PUBLICATIONS DU DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES DE LYON

A. ROUX

Foncteurs d'équivalence dans une catégorie

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1964, tome 1, fascicule 1
« Exposés sur les CATEGORIES », , exp. nº 16, p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1964__1_1_A7_0>

© Université de Lyon, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la série « Publications du Département de mathématiques de Lyon » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SEMINAIRE
D'ALGEBRE
1963-1964

16. FONCTEURS D'EQUIVALENCE
DANS UNE CATEGORIE

par A.Roux

1. Généralités.

(1,1) Définition :

Soit M un objet d'une catégorie $\mathbb{C}$.

On appelle foncteur d'équivalence sur M un foncteur isomorphe à un foncteur contravariant de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{E}$ns, G(,M) tel que pour tout objet X de $\mathbb{C}$, G(X,M) soit le graphe d'une relation d'équivalence sur Hom(X,M).

Une relation d'équivalence sur M est un foncteur d'équivalence sur M représentable; un représentant d'une relation d'équivalence est appelé un couple d'équivalence sur M. Par définition un couple d'équivalence sur M est donc un couple de morphismes $R \overset{r}{\underset{r}{\rightrightarrows}} M$ de même source et de but M, tel que pour tout objet X de $\mathbb{C}$ l'application de composantes (Hom(X,r_1),Hom(X,r_2)) de Hom(X,R) dans l'ensemble produit Hom(X,M) $\times$ Hom(X,M) soit une injection dont l'image est le graphe G(X,M) d'une relation d'équivalence sur Hom(X,M).

Des couples d'équivalence $R' \overset{r'_1}{\underset{r'_2}{\rightrightarrows}} M$ et $R \overset{r_1}{\underset{r_2}{\rightrightarrows}} M$ qui pour tout objet X de $\mathbb{C}$ déterminent le même graphe d'équivalence G(X,M) sur Hom(X,M) sont dits équivalents. Il revient au même de dire qu'ils représentent la même relation d'équivalence sur M, $X \rightsquigarrow G(X,M)$, d'où :

Pour que deux couples d'équivalence sur M soient équivalents, il faut et il suffit qu'il existe un isomorphisme compatible de l'un sur l'autre $\theta : R' \longrightarrow R$, tel que $r'_1 = r_1.\theta$ et $r'_2 = r_2.\theta$.

La donnée d'une relation d'équivalence sur M revient donc à la donnée d'une classe de couples d'équivalence sur M "équivalents".

(1,2) <u>Proposition</u>. Soit $R \overset{r_1}{\underset{r_2}{\rightrightarrows}} M$ un couple d'équivalence sur un objet M tel que le produit direct $(M\pi M, p_1, p_2)$ existe; le morphisme $i : R \longrightarrow M\pi M$ de composantes (r_1, r_2) est un monomorphisme.

Il existe donc une correspondance biunivoque entre les relations d'équivalence sur M et les sous-objets $i : K \longrightarrow M\pi M$ tels que $K \overset{p_1.i}{\underset{p_2.i}{\rightrightarrows}} M$ soit un couple d'équivalence sur M; un tel sous-objet de $M\pi M$ est appelé un graphe d'équivalence sur M, et on identifie un graphe d'équivalence avec la relation d'équivalence qu'il définit.

(1,3) <u>Proposition.</u> Soit $i : K \longrightarrow M\pi M$ un sous-objet du produit direct $(M\pi M, p_1, p_2)$ tel que le produit fibré (P, ρ_1, ρ_2) de $K \overset{p_1.i}{\underset{p_2.i}{\rightrightarrows}} M$ existe; pour que $i : K \longrightarrow M\pi M$ soit un graphe d'équivalence sur M il faut et il suffit que :

a) il existe un morphisme $s : M \longrightarrow K$ sectionnant $p_1.i$ et $p_2.i$ $(p_1.i.s = 1_M = p_2.i.s)$, ce qui est équivalent à : il existe $s : M \longrightarrow K$ factorisant le morphisme diagonal $\Delta_M : M \longrightarrow M\pi M$ $(i.s = \Delta_M)$.

