R. PUPIER

Petit guide des catégories

Publications du Département de Mathématiques de Lyon, 1964, tome 1, fascicule 1
« Exposés sur les CATEGORIES », , exp. nº 0, p. 1-18
<http://www.numdam.org/item?id=PDML_1964__1_1_A2_0>

O. PETIT GUIDE DES CATEGORIES

par R. Pupier

Ce court exposé a pour but de fournir un "référentiel" commode à l'utilisateur débutant. A l'ordre lexicographique près, il devra se consulter comme un dictionnaire. Aucun souci de justification n'est venu alourdir l'énoncé des résultats. On trouvera l'essentiel (sic) de ces justifications, tant logiques que "démonstratives" dans les ouvrages cités en bibliographie.

I. Catégories et foncteurs.

1. CATEGORIE. On appelle CATEGORIE la donnée :

a) d'une collection (non nécessairement un ensemble) d'objets, notée $Ob(\mathbb{C})$;

b) pour chaque couple (M,N) d'objets de $Ob(\mathbb{C})$, d'un ensemble $Hom_{\mathbb{C}}(M,N)$ (ou $Hom(M,N)$ appelé ensemble des morphismes de M dans N ;

c) d'une application $\mu : Hom(M,N)\times Hom(N,P) \longrightarrow Hom(M,P)$, définie quel que soit le triplet (M,N,P), et satisfaisant aux propriétés suivantes :

(MOR $_1$) Quels que soient M,N,P,Q dans $Ob(\mathbb{C})$, $f\in Hom(M,N)$, $g\in Hom(N,P)$ et $h\in Hom(P,Q)$, $\mu(\mu(f,g),h) = \mu(f,\mu(g,h))$.

(MOR $_2$) Pour tout objet M de $\mathbb{C}$, il existe dans $Hom(M,N)$ un morphisme noté 1_M tel que $\mu(1_M,g) = g$ (resp. $\mu(f,1_M) = f$) pour tout $g\in Hom(M,X)$ (resp. pour tout $f\in Hom(X,M)$).

Notation et terminologie : pour alléger les notations, on écrira généralement $g.f$ pour $\mu(f,g)$; le morphisme

1_M, dont (MOR $_2$) assure l'existence est unique ; on le nomme <u>morphisme identique</u> de M ; l'application μ s'appelle la <u>composition des morphismes</u> ; enfin, si $f\in Hom(M,N)$, M s'appelle la <u>source</u> de f, et N le <u>but</u> de f.

2. FONCTEUR COVARIANT. Etant données deux catégories $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}'$, on appelle <u>foncteur covariant</u> de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}'$, la donnée :

a, d'une correspondance F qui à tout objet M de $\mathbb{C}$ associe un unique objet F(M) de $\mathbb{C}'$;

b) pour tout couple (M,N) d'objets de C, d'une application $F_{M,N}$ de $Hom_{\mathbb{C}}(M,N)$ dans $Hom_{\mathbb{C}'}(F(M),F(N))$, telle que, si $f\in Hom_{\mathbb{C}}(M,N)$ et $g\in Hom_{\mathbb{C}}(N,P)$, $F_{M,P}(g.f) = F_{N,P}(g).F_{M,N}(f)$, et $F_{M,M}(1_M) = 1_{F(M)}$.

<u>Notation</u> : dans la pratique on notera F(f) pour $F_{M,N}(f)$.

3. DUALITE. On appelle <u>catégorie duale</u>, notée $C°$, d'une catégorie $\mathbb{C}$ donnée, la catégorie dont les objets sont ceux de $\mathbb{C}$, et telle que $Hom_{\mathbb{C}°}(M,N) = Hom_{\mathbb{C}}(N,M)$.

4. FONCTEUR CONTRAVARIANT. On appelle <u>foncteur contravariant</u> de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}'$, un foncteur covariant de $\mathbb{C}°$ dans $\mathbb{C}'$ (ou de de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}'°$). Explicitement, la condition b) de la définition des foncteurs covariants s'écrit pour un foncteur contravariant : "pour tout couple (M,N) d'objets de $\mathbb{C}$, il existe une application $F_{M,N}$ de $Hom_{\mathbb{C}}(M,N)$ dans $Hom_{\mathbb{C}'}(F(N),F(M))$, telle que si $f\in Hom_{\mathbb{C}}(M,N)$ et $g\in Hom_{\mathbb{C}}(N,P)$, $F_{M,P}(g.f) = F_{M,N}(f).F_{N,P}(g)$".

