblement bornés, pour la dualité entre E et $E^\times$, il est clair que $E^\times$ devient un elc séparé dont un système fondamental de voisinages de 0 est formé des polaires des bornés de E. Comme on prouve facilement que $E^{\times}$ est même complet, on a en résumé :

(4,3,1) Proposition. Pour tout ebc t-séparé E, le dual $E^{\times}$ est un elc séparé et complet.

Exemple. Le dual $E^{\times}$ d'un ebc dénombrable t-séparé est un espace de Fréchet.

L'égalité algèbrique $E^{\times} = (\underline{T}E)'$ a des conséquences intéressantes. Remarquons d'abord qu'on peut la renforcer en une égalité bornologique par :

(4,3,2) Proposition. Pour tout ebc t-séparé E on a :

$$\underline{B}(E^{\times}) = (\underline{T}E)'$$

En effet les bornés B de $\underline{B}(E^{\times})$ sont absorbés par le polaire A° de tout borné de E ; alors B° absorbe A°°, donc aussi A, ce qui prouve que c'est un voisinage de 0 dans $\underline{T}E$, de sorte que $B \subset B°°$ est un borné de l'ebc $(\underline{T}E)'$. Réciproquement un système fondamental de bornés dans $(\underline{T}E)'$ est formé des polaires V°, où V décrit l'ensemble des disques bornivores de E ; nécessairement V° est absorbé par le polaire A° de tout borné A de E, donc est borné dans $\underline{B}(E^{\times})$.

La topologie de l'elc $\underline{T}E$ est bornologique et compatible avec la dualité entre E et $E^{\times}$. Cette remarque assure que $\underline{T}E$ coïncide avec la topologie de Mackey $\tau(E,E^{\times})$, de sorte que $\underline{B}\underline{T}E$ est exactement la bornologie formée des parties faiblement bornées de E.

Réciproquement, étant donnée une dualité <u>séparante</u> (F,G) entre deux espaces vectoriels, il n'est pas vrai, en général que G coïncide avec l'espace des formes linéaires faiblement bornés sur F. Cependant :

(4,3,3) <u>Proposition</u>. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe sur F une bornologie t-séparée telle que $F^{\times} = G$ est que la topologie de Mackey $\tau(F,G)$ soit bornologique.

On peut rechercher quelles sont les bornologies convexes sur F, compatibles avec la dualité entre F et G (c'est-à-dire dont le dual $F^{\times}$ est identique à G). Le problème n'est pas résolu ici. Cependant on peut dire que de <u>telles bornologies lorsqu'elles existent, sont nécessairement t-séparées et conduisent toutes à la même topologie</u> $\underline{T}F$ <u>qui est la topologie de Mackey</u> $\tau(F,G)$ (de même que toutes les topologies localement convexes compatibles avec la dualité entre F et G conduisent à la même bornologie $\underline{B}F$). De plus on a vu que sur F la bornologie faible est la moins fine des bornologies convexes compatibles. Il y aurait lieu de rechercher s'il existe une plus fine bornologie convexe compatible et dans l'affirmative de la caractériser.

Tout ce qu'on peut ajouter ici est que, pour toute bornologie convexe compatible il en existe une autre, plus fine, qui est encore compatible. Cela résulte de :

(4,3,4) <u>Proposition</u> . Soit E un ebc t-séparé dont la bornologie est $\mathfrak{B}$ et le dual $E^{\times}$. Les parties de E contenues dans l'enveloppe disquée d'une suite convergeant bornologiquement vers O forment une bornologie convexe $\mathfrak{B}_0$ sur E, plus fine que $\mathfrak{B}$, compatible avec la dualité entre E et $E^{\times}$.

C'est une simple conséquence de la proposition (1,4,2c) on en tire :

(4,3,5) <u>Proposition</u>. Le dual $E^{\times}$ d'un ebc t-séparé E est un elc séparé et complet lorsqu'on le munit de la topologie $\mathcal{T}_0$ de la convergence uniforme sur les suites de E tendant bornologiquement vers O.