b) il existe un morphisme $\sigma_K : K \longrightarrow K$ symetrisant le couple $(p_1.i, p_2.i)(p_j.i.\sigma_K = p_k.i,\ j \neq k)$ ce qui est équivalent à: l'involution de symetrie $\sigma : M\pi M \longrightarrow M\pi M$ de composantes (p_2, p_1) $(p_j.\sigma = p_k)$ induit un morphisme $\sigma_K : K \longrightarrow K$ $(\sigma.i = i.\sigma_K)$; en particulier σ_K est aussi une involution.

c) il existe un morphisme de passage $\rho : P \longrightarrow K$ tel que $p_j.i.\rho = p_j.i.\rho_k$; (ρ est alors le noyau du couple de morphismes $K \overset{p_1.i}{\underset{p_2.i}{\rightrightarrows}} M$.

2. <u>Morphismes compatibles</u>.

(2,1) <u>Définition</u>. Soient G(,M') et G(,M) des foncteurs d'équivalence sur des objets M' et M de $\mathbb{C}$; on dit qu'un morphisme $f : M' \longrightarrow M$ est <u>compatible</u> avec G(,M') et G(,M) si le morphisme fonctoriel Hom(,f)×Hom(,f) induit un morphisme fonctoriel G(,f) de G(,M') dans G(,M).

Cela revient à dire que pour tout objet X de $\mathbf{C}$, l'application $\mathrm{Hom}(X,f)\times\mathrm{Hom}(X,f)$ de $\mathrm{Hom}(X,M')\times\mathrm{Hom}(X,M')$ dans $\mathrm{Hom}(X,M)\times\mathrm{Hom}(X,M)$ envoie le sous-ensemble $G(X,M')$ dans le sous-ensemble $G(X,M)$. Si $f : M' \to M$ est compatible avec $G(\ ,M')$ et $G(\ ,M)$, le morphisme fonctoriel $G(\ ,f)$ qu'il détermine est unique.

(2,2) Proposition. Soient $G(\ ,M')$ et $G(\ ,M)$ des relations d'équivalence sur M' et M, et $f : M' \to M$ un morphisme compatible; pour tous couples d'équivalence

$$R' \overset{r'_1}{\underset{r'_2}{\rightrightarrows}} M' \text{ et } R \overset{r_1}{\underset{r_2}{\rightrightarrows}} M \text{ définissant } G(\ ,M')$$

et $G(\ ,M)$, il existe un unique morphisme $f_o : R' \to R$ tel que $f.r'_j = r_j.f_o$, $j = 1,2$. Réciproquement, si f est un morphisme de M' dans M, et s'il existe un morphisme $f_o : R' \to R$ tel que les relations de commutation ci-dessus soient vérifiées, f est compatible avec $G(\ ,M')$ et $G(\ ,M)$; de plus si $s' : R' \to M'$ (resp. $s : R \to M$) est la section commune à r'_1 et r'_2 (resp. à r_1 et r_2), on a $s.f = f_o.s'$.

Si $G(\ ,M')$ et $G(\ ,M)$ admettent des graphes d'équivalence $i' : K' \to M'\pi M'$ et $i : K \to M\pi M$, et si $f : M' \to M$ est compatible, le morphisme $f_o : K' \to K$ est induit par le morphisme $f\pi f$ de $M'\pi M'$ dans $M\pi M$ ($f\pi f.i' = i.f_o$).

(2,3) Proposition. Soit $f : M' \to M$ un morphisme compatible avec des relations d'équivalences définies par des

$$\text{couples } R' \overset{r'_1}{\underset{r'_2}{\rightrightarrows}} M' \text{ et } R \overset{r_1}{\underset{r_2}{\rightrightarrows}} M, \text{ et soit}$$

$f_o : R' \to R$, le morphisme défini par f :

a) si f_o est un épimorphisme, il en est de même de f;

b) pour que f soit un monomorphisme, il faut et il suffit que f_o en soit un, et (M',s',f) est alors le produit fibré de (R',f_o) et (M,s) au-dessus de R.

Remarque : il est évident que $f : M' \to M$ est compatible avec tout foncteur d'équivalence $G(\ ,M')$ sur M' et la plus grande relation d'équivalence sur M.