5. MORPHISME FONCTORIEL. Soient F et G deux foncteurs (covariants) de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}'$. On appelle <u>morphisme fonctoriel</u> de F dans G, la donnée pour tout objet M de $\mathbb{C}$, d'un morphisme $\varphi_M\in Hom_{\mathbb{C}'}(F(M),G(M))$, tel que $\varphi_N.F(f) = G(f).\varphi_M$, pour tout

commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} F(M) \arrow[r, dashed, "\varphi_M"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(M) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(N) \arrow[r, "\varphi_N"'] & G(N) \end{tikzcd}$$

6. CATEGORIE PRODUIT. Etant donnée une famille $(C_\alpha)_{\alpha \in I}$ de catégories, on appelle <u>catégorie produit</u>, notée $\prod_{\alpha \in I} C_\alpha$, la catégorie dont les objets sont les familles $(M_\alpha)_{\alpha \in I}$, et telle que $\mathrm{Hom}_{\prod C_\alpha}((M_\alpha),(N_\alpha)) = \prod_{\alpha \in I} \mathrm{Hom}(M_\alpha, N_\alpha)$.

7. MULTIFONCTEUR. Etant donnée une catégorie produit $\mathbb{C} = \prod_{1 \leq i \leq p} C_i \times \prod_{1 \leq j \leq q} C_j^\circ$, on appelle multifoncteur p fois covariant et q fois contravariant un foncteur covariant de $\mathbb{C}$ dans une catégorie $\mathbb{C}'$.

8. EXEMPLES. a. <u>Catégorie</u> Ens : catégorie où les objets sont des ensembles, les morphismes étant les applications d'un ensemble dans un autre avec leur composition habituelle.

b. <u>Catégorie</u> Mod_A : catégorie où les objets sont des modules à gauche sur un anneau A avec élément unité ; les morphismes sont les applications linéaires ou homomorphismes de modules, avec la composition habituelle.

c. <u>Catégorie</u> Top : catégorie où les objets sont des espaces topologiques, les morphismes les applications continues d'un espace dans un autre.

d. <u>Catégories</u> "d'ordre" : soit I un ensemble ordonné ou préordonné ; on considère la catégorie $\mathbb{I}$, dont les objets sont les éléments de I, et si $\alpha \in I$ et $\beta \in I$, $\mathrm{Hom}(\alpha,\beta) = \{<\}$, si $\alpha < \beta$ $\mathrm{Hom}(\alpha,\beta) = \emptyset$ si $\alpha \not< \beta$; la composition des morphismes résulte de la transitivité de la relation de préordre.

e. <u>Foncteur Hom</u>$(M,\cdot)$: soit M un objet fixe d'une catégorie $\mathbb{C}$; à tout objet X de $\mathbb{C}$, on fait correspondre l'ensemble $\mathrm{Hom}(M,X)$, et à tout morphisme $f\in\mathrm{Hom}(X,Y)$, on fait correspondre l'application $\mathrm{Hom}(M,f)$ de $\mathrm{Hom}(M,X)$ dans $\mathrm{Hom}(M,Y)$ définie par $\mathrm{Hom}(M,f)(u) = f.u$; les données précédentes définissent un foncteur covariant $\mathrm{Hom}(M,\cdot)$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{E}\mathrm{ns}$.

f. <u>foncteur</u> $\mathrm{Hom}(\cdot,M)$: sous les hypothèses de e., on fait correspondre à tout objet X de $\mathbb{C}$ l'ensemble $\mathrm{Hom}(X,M)$, et à tout morphisme $f\in\mathrm{Hom}(X,Y)$, on fait correspondre l'application $\mathrm{Hom}(f,M)$ de $\mathrm{Hom}(Y,M)$ dans $\mathrm{Hom}(X,M)$ définie par $\mathrm{Hom}(f,M)(u) = u.f$; ces données définissent un foncteur contravariant $\mathrm{Hom}(\cdot,M)$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{E}\mathrm{ns}$.

g. <u>Bifoncteur</u> $\mathrm{Hom}(\cdot,\cdot)$: à tout couple (X,Y) d'objets de $\mathbb{C}$ on associe $\mathrm{Hom}(X,Y)$, et à tout couple de morphismes (f,g), où $f\in\mathrm{Hom}(X',X)$ et $g\in\mathrm{Hom}(Y,Y')$, on associe l'application $\mathrm{Hom}(f,g)$ de $\mathrm{Hom}(X,Y)$ dans $\mathrm{Hom}(X',Y')$ définie par $\mathrm{Hom}(f,g)(u) = g.u.f$, pour tout $u\in\mathrm{Hom}(X,Y)$; on obtient ainsi un bifoncteur, contravariant par rapport au premier argument, et covariant par rapport au second.

h. <u>Morphisme fonctoriel de</u> $\mathrm{Hom}(M,\cdot)$ <u>dans</u> $\mathrm{Hom}(N,\cdot)$: soient M et N deux objets de $\mathbb{C}$, u un morphisme de M dans N ; pour tout objet X de $\mathbb{C}$, $\mathrm{Hom}(u,X)$ est une application de $\mathrm{Hom}(N,X)$ dans $\mathrm{Hom}(M,X)$ qui satisfait aux relations de commutation définissant les morphismes fonctoriels.