Ce n'est autre que (4,3,1) appliqué à la bornologie $\mathfrak{B}_0$. D'ailleurs sur $E^{\times}$ la topologie $\mathcal{T}_0$ est liée d'assez près à la dualité puisque :

(4,3,6) <u>Proposition</u>. Si E est un ebc t-séparé complet, sur $E^{\times}$ la topologie $\mathcal{T}_0$ est compatible avec la dualité entre $E^{\times}$ et E.

Cela va résulter immédiatement du théorème de Mackey lorsqu'on aura vu que tout disque $B_0 \in \mathfrak{B}_0$ est faiblement relativement compact. Soit donc $B_0 = \Gamma(\{x_n\})$ l'enveloppe disquée d'une suite $x_n \xrightarrow{M} 0$. Puisque E est complet il existe un disque borné complétant A tel que $x_n \longrightarrow 0$ dans l'espace de Banach E_A. La suite (x_n) est donc relativement compacte dans E_A, de sorte que son enveloppe disquée fermée $\widetilde{B}_0$ (dans E_A) est compacte, car

E_A est un espace de Banach. Puisque A est borné dans E, il est aussi faiblement borné ; par suite la topologie faible $\sigma(E,E^{\times})$ induit sur E_A une topologie séparée moins fine que celle d'espace de Banach. Alors $\bar{B}_0$, compact dans E_A, est aussi faiblement compact, ce qui termine la démonstration.

(4,4) Ebc polaires.

Il convient d'introduire une classe particulière d'ebc t-séparés E, qui contiennent assez de bornés relativement à la dualité.

(4,4,1) Définition. On dit qu'un ebc t-séparé E est polaire lorsque pour tout disque borné B de E, le bipolaire $B^{\circ\circ}$, relativement à la dualité entre E et $E^{\times}$, est encore borné.

Il existe donc, dans un ebc polaire, un système fondamental de bornés formé de disques faiblement fermés. Cette information se précise par :

(4,4,2) Proposition. Dans un ebc polaire et complet E tout disque borné faiblement fermé est complétant.

Car un disque B borné et faiblement fermé, contenu dans un disque borné complétant est lui-même un disque complétant.

La proposition peut se traduire encore en disant que dans un ebc polaire complet il existe un système fondamental de bornés formé de disques complétants faiblement fermés.

Remarques. 1 La démonstration de (4,4,2) peut se faire facilement si l'on voit que dans un ebc t-séparé tout disque borné faiblement fermé A coïncide exactement avec la boule unité de l'espace normé E_A.

2. Lorsque E est un ebc polaire il convient de remplacer la bornologie $\mathfrak{B}_0$ de (4,3,4) par la bornologie $\overline{\mathfrak{B}}_0$ engendrée par les enveloppes disquées faiblement fermée des suites de E convergeant bornologiquement vers 0. Il est clair que $\overline{\mathfrak{B}}_0$ donne le même dual que $\mathfrak{B}_0$, donc le même dual que la bornologie $\mathfrak{B}$ initiale sur E, d'où il suit que $\overline{\mathfrak{B}}_0$ est une bornologie polaire. Si l'on remarque encore que $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_0$ et $\overline{\mathfrak{B}}_0$ ont les mêmes suites bornologiquement convergentes, il est facile de vérifier que $\mathfrak{B}$ et $\overline{\mathfrak{B}}_0$ sont simultanément des bornologies complètes (alors qu'on ne peut affirmer que la même propriété est vraie entre $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B}_0$, ni qu'elle est vraie entre $\mathfrak{B}$ et $\overline{\mathfrak{B}}_0$ lorsque $\mathfrak{B}$ n'est plus supposée polaire).

3. Les ebc polaires se rencontrent fréquemment en pratique. En particulier, pour tout elc séparé E les ebc $\underline{B}E$ et E' sont polaires. C'est bien évident pour $\underline{B}E$. Pour E', il suffit de voir que toute partie équicontinue disquée, fermée pour $\sigma(E',E)$ est à fortiori fermée pour $\sigma(E',(E')^\times)$.

Cela étant on a :

(4,4,3) Proposition. Soit E un ebc polaire. Si $E^\times$ est un elc bornologique, E est un ebc topologique.

L'égalité de (4,3,2) affirme que $\underline{B}((\underline{B}\underline{T}E)^\times) = (\underline{T}\underline{B}\underline{T}E)' = (\underline{T}E)'$.

