NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. VÉRONNET

Formule de l'accélération en coordonnées quelconques, équations de Lagrange, lignes géodésiques, symboles de Christoffel, tenseurs, en notation vectorielle

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 97-103

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__97_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1927, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

FORMULE DE L'ACCÉLÉRATION EN COORDONNÉES QUELCONQUES, EQUATIONS DE LAGRANGE, LIGNES GEODESIQUES, SYMBOLES DE CHRISTOFFEL, TENSEURS, EN NOTATION VECTORIELLE;

PAR A. VÉRONNET.

Considérons un point matériel mobile M, dont la position est déterminée par l'extrémité de son *rayon vecteur* $\mathbf{r}$ $(x, y, z, \ldots)$, on peut écrire

$$\mathbf{r} = x\mathbf{x} + y\mathbf{y} + z\mathbf{z} + \ldots, \tag{1}$$

où $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ sont les directions des axes (vecteurs unités). Algébriquement on considérera $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ comme des *unités* dans lesquelles sont mesurées les coordonnées ou les nombres x, y, z. Le rayon vecteur est une fonction linéaire des variables et des unités. On lui appliquera toutes les notations et les opérations algébriques.

Supposons que le point soit assujetti à certaines liaisons, ou que les coordonnées x, y, z dépendent de n paramètres quelconques x_1, x_2, $\ldots$, x_n. On peut supposer le rayon vecteur exprimé dans les nouvelles variables $\mathbf{r}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *transformation invariante*.

Si le point se déplace en M', désignons par $d\mathbf{r}$ le vecteur MM', on pourra écrire

$$d\mathbf{r} = \sum \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_2} dx_2 + \cdots \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_n} dx_n. \tag{2}$$

ou

$$d\mathbf{r} = \Sigma \mathbf{x}_i \, dx_i, \qquad \mathbf{x}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i}. \tag{2'}$$

Cette relation définit, en direction et grandeur, les nouveaux axes, ou les *nouvelles unités* $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\ldots$, $\mathbf{x}_n$. Si tous les dx_i sont nuls sauf $dx_1 = 1$ on voit que $\mathbf{x}_1$ mesure la vitesse de variation de $\mathbf{r}$ quand x_1 seul varie.

Soit t une variable indépendante, comme le temps, dont dépendent tous les x_i, en divisant l'équation (2) par dt on pourra écrire pour la vitesse $\mathbf{v}$ du point

$$(3) \qquad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \sum \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_\iota} \frac{dx_\iota}{dt} = \Sigma \mathbf{x}_\iota x'_\iota = \mathbf{x}_1 x'_1 + \mathbf{x}_2 x'_2 + \ldots.$$

On voit immédiatement sur cette formule que l'on a

$$(4) \qquad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x'_\iota} = \mathbf{x}_\iota = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_\iota}.$$

Élevons (3) au carré, on aura

$$(5) \qquad \mathbf{v}^2 = 2\mathrm{T} = \Sigma_{\iota j} \mathbf{x}_\iota \mathbf{x}_j x'_\iota x'_j;$$

d'où l'on tire, d'après (4),

$$(6) \qquad \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x'_\iota} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{v}^2}{\partial x'_\iota} = \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x'_\iota} = \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_\iota}.$$

Dérivons cette expression par rapport à t,

$$(7) \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x'_\iota} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_\iota} + \mathbf{v} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_\iota} = \mathbf{x}_\iota \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_\iota};$$

car on peut intervertir les dérivations dans le second terme, et l'on a

$$\mathbf{v} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_\iota} = \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial x_\iota} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_\iota} = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_\iota} \qquad \text{et} \qquad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$$

L'équation (7) peut alors s'écrire

$$(8) \qquad \mathbf{x}_\iota \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x'_\iota} - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_\iota}.$$

Le premier membre, produit de l'accélération par $\mathbf{x}_\iota$, est la composante de l'accélération dans cette direction, ou quand x_ι seul varie. On a autant d'équations que de variables x_ι.

Équations de Lagrange. — Multiplions l'équation (8) par m, et faisons la somme s'il s'agit d'un système. T représente alors la force vive totale et $m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}$ donne la force.