II. <u>Morphismes, sous-objets, objets quotients.</u>

On va définir ici quelques notions deux à deux duales, pour lesquelles, en toute rigueur, il suffirait de caractériser l'une pour obtenir l'autre dans la catégorie duale. L'importance de ces notions nécessite cependant la redondance.

1. MONOMORPHISME. On dit qu'un morphisme $u \in Hom(M,N)$ est un monomorphisme, si l'application $Hom(X,u)$ de $Hom(X,M)$ dans $Hom(X;N)$ est une injection, quel que soit l'objet X de $\mathbb{C}$;i.e. l'égalité $u.f = u.g$ entraine $f = g$.

2. EPIMORPHISME. On dit qu'un morphisme $u \in Hom(M,N)$ est un épimorphisme, si l'application $Hom(u,X)$ de $Hom(N,X)$ dans $Hom(M,X)$ est une injection, quel que soit l'objet X de $\mathbb{C}$; i.e. l'égalité $f.u = g.u$ entraine $f = g$.

3. BIMORPHISME. Un morphisme qui est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme s'appelle un bimorphisme.

4. MORPHISME RETRACTABLE - RETRACTION. Soit $u \in Hom(M,N)$; on dit que u est rétractable s'il existe un morphisme $r \in Hom(N,M)$, tel que $r.u = 1_M$; r est appelé une rétraction de u ; tout morphisme rétractable est un monomorphisme.

5. MORPHISME SECTIONNABLE - SECTION. Sous les mêmes hypothèses, u est sectionnable s'il existe un morphisme $s \in Hom(N,M)$ tel que $u.s = 1_N$; s est appelé une section de u ; tout morphisme sectionnable est un épimorphisme.

6. ISOMORPHISME. Si un morphisme u est à la fois rétractable et sectionnable, r = s ; on dit que u est un isomorphisme. r est alors un isomorphisme appelé inverse de u.

7. Remarque : un monomorphisme (resp. un épimorphisme, un bimorphisme) n'est pas nécessairement rétractable (resp. sectionnable, un iso-

morphisme); on a cependant le résultat suivant : un monomorphisme sectionnable (resp. un épimorphisme rétractable) est un isomorphisme.

8. SOUS-OBJETS. Soient $u \in \mathrm{Hom}(M,N)$ et $u' \in \mathrm{Hom}(M',N)$ deux monomorphismes ; s'il existe un morphisme $v \in \mathrm{Hom}(M',M)$ tel que $u' = u.v$, on dit que u factorise u', et on écrit $u > u'$ ou $u' < u$; on définit ainsi une relation de préordre entre les monomorphismes de but N. Si la situation précédente est réalisée, v est unique et c'est un monomorphisme; de plus, s'il existe $v' \in \mathrm{Hom}(M,M')$ tel que $u = u'.v'$, alors v et v' sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. Dans ce cas, u et u' sont équivalents pour la relation d'équivalence associée à la relation de préordre : parmi les monomorphismes de but de but N équivalents à u, on en choisit un, τ_{u}, bien déterminé, qu'on appelera un sous-objet de N. On remarquera que les sous-objets d'un objet N sont ordonnés par la relation d'ordre obtenue par "passage au quotient".

9. OBJETS QUOTIENTS. Dualement, si $u \in \mathrm{Hom}(M,N)$ et $u' \in \mathrm{Hom}(M,N')$ sont des épimorphismes, on définit une relation de préordre "u factorise u' " si et seulement si il existe un morphisme $v \in \mathrm{Hom}(N,N')$ tel que $u' = v.u$; on notera encore $u > u'$ ou $u' < u$; comme précédemment v est unique et c'est un épimorphisme, et s'il existe $v' \in \mathrm{Hom}(N',N)$ tel que $u = v' \circ u'$, v et v' sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre. On appelera objet quotient de M, un épimorphisme bien déterminé

choisi parmi ceux équivalents à u.

