R. PUPIER

Foncteurs représentables foncteurs adjoints

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1964, tome 1, fascicule 1
« Exposés sur les CATEGORIES », , exp. nº 12, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1964__1_1_A6_0>

faculté des sciences de lyon

SEMINAIRE
D'ALGEBRE
1963-1964

2° niveau

12. FONCTEURS REPRESENTABLES
FONCTEURS ADJOINTS

par R.Pupier

On introduit dans cet exposé des notions définies essentiellement par D.M.Kan en 1956 [3]. Ces notions généralisent les rapports réciproques des deux foncteurs suivants de $\mathbb{A}b$ dans $\mathbb{A}b$:

1. Hom(,) qui à deux groupes abéliens A et B associe le groupe abélien Hom(A,B) des homomorphismes de A dans B.

2. $\otimes$, qui à deux groupes abéliens A et B associe leur produit tensoriel $A\otimes B$.

On sait qu'il existe un isomorphisme canonique de $\mathrm{Hom}(A\otimes B,X)$ sur Hom(A,Hom(B,X)), qui définit un isomorphisme fonctoriel entre les foncteurs Hom($\otimes$,) et Hom(,Hom(,).

L'outil fondamental sera le foncteur Hom(,) de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ dans $\mathbb{E}ns$ dont on rappelle qu'il est contravariant par rapport au premier argument, et covariant par rapport au second. D'autre part, il sera fait un constant usage des foncteurs représentables, dont quelques propriétés générales constituent la première partie de cet exposé.

Dans la suite on supposera que tous les foncteurs considérés, autres que Hom(,), sont covariants par rapport à tous leurs arguments. On se gardera pour étendre les résultats à des foncteurs contravariants de se contenter de "retourner les flèches"; cette manipulation, opérée sans de nombreuses vérifications, conduit souvent à des résultats désastreux.

1. Foncteurs représentables.

Les principales propriétés des foncteurs représentables ont déjà été citées dans l'exposé n°1, Catégories à produits fibrés. On se contentera de reprendre les propriétés dont on fera le plus grand usage, et d'en esquisser la démonstration.

On considère une catégorie $\mathbb{C}$ quelconque, et un foncteur F de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{E}\mathrm{ns}$. Si M est un objet de $\mathbb{C}$, on remarque que l'on peut définir tous les morphismes fonctoriels de $\mathrm{Hom}(M,\ )$ dans F, dès que l'on connait $F(M)$: en effet, pour tout élément m de $F(M)$, on pose $\bar{m}_X(f) = F(f)(m)$, où $f \in \mathrm{Hom}(M,X)$; $\bar{m}_X$ est une application de $\mathrm{Hom}(M,X)$ dans $F(X)$, qui satisfait au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(M,X) \arrow[r, "\bar{m}_X"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(M,u)"'] & F(X) \arrow[d, "F(u)"] \\ \mathrm{Hom}(M,Y) \arrow[r, "\bar{m}_Y"'] & F(Y) \end{tikzcd}$$

et $\bar{m}$ est un morphisme fonctoriel de $\mathrm{Hom}(M,\ )$ dans F.

(1,1) Proposition. $m \longrightarrow \bar{m}$ est une bijection de $F(M)$ sur $\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(M,\ ),F)$.

On montre que si φ est un morphisme fonctoriel de $\mathrm{Hom}(M,\ )$ dans F, $x = \varphi_M(1_M) \in F(M)$ est tel que $\bar{x} = \varphi$, ce qui montre que les morphismes fonctoriels de $\mathrm{Hom}(M,\ )$ dans F forment un ensemble; alors $\varphi \longrightarrow x$ est l'application réciproque de $m \longrightarrow \bar{m}$.

En particulier, en appliquant la proposition (1,1) aux foncteurs $\mathrm{Hom}(M,\ )$, il vient :

(1,2) Corollaire. Si M et M' sont deux objets de $\mathbb{C}$, $f \longrightarrow \mathrm{Hom}(f,\ )$ est une bijections de $\mathrm{Hom}(M',M)$ sur $\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(M,\ ),\mathrm{Hom}(M',\ ))$. De plus tout isomorphisme fonctoriel de $\mathrm{Hom}(M,\ )$ dans $\mathrm{Hom}(M',\ )$ est induit par un isomorphisme de M' sur M.