Ainsi $E^{\times}$ et $(\underline{B}\underline{T}E)^{\times}$ sont deux elc ayant le même support vectoriel et les mêmes bornés (car $\underline{B}(E^{\times}) = (\underline{T}E)'$). Comme la topologie de $(\underline{B}\underline{T}E)^{\times}$ est plus fine que celle de $E^{\times}$, l'hypothèse que $E^{\times}$ est bornologique assure l'égalité. Cette égalité signifie encore que tout borné de $\underline{B}\underline{T}E$ est contenu dans le bipolaire $B^{\circ\circ}$ d'un borné B de E, autrement dit que $E = \underline{B}\underline{T}E$ puisque E est polaire.

(4,4,3,1) *Corollaire*. Tout ebc dénombrable et polaire est topologique

Il semble que ce soit là l'analogue convenable de la propriété assurant que tout elc métrisable est bornologique.

(4,5) *La b-réflexivité pour les elc séparés*.

Soit E un elc séparé. Son dual E' est un ebc polaire, dont le dual $(E')^{\times}$ est un elc séparé et complet. *Nous dirons que* $(E')^{\times}$ *est le bidual bornologique (ou b-bidual) de* E *et lorsque* $E = (E')^{\times}$ *que* E *est bornologiquement réflexif (ou b-réflexif)*.

Dans le cas général, on a $E \subset (E')^{\times}$. D'ailleurs E est un sous-espace topologique de $(E')^{\times}$ puisque sur ces deux espaces la topologie est celle de la convergence uniforme sur les parties équicontinues de E'.

Comme $(E')^{\times} = (\underline{T}E')'$ (égalité algèbrique), et que la topologie de $\underline{T}E'$ est plus fine que la topologie forte $\beta(E',E)$ nous voyons que le bidual $E'' = (E'_{\beta})'$ est contenu dans le b-bidual. $(E')^{\times}$, étant complet, contient aussi le complété $\hat{E}$ de E.

En résumé :

(4,5,1).
$$E \subset \begin{matrix}\hat{E} \\ \\ E''\end{matrix} \subset (E')^{\times}$$

Aussi tout espace b-réflexif est complet (ce qui n'a pas lieu nécessairement avec la semi-réflexivité). D'ailleurs on a la caractérisation suivante :

(4,5,2) Théorème. Tout elc séparé b-réflexif E est complet, semi-réflexif et son dual fort E'_β est bornologique. Réciproquement si toute suite fortement bornée de E' est équicontinue (en particulier si E est infratonnelé), si E est semi-réflexif et si E'_β est bornologique alors E est b-réflexif.

Si E est b-réflexif on a $E = \hat{E} = E'' = (E')^{\times}$. De plus la topologie $\underline{T}E'$ est compatible avec la dualité entre E' et E ce qui prouve qu'elle coïncide avec $\tau(E',E)$ et $\beta(E',E)$. Aussi $E'_\beta = \underline{T}E'$ est bornologique. Réciproquement si $E = E''$ et si E'_β est bornologique on a $\underline{T}E' = E'_\beta$ en vertu de l'hypothèse sur E ((4,2,3,2)) et par suite $(E')^{\times} = (\underline{T}E')' = E'' = E$.

On tire de là des résultats intéressants prouvant que la b-réfléxivité, notion plus naturelle que la semi-réfléxivité, peut jouer un rôle en théorie des elc.

(4,5,3) Proposition. Si E est un elc métrisable, ou bien si E est un espace (DF) de Grothendieck, alors E est b-réflexif si et seulement si il est semi-réflexif.

Si E est métrisable, il est infratonnelé et l'on sait que le dual fort d'un elc métrisable semi-réflexif (ou réflexif peu importe) est bornologique ([2] , th.7), d'où le résultat. Si E est un espace (DF), son dual fort E'_β est un espace de Fréchet, donc bornologique. Comme toute suite fortement bornée de E' est équicontinue, on voit, avec (4,2,3,2), que, plus généralement, $\underline{T}E' = E'_\beta$ d'où :

Si E est un espace (DF), son b-bidual $(E')^\times$ coïncide algèbriquement avec son bidual E", et topologiquement si E est infratonnelé.