(2,4) <u>Définition</u>. Un foncteur d'équivalence $D'(\ ,M)$ sur M est dit <u>plus fin</u> qu'un foncteur d'équivalence $G(\ ,M)$ sur M si le morphisme identique 1_M est compatible avec $G'(\ ,M)$ et $G(\ ,M)$, c'est à dire si pour tout objet X de $\mathbb{C}$, $G'(X,M) \subset G(X,M)$.

De façon évidente on a :

Pour qu'une relation d'équivalence E' sur M soit plus fine qu'une relation d'équivalence E sur M, il faut et il suffit que pour des couples d'équivalence $R' \underset{r'_2}{\overset{r'_1}{\rightrightarrows}} M$ et $R \underset{r_2}{\overset{r_1}{\rightrightarrows}} M$ définissant E' et E, il existe un (mono)morphisme compatible $\theta = (1_M)_o : R' \longrightarrow R$ $(r_j . \theta = r'_j)$.

La relation de finesse est trivialement une relation d'ordre sur la classe E(M) des relations d'équivalence sur M et une relation de préordre sur la classe des couples d'équivalence sur M, la relation d'équivalence associée étant la relation définie ci-dessus de couples d'équivalence sur M "équivalents". Dans le cas où le produit direct $M \pi M$ existe, la relation d'ordre définie entre deux relations d'équivalence sur M s'identifie à la relation d'ordre opposée à la relation de "factorisation" de leurs graphes d'équivalence dans la classe des sous-objets de $M \pi M$.

(2,5) <u>Proposition</u>. Soit E(M) la classe des relations d'équivalence sur M :

a) $M \underset{1_M}{\overset{1_M}{\rightrightarrows}} M$ est un couple d'équivalence définissant le plus grand élément de E(M);

b) le produit direct $M \pi M$ (quand il existe) est un couple d'équivalence sur M définissant le plus petit élément de E(M);

c) si la catégorie des objets au dessus de $M \pi M$ est à 2-produits directs, E(M) est réticulé (et s'identifie à une sous-classe de la classe réticulée (pour l'ordre opposé) des sous-objets de M M);

d) si la catégorie des objets au dessus de $M \pi M$ est à produits directs quelconques, et si E(M) est un ensemble, c'est un treillis complet.

<u>Remarque</u> : dans la suite on notera $E_o(M)$ la plus fine relation d'équivalence sur M et $G_1(\ ,M)$ (resp. $E_1(M)$) le foncteur d'équivalence (resp. la relation d'équivalence) le moins fin sur M.

3. <u>Image réciproque d'une relation d'équivalence.</u>

(3,1) Soient $G(\ ,M)$ un foncteur d'équivalence sur M, et $f : M' \longrightarrow M$ un morphisme; pour tout objet X de $\mathcal{C}$ l'image réciproque par $\mathrm{Hom}(X,f)\times\mathrm{Hom}(X,f)$ du sous-ensemble $G(X,M)$ de $\mathrm{Hom}(X,M)\times\mathrm{Hom}(X,M)$ est un sous-ensemble $G_f(X,M')$ de $\mathrm{Hom}(X,M')\times\mathrm{Hom}(X,M')$, graphe d'une relation d'équivalence sur $\mathrm{Hom}(X,M')$; de plus, si $u : X' \longrightarrow X$ est un morphisme, l'application $\mathrm{Hom}(u,M')\times\mathrm{Hom}(u,M')$ envoie le sous-ensemble $G_f(X,M')$ dans le sous-ensemble $G_f(X',M')$; on définit ainsi de façon évidente un foncteur d'équivalence sur M' noté $G_f(\ ,M')$.

<u>Définition</u>. Avec les notations ci-dessus, le foncteur d'équivalence $G_f(\ ,M')$ sur M' est appelé <u>l'image réciproque par</u> f <u>du foncteur d'équivalence</u> $G(\ ,M)$ <u>sur</u> M.

Il est évident que f définit un morphisme fonctoriel de $G_f(\ ,M')$ dans $G(\ ,M)$, de sorte que f est compatible avec $G_f(\ ,M')$ et $G_f(\ ,M)$. Plus précisément :

(3,2) <u>Proposition</u>. Il existe un isomorphisme fonctoriel entre $G_f(\ ,M')$ et le moins fin des foncteurs d'équivalence $G(\ ,M')$ sur M' tel que f soit compatible avec $G(\ ,M')$ et $G(\ ,M)$.