On pose alors la définition :

(1,3) Définition. On dit qu'un foncteur F de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{E}\mathrm{ns}$ est représentable, s'il existe un objet A de $\mathbb{C}$, et un isomorphisme fonctoriel de $\mathrm{Hom}(A,\ )$ dans F.

On remarque d'après (1,2) que A est défini à un isomorphisme près.

Exemples : 1. Dans une catégorie à sommes directes, le foncteur $X \rightsquigarrow \mathrm{Hom}(M,X) \times \mathrm{Hom}(N,X)$ est représentable. De même dans une catégorie à produits directs, le foncteur $X \rightsquigarrow \mathrm{Hom}(X,M) \times \mathrm{Hom}(X,N)$ est représentable.

2. Soient A, M et N trois objets d'une catégorie, $u \in \mathrm{Hom}(A,M)$ et $v \in \mathrm{Hom}(A,N)$; pour un couple $(f,g) \in \mathrm{Hom}(M,X) \times \mathrm{Hom}(N,X)$, on définit la relation $R\{f,g\} \iff$ "$f.u = g.v$"; si l'on désigne par G_X l'ensemble des couples satisfaisant à la relation R, $X \rightsquigarrow G_X$ est naturellement un foncteur de $\mathbb{C}$ dans **Ens**. Ce foncteur est représentable, si et seulement si la somme fibrée de M et de N relative à u et v existe. Dualement, on obtient une propriété analogue pour le produit fibré.

2. Foncteurs adjoints et coadjoints.

(2,1) Définition. Etant donné un foncteur T de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}'$, on dit que T admet un foncteur adjoint, si le foncteur $X \rightsquigarrow \mathrm{Hom}(T(X),X')$ est représentable pour tout objet X' de $\mathbb{C}'$. Dualement, on dit qu'un foncteur S de $\mathbb{C}'$ dans $\mathbb{C}$ admet un coadjoint, si le foncteur $X' \rightsquigarrow \mathrm{Hom}(X,S(X'))$ est représentable pour tout objet X de $\mathbb{C}$.

On étudiera ici seulement le premier cas : soit pour un X' donné dans $\mathbb{C}'$, $S(X')$ un représentant du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}'}(T(\ ),X')$, qui est alors isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\ ,S(X'))$; montrons que $X' \rightsquigarrow S(X')$ est un foncteur (évidemment défini à un isomorphisme fonctoriel près), qu'on appelera l'adjoint de T; T sera alors trivialement un coadjoint de S.

On désigne par $\varphi_{X',X}$ la bijection de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,S(X'))$ sur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}'}(T(X),X')$; si X' et Y' sont deux objets de $\mathbb{C}'$, l'application $\chi_X = \varphi^{-1}_{Y',X} \circ \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}'}(T(X),u') \circ \varphi_{X',X}$, où u' est un morphisme de X' dans Y', définit un morphisme fonctoriel χ de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\ ,S(X'))$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\ ,S(Y'))$ (on montre que pour tous $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(Y,X)$ et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,S(X'))$, $\chi_X(f).u = \chi_Y(f.u)$ (cf. appendice)); d'après (1,2) il lui correspond un unique morphisme, $S(u')$ de $S(X')$ dans $S(Y')$, qui satisfait aux propriétés de composition, à savoir $S(v'.u') = S(v').S(u')$.