A partir de la proposition (4,3,6) on va pouvoir généraliser quelque peu des théorèmes de G. Köthe ([5] § 28.7 et [10] : caractérisation des espaces bornologiques).

Remarquons d'abord que dans E' une suite x'_n est bornologiquement convergente vers 0 s'il existe dans E un voisinage de 0, soit V , et une suite (ε_n) de scalaires tendant vers 0, tels que $x'_n \in \varepsilon_n V°$. Cela signifie encore que la suite x'_n converge uniformément vers 0 sur un voisinage convenable de l'origine dans E.

(4,5,4) Proposition. Soit E un elc séparé. Le b-bidual $(E')^\times$ de E est algèbriquement identique au complété de E pour la topologie $\mathcal{T}_0$ de la convergence uniforme sur les suites de E' convergeant bornologiquement vers 0.

Il suffit de voir que E est partout dense dans $(E')^\times$ pour la topologie $\mathcal{T}_0$, puisque pour cette topologie $(E')^\times$ est déjà complet, d'après (4,3,5). Or cela résulte du théorème de Hahn-Banach et du fait que le dual de $(E')^{\times}$ pour la topologie τ_0 est exactement E', puisque E' est un ebc t-séparé complet ((4,3,6)).

(4,5,5) Théorème. Un elc séparé E est b-réflexif si et seulement si il est complet pour la topologie τ_0 de la convergence uniforme sur les suites de E' convergeant bornologiquement vers 0.

On en déduit deux informations généralisant les prop. 9 et 10 de G. Köthe ([10] : caractérisation des espaces bornologiques).

(4,5,6) Proposition. Un elc métrisable est réflexif si et seulement si il est complet pour la topologie τ_0 de la convergence uniforme sur les suites de E' convergeant bornologiquement vers 0.

D'ailleurs E étant infratonnelé, une suite $x'_n \xrightarrow{M} 0$ dans E' si elle est bornologiquement convergente vers 0 dans $\underline{B}E'_\beta$.
Lorsque E est un espace de Fréchet on retrouve le résultat de G. Köthe.

(4,5,7) Proposition. Un espace (DF) de Grothendieck (en particulier un espace normé) est réflexif si et seulement si il est complet pour la topologie de la convergence compacte sur son dual fort.

Pour un elc E qui est un espace (DF), E' et $\underline{B}E'_\beta$ ont les mêmes suites bornées, donc les mêmes suites bornologiquement convergentes vers 0. Mais E'_β étant métrisable (c'est un espace de

Fréchet) les suites bornologiquement convergentes vers 0 sont exactement celles qui convergent (topologiquement) vers 0. De plus $(E')^{\times} = E''$ car $\underline{T}E' = E'_{\beta}$, ce qui permet de terminer en appliquant le théorème de Banach-Dieudonné ([1]: Ch.IV.§2, cor 1 de prop.7), puisque E" est dual d'un espace de Fréchet.

(4,6) La réflexivité pour les ebc t-séparés.

Soit E un ebc t-séparé. Son dual $E^{\times}$ est un elc complet dont le dual $(E^{\times})'$ est un ebc polaire complet. Nous dirons que $(E^{\times})'$ est le bidual de E et lorsque $E = (E^{\times})'$ (égalité bornologique) que E est un ebc réflexif.

Dans le cas général on a $E \subset (E^{\times})'$. Comme les bornés de $(E^{\times})'$ sont les bipolaires (dans $(E^{\times})'$) des bornés de E, on voit que E est un sous-ebc de $(E^{\times})'$ seulement lorsque E est polaire.

Puisque les bornés de $(E^{\times})'$ sont relativement compacts pour la topologie faible $\sigma((E^{\times})',E^{\times})$ on voit que si E est réflexif, il possède un système fondamental de disques bornés qui sont compacts pour $\sigma(E,E^{\times})$. Réciproquement si tout borné A de E est contenu dans un borné B, disqué, compact pour $\sigma(E,E^{\times})$, alors B est fermé dans $(E^{\times})'$ pour $\sigma((E^{\times})',E^{\times})$, donc égal à son bipolaire dans $(E^{\times})'$, ce qui prouve facilement l'égalité $E = (E^{\times})'$. On obtient aussi l'équivalent du théorème de Mackey-Arens.