La proposition suivante fixe la représentabilité du foncteur $G_f(\ ,M')$ lorsque $G(\ ,M)$ est une relation d'équivalence :

(3,3) <u>Proposition</u>. Si les produits directs $(M'\pi M',p'_1,p'_2)$ et $(M\pi M,p_1,p_2)$ existent, et si la catégorie des objets au dessus de $M\pi M$ est à 2-produits directs l'image réciproque par un morphisme $f : M' \longrightarrow M$ d'une relation d'équivalence $G(\ ,M)$ sur M est une relation d'équivalence $G_f(\ ,M')$ sur M'; le graphe d'équivalence de $G_f(\ ,M')$ est l'image réciproque par $f\pi f$ du graphe d'équivalence de $G(\ ,M)$.

En particulier l'image réciproque par f de la relation d'équivalence la moins fine sur M est la relation d'équivalence la moins fine sur M'.

4. <u>Relation d'équivalence associée à un morphisme</u>.

(4,1) <u>Définition</u>. Soit $f : M \longrightarrow N$ un morphisme de $\mathbb{C}$; on appelle foncteur d'équivalence associé à f le foncteur $\overset{-1}{f}(\ ,M)$ d'équivalence sur M image réciproque par f de la relation d'équivalence la plus fine sur N (définie par le couple $N \overset{1_N}{\underset{1_N}{\rightrightarrows}} N$).

Si
$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "u"'] & N' \arrow[d, "v"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$
est un diagramme commutatif dans $\mathbb{C}$, pour tout objet X de $\mathbb{C}$ l'application $\mathrm{Hom}X,u)\times\mathrm{Hom}(X,u)$ envoie le sous-ensemble $\overset{-1}{f'}(X,M')$ de $\mathrm{Hom}(X,M')\times\mathrm{Hom}(X,M')$ dans le sous-ensemble $\overset{-1}{f}(X,M)$ de $\mathrm{Hom}(X,M)\times\mathrm{Hom}(X,M)$, par suite $u : M' \longrightarrow M$ est un morphisme compatible avec $\overset{-1}{f'}(\ ,M')$ et $\overset{-1}{f}(\ ,M)$ car il définit un morphisme fonctoriel de $\overset{-1}{f'}(\ ,M')$ dans $\overset{-1}{f}(\ ,M)$, d'où :

(4,2) <u>Proposition</u>. $f \rightsquigarrow \overset{-1}{f}(\ ,M)$ définit un foncteur covariant de la catégorie des morphismes de $\mathbb{C}$ dans la "catégorie" des foncteurs contravariants de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{E}\mathrm{ns}$.

(4,3) <u>Proposition</u>. Soit $f : M \longrightarrow N$ un morphisme de $\mathbb{C}$; pour qu'un couple $R \overset{r_1}{\underset{r_2}{\rightrightarrows}} M$ soit un couple d'équivalence définissant l'image réciproque par f de la plus fine relation d'équivalence sur N, il faut et il suffit que $R \overset{r_1}{\underset{r_2}{\rightrightarrows}} M$ soit un produit fibré du couple de morphismes $M \overset{f}{\underset{f}{\rightrightarrows}} N$.

On note alors (R_f, r_1, r_2) ce produit fibré, et E_f la relation d'équivalence $\overset{-1}{f}(\ ,M)$; f est compatible avec les couples d'équivalence $R_f \overset{r_1}{\underset{r_2}{\rightrightarrows}} M$ et $N \overset{1_N}{\underset{1_N}{\rightrightarrows}} N$ et le morphisme $f_o : R_f \longrightarrow N$ défini par f est égal à $f.r_1 = f.r_2$; si $s : M \longrightarrow R_f$ est la section commune à r_1 et r_2, on a trivialement $f = f.r_1.s = f.r_2.s$, d'où :

<u>Corollaire</u> 1. Pour que $f : M \longrightarrow N$ soit un monomorphisme, il faut et il suffit que le foncteur d'équivalence associé à f soit la plus fine relation d'équivalence sur M; pour que f soit un épimorphisme, il faut et il suffit que $f_o = f.r_1 = f.r_2$ en soit un (dans le cas où $f^1(\,,M)$ est une relation d'équivalence).