10. SOUS-CATEGORIE PLEINE. Dans une catégorie C, on appelle <u>sous-catégorie pleine</u> de $\mathbb{C}$ une catégorie $\mathbb{D}$ dont les objets sont des objets de $\mathbb{C}$, et qui satisfait aux propriétés suivantes : (SCP 1) Si M est un objet de $\mathbb{D}$, tout objet de $\mathbb{C}$ isomorphe à M est un objet de $\mathbb{D}$.

(SCP 2) Si M et N sout deux objets de $\mathbb{D}$, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{D}}(M,N)$ est égal à $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(M,N)$.

(SCP 3) La composition des morphismes dans $\mathbb{D}$ est induite par la composition des morphismes dans $\mathbb{C}$.

11. EXEMPLES. a. <u>Catégorie</u> $\mathbb{E}$ns : les monomorphismes (resp. les épimorphismes) sont les applications injectives (resp. surjectives) ; les sous-objets correspondent aux injections canoniques d'un sous-ensemble dans un ensemble ; les objets quotients aux surjections canoniques d'un sous-ensemble sur un ensemble quotient.

b. <u>Catégorie</u> $\mathbb{T}$op : les monomorphismes sont les injections continues ; par contre les épimorphismes ne sont pas nécessairement surjectifs.

III. <u>Objets particuliers dans une catégorie</u>.

1. OBJET INITIAL. Un objet $\mathcal{A}$ d'une catégorie $\mathbb{C}$ est dit <u>initial</u>, si pour tout objet M de $\mathbb{C}$, $\mathrm{Hom}(\mathcal{A},M)$ est réduit à un unique morphisme, qu'on notera souvent η_M.

2. OBJET FINAL. In objet Ω d'une catégorie $\mathbb{C}$ est dit <u>final</u>, si pour tout objet M de $\mathbb{C}$, $\mathrm{Hom}(M,\Omega)$ est réduit à un unique morphisme, qu'on notera ε_M.

3. OBJET NUL. On appelle ainsi un objet à la fois initial et final.

On vérifie aisément que deux objets initiaux (resp. finaux, nuls) sont <u>isomorphes</u>.

On note $0_{N,M}$ ou 0 le morphisme $\eta_N . \varepsilon_M \in \mathrm{Hom}(M,N)$.

4. GENERATEUR. On appelle <u>générateur</u> dans une catégorie $\mathbb{C}$, un objet U tel que, pour tout objet M et pour tout sous-objet M' de M, la relation "$\mathrm{Hom}(U,M) = \mathrm{Hom}(U,M')$"
voir errata
entraine $M = M'$.

Plus généralement, on dit qu'une famille $(U_i)_{i\in I}$ est un système de générateurs de la catégorie $\mathbb{C}$, si pour tout objet M, et pour tout sous-objet M' de M, la relation "$\mathrm{Hom}(U_i,M) = \mathrm{Hom}(U_i,M')$ quel que soit $i\in I$" entraine $M = M'$; on peut exprimer encore cette définition en disant que pour tout sous-objet M' <u>distinct</u> de M, il existe un $i\in I$ et un morphisme $u_i \in \mathrm{Hom}(U_i,M)$, qui ne se factorise pas à travers M'.

5. COGENERATEUR. On appelle <u>cogénérateur</u>, dans une catégorie $\mathbb{C}$, un objet T tel que pour tout objet M et tout objet quotient M" de M, la relation "$\mathrm{Hom}(M,T) = \mathrm{Hom}(M'',T)$" entraine $M = M''$.

6. EXEMPLES. a. <u>Catégorie</u> $\mathbb{E}\mathrm{ns}$: l'ensemble vide est un objet initial, un ensemble réduit à un point est un objet final, il n'existe pas d'objet nul.

b. <u>Catégorie</u> $\mathbb{M}\mathrm{od}_A$: le module $\{0\}$ est un objet nul ; le A-module A_s est un générateur.

IV. <u>Produits et sommes directs</u> ; <u>produits et sommes fibrés</u>.

1. PRODUIT DIRECT. Soit $(M_i)_{i\in I}$ une famille d'objets d'une catégorie $\mathbb{C}$; on dit qu'une famille de morphismes $(p_i)_{i\in I}$, $p_i \in \mathrm{Hom}(P,M_i)$, représente P comme <u>produit direct</u> des

M_i, si pour tout objet X de $\mathbb{C}$, $u \longrightarrow (p_i.u)_{i\in I}$ est une bijection de $\mathrm{Hom}(X,P)$ sur $\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(X,M_i)$.
Pour tout morphisme $u\in\mathrm{Hom}(X,P)$, les morphismes $p_i.u$ s'appellent les <u>composantes</u> de u.