(4,6,1) Théorème (Mackey-Arens). Pour qu'un ebc t-séparé E soit réflexif il faut et il suffit qu'il admette un système fondamental de bornés formé de disques faiblement compacts.

Remarque : Contrairement à ce qui se passe pour les bornés d'un elc E semi-réflexif on ne peut garantir ici que tout disque faiblement compact est borné. Cela tient au fait que l'ebc E, même réflexif, n'est pas nécessairement topologique.

(4,6,1,1) Corollaire. Un ebc E réflexif est nécessairement polaire et complet. Il admet même un système fondamental de bornés qui sont complets dans l'elc $\underline{T}E$.

En effet, E a un système fondamental de bornés qui sont faiblement compacts, donc faiblement complets, donc complets pour $\underline{T}E$.

Il est évident que le dual d'un elc b-réflexif est un ebc réflexif et que le dual d'un ebc réflexif est un elc b-réflexif.

On sait qu'en théorie des elc on peut affirmer, sous certaines conditions, (par exemple : E est quasi-complet et la topologie est $\tau(E,E')$) qu'un elc E est réflexif si et seulement si son dual fort l'est.

On peut établir ici des résultats analogues.

(4,6,2) Proposition. Soit E un elc complet. Pour que E soit b-réflexif il faut et il suffit que son dual E' soit un ebc réflexif.

La condition étant nécessaire, montrons, pour la suffisance, la propriété plus générale, (4,6,3) <u>Proposition</u>. Si un elc séparé E a son dual E' réflexif alors le b-bidual $(E')^{\times}$ de E coïncide avec le complété $\hat{E}$ de E.

Cela est évident, puisque $(E')^{\times}$ est complet, que E est un sous-espace de $(E')^{\times}$, et que E et $(E')^{\times}$ ont même dual $E^{\times}$.

(4,6,4) <u>Proposition</u>. Soit E un elc t-séparé admettant un système fondamental de bornés qui sont complets dans l'elc $\underline{T}E$ (en particulier E est complet). Pour que E soit réflexif il faut et il suffit que $E^{\times}$ soit un elc b-réflexif.

Pour démontrer la suffisance, voyons d'abord que l'hypothèse assure que E est polaire, donc un sous-ebc de $(E^{\times})'$. Puisque $E^{\times}$ est un elc b-réflexif la topologie $\underline{T}(E^{\times})'$ n'est autre que la topologie forte de $(E^{\times})'$. Ses voisinages sont donc les polaires, dans $(E^{\times})'$, des bornés de $\underline{B}E^{\times}$. Or $\underline{B}E^{\times} = (\underline{T}E)'$, de sorte que les voisinages de 0 dans $(E^{\times})'$ sont les bipolaires, dans $(E^{\times})'$, des voisinages de 0 dans $\underline{T}E$.

Autrement dit si l'on pose $F = (E^{\times})'$, on voit que E est un sous-ebc de F et $\underline{T}E$ un sous-elc de $\underline{T}F$.

D'ailleurs F est réunion des bipolaires $B^{\circ\circ}$, dans F, des bornés B de E. Mais rien n'empêche de supposer que ces bornés B sont disqués et complets dans $\underline{T}E$, donc disqués et fermés dans $\underline{T}F$. Il reste à voir que dans ces conditions $B = B^{\circ\circ}$. Or $B^{\circ\circ}$ est l'adhérence de B, dans F, pour toute topologie sur F compatible avec la dualité entre F et $E^{\times}$, en particulier pour $\underline{T}F$ puisque

$E^{\times}$ est b-réflexif. L'égalité $B = B^{\circ\circ}$ provient alors du fait que B est fermé dans $\underline{T}F$.

Remarque. Il semble que l'on puisse affaiblir les hypothèses sur E sans pour autant aller jusqu'à supposer seulement E polaire et complet.

En conjuguant (4,6,2) et (4,6,4) on obtient :

(4,6,5) Proposition. Soit E un ebc t-séparé admettant un système fondamental de bornés qui sont complets dans $\underline{T}E$.
Pour que E soit réflexif il faut et il suffit que son bidual $(E^{\times})'$ le soit.