<u>Corollaire</u> 2. Soit $\mathbb{C}$ une catégorie à 2-produits fibrés; le foncteur d'équivalence associé à tout morphisme $f : M \longrightarrow N$ est une relation d'équivalence E_f admettant (R_f, r_1, r_2) comme représentant, et $f \rightsquigarrow R_f$ définit un foncteur covariant de la catégorie des morphismes de $\mathbb{C}$ dans la catégorie $\mathbb{C}$.

Plus précisément : soit
$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "u"'] & N' \arrow[d, "v"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$
un diagramme commutatif,

- $u : M' \longrightarrow M$ est un morphisme compatible avec $R_{f'}$ et R_f;
- si $u_o : R_{f'} \longrightarrow R_f$ est le morphisme définit par u, si u_o est un monomorphisme (resp. un epimorphisme) il en est de même de u, la réciproque étant exacte (resp. si f est un monomorphisme);
- si $v : N' \longrightarrow N$ est un monomorphisme, $E_{f'}$ est l'image réciproque par u de E_f.

<u>Corollaire</u> 3. Soient $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ des morphismes de $\mathbb{C}$:

a) E_f est plus fine que $E_{g.f}$ sur M, et lui est identique si g est un monomorphisme;

b) $E_{g.f}$ est l'image réciproque par f de E_g, donc f est compatible avec $E_{g.f}$ (et a fortiori E_f) et E_g.

(4,4) <u>Définition</u>. On dit qu'un foncteur d'équivalence $G(\,,M)$ sur M est <u>réalisable</u>, s'il existe un morphisme f de source M tel que $G(\,,M) = f^1(\,,M)$. On dit alors que f réalise le foncteur d'équivalence $G(\,,M)$.

Pour que des morphismes de même source f et g réalisent le même foncteur d'équivalence sur M, il faut et il suffit qu'ils admettent les mêmes couples diagonaux (c'est à dire $f.u = f.v$ equivalant à $g.u = g.v$).

(4,5) <u>Proposition</u>. Soit $E_r(M)$ la classe des relations d'équivalence réalisables sur M :

a) la plus fine relation d'équivalence sur M est réalisable (par 1_M);

b) si $\mathbb{C}$ admet un objet final Ω et si le produit direct $M\pi M$ existe, la moins fine relation d'équivalence sur M est réalisable (par ω_M);

c) si $\mathbb{C}$ et la catégorie des objets au dessus de M sont à 2-produits fibrés, $E_r(M)$ est réticulé à gauche;

d) si $\mathbb{C}$ possède un objet final, est à produits fibrés quelconques, et si $E_r(M)$ est un ensemble c'est un treillis achevé.

Tous les résultats et toutes les définitions que l'on a exposés ci-dessus se dualisent de façon immédiate; on obtient par dualité les notions de relations de coéquivalence, de couple de coéquivalence, etc...

5. Foncteur conoyau associé à un foncteur d'équivalence.

(5,1) Soit G(,M) un foncteur d'équivalence sur un objet M de $\mathbb{C}$. Pour tout objet Y de $\mathbb{C}$ soit $Q_G(M,Y)$ le sous-ensemble de Hom(M,Y) composé des morphismes compatibles avec G(,M) et $E_o(Y)$, c'est à dire l'ensemble des $y : M \longrightarrow Y$ tels que pour tout objet X de $\mathbb{C}$, et tout élément (x,x') de G(X,M) on ait $y.x = y.x'$; si $v : Y' \longrightarrow Y$ est un un morphisme de $\mathbb{C}$, l'application Hom(M,v) envoie le sous-ensemble $Q_G(M,Y')$ dans le sous-ensemble $Q_G(M,Y)$; soit $Q_G(M,v)$ l'application ainsi définie de $Q_G(M,Y')$ dans $Q_G(M,Y)$; il est évident que l'on définit ainsi un foncteur covariant $Q_G(M, \ ) : Y \rightsquigarrow Q_G(M,Y)$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{E}$ns, et que pour tout Y de $\mathbb{C}$ l'injection canonique de $Q_G(M,Y)$ dans Hom(M,Y) définit un morphisme fonctoriel de $Q_G(M, \ )$ dans Hom(M,).