2. PRODUIT DIRECT DE MORPHISMES. Soit $(u_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(M_i,N_i)$ une famille de morphismes ; si $(p_i)_{i\in I}$ (resp. $(q_i)_{i\in I}$) représente l'objet P (resp. Q) comme produit direct de la famille $(M_i)_{i\in I}$ (resp. $(N_i)_{i\in I}$), il <u>existe un unique</u> morphisme $u\in\mathrm{Hom}(P,Q)$, tel que $q_i.u = u_i.p_i$, quel que soit $i\in I$. En particulier, si P et P' sont représentés par les morphismes $(p_i)_{i\in I}$ et $(p_i')_{i\in I}$ comme produits directs de la famille $(M_i)_{i\in I}$, P et P' sont isomorphes. On peut alors choisir (1), s'il en existe, parmi les objets représentés comme produit direct d'une famille $(M_i)_{i\in I}$, un <u>objet particulier</u>, noté $\prod_{i\in I} M_i$, qu'on appelle le <u>produit direct</u> de la famille $(M_i)_{i\in I}$. Alors à toute famille $(u_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(M_i,N_i)$, on fera correspondre l'unique morphisme $\prod_{i\in I} u_i : \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow \prod_{i\in I} N_i$, qu'on appellera <u>le produit direct</u> de la famille $(u_i)_{i\in I}$.

3. SOMME DIRECTE. C'est la notion duale de celle de produit direct. Explicitement, une famille de morphismes $(e_i)_{i\in I}$, $e_i\in\mathrm{Hom}(M_i;S)$ représente S comme <u>somme directe</u> de M_i, si pour tout objet X de $\mathbb{C}$, $u \longrightarrow (u.e_i)_{i\in I}$ est une bijection de $\mathrm{Hom}(S,X)$ sur $\prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(M_i,X)$.
Pour tout morphisme $u\in\mathrm{Hom}(S,X)$, les $u.e_i$ s'appellent les <u>composantes</u> de u.

4. SOMME DIRECTE DE MORPHISMES. On peut reproduire intégralement la section 2 précédente pour les sommes directes. Disons seulement que si deux objets sont représentés comme somme directe d'une même famille d'objets, ils sont <u>isomorphes</u>; on choisit alors l'un d'entre eux qu'on appelle la <u>somme directe</u> de la famille $(M_i)_{i\in I}$, qu'on note $\bigoplus_{i\in I} M_i$; on notera de même $\bigoplus_{i\in I} u_i$ la somme directe d'une famille de morphismes.

5. MORPHISME DIAGONAL. Si les objets d'une famille indexée par I sont tous égaux à un objet M, on notera M^I le produit direct, s'il existe, de cette famille. Il existe alors un morphisme Δ_M de M dans M^I, dont les composantes sont le morphisme 1_M, pour tout indice $i\in I$. Ce morphisme s'appelle le <u>morphisme diagonal</u>. Soient $(M_i)_{i\in I}$ une famille d'objets quelconques, et $(u_i)_{i\in I}\in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(M,M_i)$; si le produit direct $\prod_{i\in I} M_i$ existe il correspond aux u_i un unique morphisme $u\in\mathrm{Hom}(M,\prod_{i\in I} M_i)$; on peut alors écrire ce morphisme sous la forme $u = \prod_{i\in I} u_i.\Delta_M$, où $\prod_{i\in I} u_i$ est le produit des morphismes u_i.

6. MORPHISME CODIAGONAL. Sous les hypothèses précédentes, et sous les réserves habituelles d'existence, on notera $M^{(I)}$ la somme directe d'une famille où les objets sont égaux. Il existe un morphisme Σ_M de $M^{(I)}$ dans M ayant pour composantes le morphisme 1_M pour tout indice $i\in I$. Ce morphisme s'appelle <u>morphisme codiagonal</u>. Le lecteur décomposera comme il se doit le morphisme correspondant à $(u_i)_{i\in I}\in \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(M_i,M)$.