On a alors $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,S(u')) = \varphi^{-1}_{Y'X}.\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}'}(T(X),u')\circ\varphi_{X'X}$, ou encore $\varphi_{Y'X}.\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,S(u')) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}'}(T(X),u')\circ\varphi_{X'X}$. On en déduit la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,S(X')) \arrow[r, "\varphi_{X'X}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(u,S(u'))"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}'}(T(X),X') \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}'}(T(u),u')"] \\ \mathrm{Hom}_{C}(Y,S(Y')) \arrow[r, "\varphi_{Y'Y}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}'}(T(Y),Y') \end{tikzcd} \tag{1}$$

pour tous $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(Y,X)$ et $u' \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}'}(X',Y')$. En définitive φ est un isomorphisme fonctoriel de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\ ,S(\ ))$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}'}(T(\ ),\ )$.

On peut trouver une expression de $S(u')$ en prenant dans le diagramme (1) pour X et Y, $S(X')$ et pour u : $1_{S(X')}$. On obtient : $S(u') = \varphi^{-1}_{Y'S(X')}\circ\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}'}(TS(X'),u').\varphi_{X'S(X')}(1_{S(X')})$. On désignera par $\Phi(X')$ le morphisme $\varphi_{X'S(X')}(1_{S(X')})$ de $TS(X')$ dans X'. L'intérêt de ce morphisme provient du résultat suivant :

(2,2) <u>Proposition</u>. Soient T un foncteur de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}'$, S un foncteur de $\mathbb{C}'$ dans $\mathbb{C}$, et φ un morphisme fonctoriel satisfaisant au diagramme (1); alors $\Phi(X') = \varphi_{X'S(X')}(1_{S(X')})$ définit un morphisme fonctoriel Φ de TS dans $1_{\mathbb{C}'}$, et $\varphi \longrightarrow \Phi$ est une bijection.

Le fait que Φ est un morphisme fonctoriel se démontre en utilisant le diagramme (1) dans des cas particuliers; pour la deuxième partie, soit Φ un morphisme fonctoriel de TS dans $1_{\mathbb{C}'}$; soit $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,S(X'))$; on pose $\varphi_{X'X}(f) = \Phi(X').T(f)$; $\varphi_{X'X}(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}'}(T(X),X')$, et on vérifie facilement que φ satisfait au diagramme (1); alors $\Phi \longrightarrow \varphi$, ainsi définie, est l'application réciproque de $\varphi \longrightarrow \Phi$, ce qui achève la démonstration.

(2,3) On pourrait faire une démarche analogue, pour les foncteurs coadjoints;on se contentera d'en indiquer les étapes : si T de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}'$ est un coadjoint de S, il existe un isomorphisme fonctoriel $\psi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}'}(T(\ ),\ ) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\ ,S(\ ))$; de plus, si T et S sont des foncteurs quelconques, à tout morphisme fonctoriel ψ de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}'}(T(\ ),\ )$ dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\ ,S(\ ))$, on peut faire correspondre un unique morphisme fonctoriel Ψ de $1_{\mathbb{C}}$ dans ST de telle façon que $\psi \longrightarrow \Psi$ soit une bijection.

<u>Proposition</u>. Soient deux foncteurs T de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}'$ et S de $\mathbb{C}'$ dans $\mathbb{C}$, tels qu'il existe un morphisme fonctoriel $\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\ ,S(\ )) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}'}(T(\ ),\ )$ et un morphisme fonctoriel $\psi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}'}(T(\ ),\ ) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\ ,S(\ ))$; S est adjoint à T si, et seulement si, $\varphi\cdot\psi$ et $\psi\cdot\varphi$ sont des morphismes fonctoriels identiques.

(2,4) On examine ici les répercussions de la proposition (2,3) sur les morphismes fonctoriels Φ et Ψ.

<u>Proposition</u>. $\psi\cdot\varphi$ (resp. $\varphi\cdot\psi$) est le morphisme identique de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\ ,S(\ ))$ (resp. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}'}(T(\ ),\ )$) si et seulement si le morphisme fonctoriel composé

$$S \xrightarrow{\Psi S} STS \xrightarrow{S\Phi} S \quad (\text{resp. } T \xrightarrow{T\Psi} TST \xrightarrow{\Phi T} T)$$

est le morphisme identique de S (resp. de T).

La démonstration de ce résultat est d'ordre technique et analogue à celle proposée dans l'appendice.