Si $f : M' \longrightarrow M$ est un morphisme compatible avec les foncteurs d'équivalence G'(,M') et G(,M), pour tout objet Y de $\mathbb{C}$ l'application Hom(f,Y) envoie le sous-ensemble $Q_G(M,Y)$ de Hom(M,Y) dans le sous-ensemble $Q_{G'}(M',Y)$ de Hom(M',Y), et il est facile de voir que l'on définit ainsi un morphisme fonctoriel de $Q_G(M, \ )$ dans $Q_{G'}(M', \ )$.

(5,2) Définition. Si G(,M) est un foncteur d'équivalence défini sur M, le foncteur $Q_G(M, \ )$ défini ci-dessus est appelé le foncteur conoyau associé au foncteur d'équivalence G(,M).

La représentabilité du foncteur $Q_G(M, \ )$ dépend évidemment du foncteur d'équivalence $G(\ ,M)$; si on ne suppose rien sur ce foncteur le seul résultat obtenu est le suivant :

(5,3) <u>Proposition</u>. Soit M un objet d'une catégorie $\mathbb{C}$ tel que :

a) la classe $Q(M)$ des objets quotients de M forme un ensemble de cardinal α ;

b) tout couple de morphisme de même source et de but M admet un conoyau;

c) la categorie des objets au dessous de M est à b-sommes directes ($b \geq \alpha$);

alors le foncteur conoyau associé à tout foncteur d'équivalence sur M est représentable; un représentant de $Q_G(M, \ )$ est obtenu comme somme fibrée de l'ensemble des conoyaux $q_i : M \longrightarrow Q_i$ des couples de morphismes (x,x') de $G(X,M)$ pour tout objet X de $\mathbb{C}$.

Quand il existe, un représentant du foncteur $Q_G(M, \ )$ est la donnée d'un épimorphisme $q : M \longrightarrow Q$ compatible avec $G(\ ,M)$ et $E_o(Q)$, et tel que pour tout morphisme $y : M \longrightarrow Y$, compatible avec $G(\ ,M)$ et $E_o(Y)$, il existe un unique morphisme $\bar{y} : Q \longrightarrow Y$ tel que $y = \bar{y}.q$.

Si $q_{G'} : M' \longrightarrow Q_{G'}$ est un représentant du foncteur conoyau associé à un foncteur d'équivalence $G'(\ ,M')$ sur M' et $q_G : M \longrightarrow Q_G$ un représentant du foncteur conoyau associé à un foncteur d'équivalence $G(\ ,M)$ sur M, tout morphisme $f : M' \longrightarrow M$ compatible avec $G'(\ ,M')$ et $G(\ ,M)$ définit un unique morphisme $f_1 : Q_{G'} \longrightarrow Q_G$ tel que $f_1.q_{G'} = q_G.f$, et en particulier si f est un épimorphisme, il en est de même de f_1.

(5,4) <u>Définition</u>. On appelle <u>conoyau du foncteur d'équivalence</u> $G(\ ,M)$ un représentant $q_G : M \longrightarrow Q_G$ du foncteur conoyau associé au foncteur $G(\ ,M)$; en général le conoyau de $G(\ ,M)$ sera identifié à l'objet quotient de M représentant la classe de l'épimorphisme qu'il définit.

Soit $q_G : M \longrightarrow Q_G$ le conoyau d'un foncteur d'équivalence sur M; le foncteur d'équivalence réalisable $\bar{q}_G^{1}(\ ,M)$ est le plus fin des foncteurs d'equivalence réalisables sur M moins fins que $G(\ ,M)$, d'ou

(5,5) <u>Proposition</u>. Si $q_G : M \longrightarrow Q_G$ est le conoyau d'un foncteur d'équivalence réalisable sur M $G(\ ,M)$, q_G réalise $G(\ ,M)$.