7. MORPHISMES CANONIQUES. Soit $(M_i)_{i\in I}$ une famille d'objets, $p = \prod_{i\in I} M_i$ le produit direct, qu'on suppose exister, et p_i les morphismes canoniques de P dans M_i ; le morphisme p_i s'appelle la <u>projection</u> d'indice i; on remarquera qu'en général <u>les projections ne sont pas des épimorphismes</u> ! Pour un indice i donné, p_i est <u>sectionnable</u> si et seulement si $\mathrm{Hom}(M_i,M_j) \neq \emptyset$ pour tout $j\in I$. Dualement, les morphismes canoniques e_i de M_i dans $S = \bigoplus_{i\in I} M_i$, qui restent pour l'instant anonymes, ne <u>sont pas en général des monomorphismes</u>. Pour un indice i donné, e_i est rétractable si et seulement si $\mathrm{Hom}(M_j,M_i) \neq \emptyset$, pour tout $j\in I$.

8. EXEMPLES. a. <u>Catégorie</u> $\mathbb{E}$ns : la notion de produit (resp. de somme) d'une famille d'ensemble est identique à celle de produit direct (resp. somme directe) que nous venons de définir. Si dans une famille $(M_i)_{i\in I}$ d'ensembles l'un des M_i est vide, le produit $\prod_{i\in I} M_i$ est vide, et nous donne un exemple de projections non surjectives.

b. <u>Catégorie</u> $\mathbb{M}\mathrm{od}_A$: étant donné une famille $(E_i)_{i\in I}$ de A-modules à gauche, on sait définir sur le produit $\prod_{i\in I} E_i$ des ensembles E_i une structure de A-module à gauche qui fait de ce produit un produit direct au sens ci-dessus ; soit E l'ensemble des $x\in F = \prod_{i\in I} E_i$, tels que $p_i(x) = 0$, sauf pour un nombre fini d'indices i; E est un sous-module de F qui satisfait à la définition précédente de la somme directe.

c. <u>Catégorie</u> "d'ordre" : le produit direct (resp. la somme directe) d'une famille d'éléments d'un ensemble ordonné est leur borne inférieure (resp. supérieure), si elle existe.

9. CATEGORIES A PRODUIT OU A SOMME. Si dans une catégorie $\mathbf{C}$, le produit direct (resp. la somme directe) de deux objets existe quel que soit le couple (M,N) d'objets considérés, on dit que $\mathbf{C}$ est une <u>catégorie à produit</u> (resp. <u>à somme</u>). Dans une telle catégorie, le produit direct (resp. la somme directe) existe pour toute famille finie d'objets. Si le produit direct (resp. la somme directe) existe pour toute famille $(M_i)_{i\in I}$, on dit que C est une catégorie à <u>produit</u> (resp. <u>somme</u>) <u>quelconque</u> (ou infini). Un treillis achevé définit une catégorie "d'ordre" à produit et somme quelconques. Mod_A est également une catégorie du même type.

10. PRODUIT FIBRE. Nous limiterons les définitions qui vont suivre au cas de deux morphismes d'une catégorie ; on peut cependant les étendre au cas d'une famille quelconque de morphismes. Soient f et g deux morphismes de <u>même but</u> A ; On appelle <u>produit fibré de</u> f <u>et</u> g <u>au-dessus de</u> A, un triplet (P,u,v) tel que $f.u = g.v \in \mathrm{Hom}(P,A)$, et que pour tout couple (h,k) de morphismes satisfaisant à $f.h = g.k$, il existe un unique morphisme a de but P, vérifiant $h = u.a$ et $k = v.a$. On se servira constamment du diagramme suivant (commutatif) :

$$\begin{tikzcd} & & B \arrow[dr, "f"] & \\ X \arrow[urr, "h"] \arrow[r, "a"] \arrow[drr, "k"'] & P \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "v"'] & & A \\ & & C \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Deux produits fibrés de f et g au-dessus de A sont isomorphes. S'il en existe on en choisira un (!) qu'on désignera par $f\pi_A g$, ou par abus d'écriture $B\pi_A C$.

11. SOMME FIBREE. La définition est évidemment duale de la précédente : si f et g sont deux morphismes de <u>même source</u> A, on appelle <u>somme fibrée de</u> f <u>et</u> g <u>au-dessus de A</u>, un triplet (S,u,v) tel que $u.f = v.g \in \mathrm{Hom}(A,S)$, et que pour tout couple (h,k) de morphismes satisfaisant à $h.f = k.g$, il existe un unique morphisme a de source A, vérifiant $h = a.u$ et $k = a.v$. On obtient bien entendu le diagramme dual du précédent :

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "u"] \arrow[drr, "h"] & & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & S \arrow[r, "a"] & X \\ & C \arrow[ur, "v"'] \arrow[urr, "k"'] & & \end{tikzcd}$$

Deux sommes fibrées sont encore isomorphes, et s'il en en existe on note l'une d'entre elles $f\oplus_A g$ ou $B\oplus_A C$.