(2,5) <u>Exemples</u> : <u>Somme et produit directs</u>.

Soit $\mathbb{C}$ une catégorie, et k le foncteur de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ défini par $X \rightsquigarrow (X,X)$. Si nous supposons que k admet un coadjoint T, il existe un isomorphisme fonctoriel $\psi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T(M,N),X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}}((M,N),(X,X))$, i.e. le foncteur $X \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}}((M,N),(X,X))$ est <u>représentable</u>; d'après l'exemple (1) de (1,3) cela signifie que $\mathbb{C}$ est une catégorie à sommes directes, et on peut écrire $T(M,N) = M \amalg N$. Les morphismes ψ, φ, Ψ, Φ définis précédemment ont les significations suivantes :

ψ : à tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M\ N,X)$ il fait correspondre l'unique couple (f_M,f_N) tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "e_M"'] \arrow[dr, "f_M"] & \\ M \amalg N \arrow[r, "f"] & X \\ N \arrow[u, "e_N"] \arrow[ur, "f_N"'] & \end{tikzcd}$$

φ est bien entendu le morphisme inverse;

pour tout X, $\Phi(X)$ est le morphisme codiagonal (cf. exposé 0) de $X \amalg X$ dans X;

enfin $\Psi(M,N) = (e_M, e_N)$.

Dualement, si k possède un adjoint S, il existe un isomorphisme fonctoriel $\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, S(M,N)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}}((X,X),(M,N))$; c'est le foncteur $X \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\times\mathbb{C}}((X,X),(M,N))$ qui est représentable. φ et ψ s'interprètent comme dans le cas de la somme, $\Phi(M,N) = (p_M, p_N)$ et $\Psi(X)$ est le morphisme diagonal de X dans $X \pi X$.

3. Propriétés d'exactitude.

Soit $\mathbb{C}$ une catégorie quelconque. On rappelle la définition donnée dans l'exposé 1 :

(3,1) Définition. On dit qu'une suite $M \xrightarrow{u} N \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} P$ est exacte si le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(X,M) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(X,u)"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(X,f.u)"'] & \mathrm{Hom}(X,N) \arrow[d, "(\mathrm{Hom}(X,f),\mathrm{Hom}(X,g))"] \\ \mathrm{Hom}(X,P) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(X,P)"'] & \mathrm{Hom}(X,P)\times\mathrm{Hom}(X,P) \end{tikzcd}$$

représente un produit fibré pour tout objet X de $\mathbb{C}$.

De même on définit une suite exacte $M \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} N \xrightarrow{u} P$ si

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(P,X) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(u,X)"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(u.f,X)"'] & \mathrm{Hom}(N,X) \arrow[d, "(\mathrm{Hom}(f,X),\mathrm{Hom}(g,X))"] \\ \mathrm{Hom}(M,X) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(M,X)"'] & \mathrm{Hom}(M,X)\times\mathrm{Hom}(M,X) \end{tikzcd}$$

représente un produit fibré pour tout objet X de $\mathbb{C}$.

(3,2) Remarque : dans les catégories à produit, une suite

$M \longrightarrow N \rightrightarrows P$ est exacte si et seulement si M est un produit fibré de N et P au-dessus de $P \times P$. Dualement dans une catégorie à sommes $M \rightrightarrows N \longrightarrow P$ est exacte si P est une somme fibrée de M et N au-dessus de $M \amalg M$.

D'autre part si $\mathbb{C}$ est une catégorie abélienne, la suite $M \longrightarrow N \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} P$ est exacte ssi $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \xrightarrow{f-g} P$ est exacte, et la suite $M \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} N \longrightarrow P$ est exacte ssi $M \xrightarrow{f-g} N \longrightarrow P \longrightarrow 0$ l'est aussi.

(3,3) <u>Définition</u>. On dit qu'un foncteur covariant est <u>exact à gauche</u> (resp. <u>à droite</u>) si pour toute suite exacte $M \longrightarrow N \rightrightarrows P$ (resp. $M \rightrightarrows N \longrightarrow P$) la suite $F(M) \longrightarrow F(N) \rightrightarrows F(P)$ (resp. $F(M) \rightrightarrows F(N) \longrightarrow F(P)$) est exacte.