(5,6) <u>Proposition</u>. Soit $R \overset{r_1}{\underset{r_2}{\rightrightarrows}} M$ un couple d'équivalence sur M définissant une relation d'équivalence E sur M; pour qu'un morphisme $q : M \to Q$ soit un conoyau de E, il faut et il suffit que q soit un conoyau (ou que (M,q,q) soit une somme fibrée) du couple de morphismes $R \overset{r_1}{\underset{r_2}{\rightrightarrows}} M$ (r_1, r_2 admettant une section commune, pour tout couple (y_1, y_2) diagonal à (r_1, r_2), on a $y_1 = y_2$).

<u>Corollaire</u>. Soit M un objet d'une catégorie $\mathbf{C}$ tel que la catégorie des objets au dessous de M soit à 2-sommes directes; alors le foncteur conoyau associé à toute relation d'équivalence E sur M est représentable; un representant est obtenu comme somme fibrée d'un couple d'équivalence sur M définissant E.

(5,7) <u>Définition</u>. On dit qu'un foncteur d'équivalence G(,M) sur M est <u>effectif</u> si :

a) G(,M) admet un conoyau $q_G : M \to Q_G$;

b) G(,M) est l'image réciproque par q_G de la plus fine relation d'équivalence sur Q_G, i.e. G(,M) est le foncteur d'équivalence associé à q_G.

(5,8) <u>Proposition</u>. Pour qu'un foncteur d'équivalence G(,M) sur M soit effectif, il faut et il suffit que G(,M) admette un conoyau et soit réalisable.

<u>Corollaire</u>. Pour qu'une relation d'équivalence E sur M soit effective il faut et il suffit que E admette un conoyau $q_E : M \to Q_E$ et que pour tout couple d'équivalence $R \overset{r_1}{\underset{r_2}{\rightrightarrows}} M$ définissant E, le diagramme $R \overset{r_1}{\underset{r_2}{\rightrightarrows}} M \overset{q}{\underset{q}{\rightrightarrows}} Q_E$ soit stable (il suffit d'ailleurs qu'il soit stable à gauche, étant déjà stable à droite par la condition précédente).

(5,9) <u>Définition</u>. On dit qu'un morphisme $q : M \to Q$ est un épimorphisme <u>strict</u> (resp. <u>effectif</u>) si q est le conoyau de son foncteur d'équivalence associé (resp. et si ce foncteur est une relation d'équivalence). En particulier, pour qu'un épimorphisme strict soit effectif, il faut et il suffit que le produit fibré $M \pi_Q M$ existe.

On reviendra par la suite sur ces définitions.

6. <u>Décomposition des morphismes par épimorphismes stricts ou effectifs dans certaines catégories.</u>

(6,1) Soit $f : M \longrightarrow N$ un morphisme d'une catégorie $\mathbb{C}$; si le conoyau du foncteur d'équivalence associé à f, $q_f : M \longrightarrow Q_f$, existe, f se factorise de façon unique sous la forme $f = \bar{f}.q_f$; de plus on notera que pour que f soit un monomorphisme il faut et il suffit que 1_M soit un conoyau de la relation d'équivalence associée à f.

<u>Définition</u>. On dit qu'une catégorie $\mathbb{C}$ est une <u>catégorie admettant une décomposition à droite stricte</u> si tout foncteur d'équivalence réalisable dans $\mathbb{C}$ admet un conoyau.

(6,2) Théorème. Soit $\mathbb{C}$ une catégorie telle que pour tout objet M de $\mathbb{C}$: a) la classe $Q^\circ(M)$ des objets quotients de M qui sont conoyaux de couples de morphismes de même source et de but M soit un ensemble;

b) tout couple de morphismes de même source et de but M admette un conoyau;

c) la catégorie des objets au dessous de M soit à α-sommes directes, avec $\alpha \geqslant \mathrm{Card}(Q^\circ(M))$;

alors $\mathbb{C}$ est une catégorie admettant une décomposition à droite stricte.

On remarquera que les conditions :

b') $\mathbb{C}$ est à 2-sommes fibrées;

c') pour tout objet M de $\mathbb{C}$ et tout cardinal $\mathfrak{b}$ tel que $0 < \mathfrak{b} \leqslant \mathrm{Card}(Q^\circ(M))$, $\mathbb{C}$ est à $\mathfrak{b}$-sommes directes;

entrainent les conditions b) et c).

(6,3) <u>Théorème</u>. Une catégorie à 2-sommes et produits fibrés est une catégorie admettant une décomposition à droite stricte.