On obtient les équations de Lagrange,

$$(9) \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x'_\iota} - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_\iota} = \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_\iota} = \mathrm{X} \frac{\partial x}{\partial x_\iota} + \mathrm{Y} \frac{\partial y}{\partial x_\iota} + \ldots$$

Si la force $\mathbf{F}(X, Y, Z)$ dérive d'une fonction de force U on a

$$(10)\qquad \mathbf{F} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}, \qquad \mathbf{F}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i},$$

où la dérivée de U par rapport à $\mathbf{r}$ donne la dérivée géométrique, ou le gradient de U.

Composantes de l'accélération en coordonnées polaires. — Dans (1) remplaçons x, y, z en fonction de r, θ, φ,

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta.$$

On obtient

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \mathbf{x}\frac{\partial x}{\partial r} + \mathbf{y}\frac{\partial y}{\partial r} + \mathbf{z}\frac{\partial z}{\partial r} = \ldots = \mathbf{r}_1 = \mathbf{x}_1,$$

$$\mathbf{x}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r\mathbf{u}_1, \qquad \mathbf{x}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = r\sin\theta\,\mathbf{v}_1.$$

On vérifie que $\mathbf{x}_1$ est la direction $\mathbf{r}_1$ du rayon vecteur, que r est en facteur commun dans $\mathbf{x}_2$ et que $\mathbf{u}_1$ est une direction, vecteur unité, dont le carré est égal à 1, de même $r\sin\theta$ est en facteur dans $\mathbf{x}_3$, direction $\mathbf{v}_1$.

On obtient alors, comme $\mathbf{r}_1^2 = \mathbf{u}_1^2 = \mathbf{v}_1^2 = 1$,

$$\mathbf{v} = r'\mathbf{r}_1 + r\theta'\mathbf{u}_1 + r\sin\theta\varphi'\mathbf{v}_1,$$
$$\mathbf{v}^2 = 2T = r'^2 + r^2\theta'^2 + r^2\sin^2\theta\varphi'^2.$$

Les expressions relatives à θ seront

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = r^2\theta', \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \theta'} = 2rr'\theta' + r^2\theta'', \qquad \frac{\partial T}{\partial \theta} = r^2\sin\theta\cos\theta\varphi'^2,$$

$$a_2 = \mathbf{u}_1\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = 2r'\theta' + r\theta'' - r\sin\theta\cos\theta\,\varphi'^2;$$

où a_2 désigne la composante de l'accélération, si l'on suppose que θ seul varie, c'est-à-dire dans la direction du méridien. On obtiendra de même a_1 et a_3 dans la direction du rayon vecteur et dans la direction normale aux deux premières.

Lignes géodésiques. — La nature de l'espace autour d'un point M sera caractérisée par le système d'axes, ou d'unités, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ en ce point. Le déplacement élémentaire autour de ce point, sur une courbe ou dans l'espace, sera caractérisé par la valeur de $d\mathbf{r}$ formule (1). Or le carré d'un vecteur donne le carré de sa longueur. En désignant par ds la longueur du déplacement élémentaire $d\mathbf{r}$, caractérisé par les accroissements dx_1, dx_2, ..., on a, d'après (2)',

$$(11) \qquad ds^2 = d\mathbf{r}^2 = \Sigma \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j \, dx_i \, dx_j.$$

La variation de cette grandeur sera déterminée par

$$(12) \qquad \frac{1}{2} d(ds^2) = \frac{1}{2} d(d\mathbf{r}^2) = d^2\mathbf{r}\, d\mathbf{r} = d^2\mathbf{r}\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_1} dx_1 + \ldots\right).$$

Pour que ce déplacement soit minimum, pour un accroissement dx_i, il faut donc que l'on ait pour chaque variable x_i

$$d^2\mathbf{r}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} = d^2\mathbf{r}\,\mathbf{x}_i = 0.$$

C'est précisément l'expression (8), égalée à zéro, qui définit ainsi les lignes géodésiques d'un espace ou d'une surface.