De même un foncteur contravariant F est <u>exact à gauche</u> (resp. <u>à droite</u>) si pour toute suite exacte $M \rightrightarrows N \longrightarrow P$ (resp. $M \longrightarrow N \rightrightarrows P$) la suite $F(P) \longrightarrow F(N) \rightrightarrows F(M)$ (resp. $F(P) \rightrightarrows F(N) \longrightarrow F(M)$) est exacte.

(3,4) On obtient alors le théorème fondamental pour l'exactitude des foncteurs adjoints ou coadjoints :

<u>Théorème</u>. <u>Tout foncteur représentable est exact à gauche</u>.

On remarquera que l'énoncé ne précise pas si le foncteur est covariant ou contravariant.

(3,5) <u>Proposition</u>. Si un foncteur F admet un adjoint (resp. un coadjoint) il est exact à droite (resp. à gauche).

Là encore l'énoncé s'entend aussi bien pour les foncteurs covariants que pour les foncteurs contravariants.

Soit par exemple F un foncteur covariant admettant un adjoint S; si la suite $M \rightrightarrows N \longrightarrow P$ est exacte, la suite $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(P, S(X')) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(N, S(X')) \rightrightarrows \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M, S(X'))$ est exacte pour tout X' dans $\mathbb{C}'$; alors $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}'}(F(P), X') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}'}(F(N), X') \rightrightarrows \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}'}(F(M), X')$ est exacte, et par définition, $F(M) \rightrightarrows F(N) \longrightarrow F(P)$ est exacte.

4. <u>Application</u> : <u>produit tensoriel de modules sur un anneau commutatif</u>.

Etant donnés deux modules M et N sur un anneau commutatif A, on rappelle que le produit tensoriel de M et N est la solution (définie à un isomorphisme près) du problème universel :

(1)
$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[d] \arrow[dr, "f"] & \\ T \arrow[r, "\tilde{f}"'] & Y \end{tikzcd}$$

où f est une application bilinéaire quelconque de $M\times N$ dans Y, et $\tilde{f}$ sa linéarisée.

On supposera dans la suite que M est un A-module donné, et que N est quelconque. On considère alors le foncteur covariant $T : X \rightsquigarrow M\otimes X$; à toute application linéaire u de X dans X' on fait correspondre l'application linéaire $1_M\otimes u$.

On sait par ailleurs que $\mathcal{L}(M,X;Y)$ est isomorphe à $Hom(M,Hom(X,Y))$ et $Hom(X,Hom(M,Y))$. $M\otimes X$ étant solution du problème (1), $\mathcal{L}(M,X;Y)$ est isomorphe à $Hom(T(X),Y)$; soit φ_{YX} cet isomorphisme, et Θ l'isomorphisme canonique de $Hom(X,Hom(M,Y))$ sur $\mathcal{L}(M,X;Y)$; pour tout $f\in Hom(X,Hom(M,Y))$ on a $\varphi_{YX}(f) = \widetilde{\Theta_f}$, d'où dans le diagramme :

$$\begin{tikzcd} Hom(X,Hom(M,Y)) \arrow[r, "\varphi_{YX}"] \arrow[d, "{Hom(u,Hom(M,v))}"'] & Hom(T(X),Y) \arrow[d, "{Hom(T(u),v)}"] \\ Hom(X',Hom(M,Y')) \arrow[r, "\varphi_{Y'X'}"'] & Hom(T(X'),Y') \end{tikzcd}$$

on a :
$$\begin{aligned} v\circ\varphi_{YX}(f)\circ T(u)(m\otimes x') &= v\circ\widetilde{\Theta_f}\circ 1_M\otimes u(m\ x') \\ &= v\circ\widetilde{\Theta_f}(m\otimes u(x')) \\ &= v\circ f_{u(x')}(m) \\ &= \Theta_{v\circ f\circ u}(m,x') \\ &= \widetilde{\Theta_{v\circ f\circ u}}(m\otimes x') \end{aligned}$$

et par unicité $Hom(T(u),v)\circ\varphi_{YX} = \varphi_{Y'X'}\circ Hom(u,Hom(M,v))$. Ce qui montre que φ est un morphisme fonctoriel de $Hom(\ ,Hom(M,\ ))$ dans $Hom(T(\ ),\ )$.