Pour des raisons évidentes on dit alors que $\mathbb{C}$ admet une décomposition à droite effective.

(6,4) <u>Proposition</u>. Soit $\mathbb{C}$ une catégorie admettant une décomposition à droite stricte; pour tout morphisme $f : M \longrightarrow N$ de $\mathbb{C}$, il existe une unique décomposition de f sous la forme $f = \bar{f}.q_f$ où $q_f : M \longrightarrow Q_f$ est un objet quotient strict de M, conoyau du foncteur d'équivalence associé à f.

De plus, $f \rightsquigarrow Q_f$ est un foncteur covariant de la catégorie des morphismes de $\mathbb{C}$ dans la catégorie $\mathbb{C}$, i.e. : pour tout diagramme commutatif de $\mathbb{C}$

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "u"'] & N' \arrow[d, "v"] \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

le morphisme $u : M' \longrightarrow M$ (compatible avec $\overset{-1}{f'}(\ ,M')$ et $\overset{-1}{f}(\ ,M)$) définit un unique morphisme $Q(u) : Q_{f'} \longrightarrow Q_f$ tel que $Q(u).q_{f'} = q_f.u$ et $\bar{f}.Q(u) = v.\bar{f}'$.

Corollaire 1. Si $u : M' \longrightarrow M$ est un épimorphisme, il en est de même de $Q(u)$; si les produits fibrés (R',r_1',r_2') de $M' \overset{q_{f'}}{\underset{q_{f'}}{\rightrightarrows}} Q_{f'}$ et (R,r_1,r_2) de $M \overset{q_f}{\underset{q_f}{\rightrightarrows}} Q_f$ existent (i.e. si $q_{f'}$ et q_f sont des épimorphismes effectifs) et si le morphisme $u_o : R' \longrightarrow R$ défini par u est un épimorphisme (il en est alors de même de u), $(Q_f, Q(u), q_f)$ est somme fibrée de $(q_{f'}, u)$, et par suite $Q(u)$ est un épimorphisme.

Corollaire 2. Soient $M \xrightarrow[f]{} N \xrightarrow[g]{} P$ des morphismes de $\mathbb{C}$:

a) $q_f : M \longrightarrow Q_f$ factorise $q_{g.f} : M \longrightarrow Q_{g.f}$, c'est à dire que dans $Q(M)$, $Q_{g.f}$ est plus petit que Q_f et lui est égal si g est un monomorphisme;

b) $f : M \longrightarrow N$ (compatible avec $\overset{-1}{g.f}(\ ,M)$ et $\overset{-1}{g}(\ ,N)$) définit un unique morphisme $Q(f) : Q_{g.f} \longrightarrow Q_g$ tel que $Q(f).q_{g.f} = q_g.f$ et $\overline{g.f} = \bar{f}.Q(f)$; en particulier, si f est un épimorphisme il en est de même de $Q(f)$.

Il est évident que toutes les propositions et définitions données ci-dessus se dualisent facilement : foncteur de coéquivalence sur un objet M, relation et couples de coéquivalences, noyau d'un foncteur de coéquivalence et monomorphisme strict et effectif. En particulier :

(6,5) Théorème. Une catégorie à 2-sommes et produits fibrés est une catégorie admettant une décomposition à droite et à gauche stricte (et même effective).

(6,6). Proposition. Soit $\mathbb{C}$ une catégorie admettant une décomposition à droite et à gauche stricte; pour tout morphisme $f : M \longrightarrow N$ il existe une unique décomposition de

f sous la forme $f = i_f . \hat{f} . q_f$ où :

$q_f : M \longrightarrow Q_f$ est un objet quotient strict de M conoyau du foncteur d'équivalence associé à f (ou $\hat{f} . q_f$);

$i_f : K_f \longrightarrow N$ est un sous-objet strict de N, noyau du foncteur de coéquivalence associé à f (ou $i_f . \hat{f}$);

$\hat{f} : Q_f \longrightarrow K_f$ est l'unique morphisme déterminé par f tel que $f = i_f . \hat{f} . q_f$;

De plus $f \rightsquigarrow \hat{f}$ est un foncteur covariant de la catégorie des morphismes de C dans elle-même.