12. EXEMPLE. <u>Catégorie</u> $\mathbb{E}$ns ; soient f et g deux applications de but A, B et C leurs sources respectives ; soit $\varphi = f\times g$ l'application produit de $B\times C$ dans $A\times A$; alors $\overset{-1}{\varphi}(\Delta_A)$ est un produit fibré de f et g au-dessus de A. Dualement, soient f et g deux applications de source A, B et C leurs buts respectifs ; sur $B\oplus C$, soit R la plus petite relation d'équivalence dont le graphe contienne les couples $(e_B\circ f(x), e_C\circ g(x))$ pour tout $x\in A$, alors $B\oplus C/R$ est la somme fibrée de f et g au-dessus de A.

V. Catégories additives, catégories abéliennes.

1. CATEGORIE ADDITIVE. On appelle catégorie additive une catégorie $\mathfrak{C}$ satisfaisant aux axiomes suivants :

(CA 1) Pour tout couple (M,N) d'objets de $\mathfrak{C}$, $\mathrm{Hom}(M,N)$ est un groupe abélien.

(CA 2) La composition des morphismes est bilinéaire.

(CA 3) $\mathfrak{C}$ est une catégorie "à produit".

(CA 4) Il existe un objet 0 dans C, tel que 1_0 soit l'élément neutre du groupe $\mathrm{Hom}(0,0)$.

L'objet 0 défini dans (CA 4) est un objet nul.

Une catégorie additive est une catégorie à somme : de plus pour tout couple d'objets (M,N), $M \Pi N$ est isomorphe à $M \oplus N$. Enfin si le produit direct (resp. la somme directe) d'une famille quelconque existe les morphismes p_i (resp. e_i) sont sectionnables (resp. rétractables).

On peut construire canoniquement la loi de groupe abélien sur $\mathrm{Hom}(M,N)$ dans une catégorie satisfaisant aux axiomes suivants :

(CA' 1) $\mathfrak{C}$ possède un objet nul 0.

(CA' 2) Pour tout couple d'objets (M,N), le produit direct et la somme directe existent et sont isomorphes.

(CA' 3) Il existe un morphisme $c(M)$ de M dans M tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\Delta_M"'] & M \\ M \oplus M \arrow[r, "1_M \oplus c(M)"'] & M \oplus M \arrow[u, "\Sigma_M"'] \end{tikzcd} .$$

Les groupes d'axiomes (CA 1,2,3,4) et (CA' 1,2,3) sont équivalents.

2. NOYAU, CONOYAU. Soit $f \in Hom(M,N)$; s'il existe un monomorphisme $i \in Hom(K,M)$ tel que pour tout morphisme $u \in Hom(X,M)$ les relations "$f.u = o$" et "u est factorisé par i" soient équivalentes, on dit que i est un noyau généralisé de f. Tous les noyaux généralisés de f (s'il en existe) sont équivalents au sens de la relation d'équivalence associée au préordre sur les monomorphismes de but M ; il en existe donc un seul au plus, qui soit un sous-objet de M ; on l'appelle le noyau de f et on le note Ker(f).
Dualement, s'il existe un épimorphisme $p \in Hom(N,Q)$ tel que pour tout morphisme $v \in Hom(N,X)$ les relations "$v.f = o$" et "v est factorisé par p" soient équivalentes, on dit que p est un conoyau généralisé de f ; tous les conoyau généralisés sont équivalents, et il en existe un au plus qui soit un objet quotient de N, qu'on appelle le conoyau de f et qu'on note Coker(f).

3. IMAGE, COIMAGE. Si le sous-objet Ker(Coker(f)) existe on l'appelle l'image de f, et on le note Im(f); si l'objet quotient Coker(Ker(f)) existe on l'appelle la coimage de f et on le note Coim(f).
Si Im(f) et Coim(f) existent, il existe un unique morphisme $\tilde{f}$, tel que $f = Im(f).\tilde{f}.Coim(f)$.

4. CATEGORIE ABELIENNE. Une catégorie additive est dite abélienne si elle vérifie les axiomes :
(AB 1) Le noyau et le conoyau existent pour tout morphisme f.

(AB 2) Pour tout morphisme f, le morphisme canonique $\tilde{f}$ est un isomorphisme.

Si $f \in \mathrm{Hom}(M,N)$ est un monomorphisme, M est isomorphe à Im(f) ; dualement, si f est un épimorphisme, N est isomorphe à Coim(f).