Conséquence : $T(X) = M\otimes X$ admet un adjoint $Hom(M,Y)$, et c'est un foncteur exact à droite; autrement dit pour toute suite exacte

$$X' \xrightarrow{u} X \xrightarrow{v} X'' \longrightarrow 0$$

la suite

$$M\otimes X' \xrightarrow{1_M\otimes u} M\otimes X \xrightarrow{1_M\otimes v} M\otimes X'' \longrightarrow 0$$

est exacte. On sait par ailleurs que $T(X)$ n'est pas en **général** exact à gauche.

Appendice.

On donne ici un aperçu des techniques employées dans les démonstrations du paragraphe 2. On établit les diagrammes commutatifs suivants, qui résultent des définitions :

$$(1)\qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,S(X')) & \xrightarrow{\varphi_{X'X}} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}'}(T(X),X') \\ {\scriptstyle \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(u,S(X'))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}'}(T(u),X')} \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(Y,S(X')) & \xrightarrow[\varphi_{X'Y}]{} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}'}(T(Y),X') \end{array}$$

$$(2)\qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}'}(T(X),X') & \xrightarrow{\mathrm{Hom}(T(X),u')} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}'}(T(X),Y') \\ {\scriptstyle \mathrm{Hom}(T(u),X')}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(T(u),Y')} \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}'}(T(Y),X') & \xrightarrow[\mathrm{Hom}(T(Y),u')]{} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}'}(T(Y),Y') \end{array}$$

$$(3)\qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}'}(T(X),Y') & \xrightarrow{\mathrm{Hom}(T(u),Y')} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}'}(T(Y),Y') \\ {\scriptstyle \bar{\varphi}^{1}_{Y'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\varphi}^{1}_{Y'Y}} \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,S(Y')) & \xrightarrow[\mathrm{Hom}(u,S(Y'))]{} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(Y,S(Y')) \end{array}$$

où $u \in \mathrm{Hom}(Y,X)$, $u' \in \mathrm{Hom}(X',Y')$. Pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,S(X'))$, on a

$$\begin{aligned} \chi_Y(f.u) &= \bar{\varphi}^{1}_{Y'Y}.\mathrm{Hom}(T(Y),u')\circ\varphi_{X'Y}\circ\mathrm{Hom}(u,S(X'))(f) \\ &= \bar{\varphi}^{1}_{Y'Y}.\mathrm{Hom}(T(Y),u')\circ\mathrm{Hom}(T(u),X)\circ\varphi_{X'X}(f), \text{ d'après (1),} \\ &= \bar{\varphi}^{1}_{Y'Y}.\mathrm{Hom}(T(u),Y')\circ\mathrm{Hom}(T(X),u')\circ\varphi_{X'X}(f), \text{ d'après (2),} \end{aligned}$$

$= \mathrm{Hom}(u,S(Y')) \circ \varphi^{-1}_{Y',X} \circ \mathrm{Hom}(T(X),u') \circ \varphi_{X',X}(f)$, d'apres (3),

$= \chi_X(f).u.$

Bibliographie.

[1]. N.Bourbaki, Algèbre linéaire, 3° édition.

[2]. H.Cartan, S.Eilenberg, Homological Algebra, Princeton (1956).

[3]. D.M.Kan, Adjoint functors, Trans. Am. Math. Soc. 87 (1958) p.294-329.

[4]. A.Roux, Catégories à produits fibrés, Séminaire d'algèbre Lyon (1963-1964) expose 1 (à paraitre).

[5]. P.Gabriel, Des Catégories Abéliennes, Bull. Soc. Math. Fr. (1962)