(4,6,6) Proposition. Soit E un elc séparé complet tel que toute suite fortement bornée de E' soit équicontinue et dont le dual fort E'_{β} est bornologique. Alors, pour que E soit b-réflexif il faut et il suffit que son b-bidual $(E')^{\times}$ le soit.

On voit, avec (4,2,3,2) que $\underline{T}E' = E'_{\beta}$. Ceci assure qu'il existe dans E' un système fondamental de disques bornés qui sont complets dans $\underline{T}E'$, puisqu'en effet, on peut les choisir faiblement compacts, donc faiblement complets et à fortiori fortement complets. Il suffit, pour terminer d'appliquer successivement (4,6,4) et (4,6,2).

Remarque. Il se peut que (4,6,6) soit valable pour tout elc complet séparé. Pour le voir il faudrait améliorer (4,6,4). Cependant on sait déjà que, dans le dual E', d'un elc séparé E, toute partie équicontinue faiblement fermée est fortement complète Mais on ne peut garantir, à partir de là, qu'une telle partie est complète dans $\underline{T}E'$. C'est pourtant le cas si l'on sait que la topologie $\underline{T}E'$ admet un système fondamental de voisinages de 0 qui sont fermés dans E'_β . Seulement cette condition est très difficile à vérifier. On retiendra ici qu'elle est toutefois valable lorsque E est un elc métrisable comme il résulte d'un théorème de Grothendieck ([2] : th. 6). On obtient donc, en reprenant la démonstration de (4,6,6).

(4,6,7) Proposition. Pour qu'un espace de Fréchet E soit réflexif il faut et il suffit que son b-bidual $(E')^{\times}$ le soit.

Pour E et $(E')^{\times}$, qui sont des espaces de Fréchet, la b-réflexivité coïncide avec la réflexivité, c'est ce qui donne le résultat. La proposition est à rapprocher de celle affirmant qu'un espace de Fréchet est réflexif si et seulement si son bidual E" l'est ([5] : § 29.2.4). Elle en diffère dans la mesure où E" et (E') sont différents ce qui est le cas lorsque E n'est pas distingué, car alors E'_β n'est pas bornologique.

Enfin, citons, pour terminer, une conséquence immédiate de (4,6,6).

(4,6,8) Proposition. Soit E un espace (DF) infratonnelé et complet. Pour que E soit semi-réflexif il faut et il suffit que son bidual E" le soit.

On sait,que, pour un espace (DF), on a l'égalité algèbrique $E'' = (E')^{\times}$. Si E est infratonnelé l'égalité est vérifiée topologiquement, de sorte que $(E')^{\times}$ est aussi un espace (DF). Alors pour E et E", semi-réflexivité et b-réflexivité coïncident, et il suffit d'appliquer successivement (4,6,2) et (4,6,4).

BIBLIOGRAPHIE

[1] . N. BOURBAKI : Espaces vectoriels topologiques CH.III Ch.III.V - Hermann - 1955.

[2] . A. GROTHENDIECK : Sur les espaces (F) et (DF) Summa Brasiliensis Mathematicae - 1954

[3] . A. GROTHENDIECK : Espaces vectoriels topologiques. Sao-Paulo - 1954

[4] . A. GROTHENDIECK : Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Amer. Math. Soc. 16 - 1955.

[5] . G. KOTHE : Topologische lineare Raume. Springer - 1960.

[6] . G. MARINESCU : Espaces vectoriels pseudo-topologiques et théorie des distributions. Deutscher. Berlin - 1963.

[7] . C.FOIAS-G.MARINESCU : Sur le prolongement des fonctionnelles linéaires dans les espaces vectoriels pseudo-topologiques. CRAS t. 254. 1962 - 2274-76.

[8] . L. WAELBROECK : Etude spectrale des algèbres complètes Acad. Roy. de Belgique. Mémoire de la classe des Sciences. t.31 - 1960.

[9] . L. WAELBROECK ; Le complété et le dual d'un espace à bornés convexes - CRAS t. 253 1961 - 2827 - 28.

[10] : Colloque sur l'analyse fonctionnelle. Gauthier-Villars - 1961.