5. EXEMPLE. La catégorie $\mathbb{M}od_A$ est une catégorie abélienne. Pour un homomorphisme f du A-module M dans le A-module N, on a : $\mathrm{Ker}(f) = \overset{-1}{f}(\{0\})$, $\mathrm{Im}(f) = f(M)$, $\mathrm{Coim}(f) = M/\overset{-1}{f}(\{0\})$ et $\mathrm{Coker}(f) = N/f(M)$.

6. SUITES EXACTES. On dit qu'une suite $(u_i)_{i\in \mathbb{N}}$, de morphismes composables est exacte, si $\mathrm{Ker}(u_{i+1}) = \mathrm{Im}(u_i)$. La suite (o, Ker(f), f, Coker(f), o) est exacte, ce qu'on écrit souvent (par abus décriture) sous la forme :

$$o \to \mathrm{Ker}(f) \to M \xrightarrow[f]{} N \to \mathrm{Coker}(f) \to o \quad \text{est exacte.}$$

7. CARACTERISATION DES NOYAUX ET CONOYAUX. Soient $f \in \mathrm{Hom}(M,N)$ et $i \in \mathrm{Hom}(K,M)$ tels que la suite de groupes abéliens

$$o \to \mathrm{Hom}(X,K) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(X,i)} \mathrm{Hom}(X,M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(X,f)} \mathrm{Hom}(X,N)$$

soit exacte pour tout objet X de C ; alors i est un <u>noyau généralisé</u> de f. Dualement, si $p \in \mathrm{Hom}(N,Q)$ est tel que la suite de groupes abéliens

$$o \to \mathrm{Hom}(Q,X) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(p,X)} \mathrm{Hom}(N,X) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(f,X)} \mathrm{Hom}(M,X)$$

soit exacte pour tout objet X de $\mathbb{C}$; alors p est un conoyau généralisé de f.

Pour que la suite $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ soit exacte, il faut et il suffit que f soit isomorphe au noyau de g, et g isomorphe au conoyau de f.

INDEX

Abélienne (catégorie) V.4
Additive (catégorie) V.1
Bifoncteur I.8g
Bimorphisme II.3
But I/1
Catégorie I.1
" abélienne V.4
" additive V.1
" duale I.3
" produit I.5
" à produit IV.9
" d'ordre I.8.d
" à somme IV.9
Caractérisation des noyaux et conoyaux V.7
Codiagonal (morphisme) IV.6
Cogénérateur III.5
Coimage V.3
Compo antes IV.1,3
Composition des morphismes I.1
Conoyau V.2
Conoyau généralisé V.2
Contravariant (foncteur) I.4
Covariant (foncteur) I.2
Diagonal (morphisme) IV.5
Direct (produit) IV.1,2
Directe (somme) IV.3,4
Dualité I.3
Duale (catégorie) I.3
Epimorphisme II.2
Factorisation II. 8,9
Fibré (produit) IV.10
Fibrée (somme) IV.11
Final (objet) III.2
Foncteur
contravariant I.4
covariant I.2
Fonctoriel (morphisme) I.7
Générateur III.4
Identique (morphisme) I.1
Image V.3
Initial (objet) III.1
Isomorphisme II.6
Monomorphisme II.1
Morphisme I.1
" codiagonal IV.6
" diagonal IV.5
" fonctoriel I.7
" identique I.1
" rétractable II.4
" sectionnable II.5
Morphismes (composition) I.1
Multifoncteur I.8
Noyau V.2
Noyau généralisé V.2
Nul (objet) III.3
Objet I.1
" final III.2
" initial III.1
" nul III.3
" quotient II.9
pleine (sous-catégorie) II.10

Produit (catégorie) I.5
" direct IV.1,2
" fibré IV.10
rétractable (morphisme) II.4
rétraction II.4
Section II.5
Sectionnable (morphisme) II.5
Somme directe IV.3,4
fibrée IV.11
Source I.1
Sous-objet II.8
Sous-catégorie (pleine) II.10
Suite exacte V.6
Système de générateurs III.4

BIBLIOGRAPHIE.

1. H. Cartan and S. Eilenberg, Homological Algebra, Princeton University Press, 1956
2. D.A. Buchsbaum, Exact Categories and duality, Transactions of the Am. Math. Soc. 80 (1955) n° 1, p.1-34
3. P. Gabriel, Des Catégories abéliennes, Bill. Soc. Math. de France, 90 (1962), p.322-448.
4. A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohoku Math. Journal 9 (1957) p.119-221
5. A.G. Kurosh, A.H. Livshits, E.G. Shulgeifer, Foundations of the theory of Categories, Russian Math. Surveys, 15 (1960) p. 1-46 (Londres).