On peut transformer cette expression en prenant les dérivées par rapport à s au lieu de t. En désignant par Φ la nouvelle valeur de T on aura

$$(13) \qquad \frac{d}{ds}\frac{\partial \Phi}{\partial x'_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0, \qquad 2\Phi = \Sigma_{ij} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j \frac{dx_i}{ds}\frac{dx_j}{ds}.$$

C'est l'expression (9) du *Traité de mécanique rationnelle* de P. Appell, t. 5, p. 42. On peut remplacer Φ par sa valeur en fonction des $\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j = g_{ij}$, qui ne sont pas autre chose que les éléments de la quadrique fondamentale. Après quelques transformations, on obtiendra l'expression (9''),

$$(14) \qquad \frac{d^2 x_k}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} r\ s \\ k \end{matrix} \right\} \frac{dx_r}{ds}\frac{dx_s}{ds} = 0.$$

Symboles de Christoffel. — La parenthèse est le symbole de Christoffel de seconde espèce dans la théorie des tenseurs. Or on peut obtenir cette expression (14) beaucoup plus directement, ainsi que la signification explicite des symboles de Christoffel.

En effet prenons la différentielle seconde du rayon vecteur $\mathbf{r}$, d'après (2) on a

(15) $$d^2\mathbf{r}=\sum\nolimits_{ij}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x_i\partial x_j}dx_i\,dx_j+\sum\nolimits_i\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x_i}d^2x_i,$$

Considérons le *système* d'axes, ou d'unités, *inverse* ou réciproque du système $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, ..., $\mathbf{x}_n$ ci-dessus, et défini par les relations

(16) $$\mathbf{x}^i=\frac{\partial x_i}{\partial\mathbf{r}},\qquad \mathbf{x}^i\mathbf{x}_i=1,\qquad \mathbf{x}^i\mathbf{x}_j=0\quad \text{si}\quad i\neq j.$$

Multiplions (15) par $\mathbf{x}^k$, on obtient, en divisant par ds^2,

(17) $$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\frac{\partial x_k}{\partial\mathbf{r}}=\frac{d^2x_k}{ds^2}+\sum\nolimits_{ij}\frac{\partial x_k}{\partial\mathbf{r}}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x_i\partial x_j}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_j}{ds}.$$

Or cette expression en $d^2\mathbf{r}$ doit être nulle pour les lignes géodésiques. On obtient l'expression (14), ce qui définit le symbole, en modifiant les indices arbitraires,

$$\left\{\begin{matrix} i\ j\\ k\end{matrix}\right\}=\frac{\partial x_k}{\partial\mathbf{r}}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x_i\partial x_j}=\mathbf{x}^k\frac{\partial\mathbf{x}_j}{\partial x_i}.$$

En multipliant au contraire la formule (15) par $\mathbf{x}_k$ et égalant à zéro, on obtient

$$\Sigma_i\mathbf{x}_k\mathbf{x}_i\frac{d^2x_i}{ds^2}+\sum\nolimits_{ij}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x_k}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x_i\partial x_j}dx_i\,dx_j=0$$

qui est la formule (9) du Traité indiqué et qui définit le symbole de première espèce de Christoffel

$$\left[\begin{matrix} i\ j\\ k\end{matrix}\right]=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x_k}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x_i\partial x_j}=\mathbf{x}_k\frac{\partial\mathbf{x}_j}{\partial x_i}.$$

On a d'ailleurs les relations

$$\frac{\partial\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j}{\partial x_k}=\mathbf{x}_i\frac{\partial\mathbf{x}_j}{\partial x_k}+\mathbf{x}_j\frac{\partial\mathbf{x}_i}{\partial x_k}=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x_i}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x_j\partial x_k}+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x_j}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x_i\partial x_k},$$
$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x_k}\frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathbf{x}_k\mathbf{x}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\mathbf{x}_k\mathbf{x}_j}{\partial x_i}-\frac{\partial\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j}{\partial x_k}\right)$$

qui définissent les symboles en fonction des *unités du second ordre* $\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j=g_{ij}$ produits de deux unités du premier ordre.

Les quantités définies par ces symboles de Christoffel ne sont pas autre chose que les composantes et projections des *dérivées*

UNIV. ★ ORG.

secondes du rayon vecteur $\mathbf{r}$, dans le système d'unités attaché au point considéré et dans le système inverse.

Le tenseur et sa dérivée. — Soit $X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction algébrique des variables attachées à un point M. Prenons sa dérivée par rapport à $\mathbf{r}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, on aura

$$(18) \qquad \frac{\partial X}{\partial \mathbf{r}} = \sum_i \frac{\partial X}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \mathbf{r}} = \Sigma_i \mathbf{x}^i \frac{\partial X}{\partial x_i} = \Sigma_i \mathbf{x}^i X_i.$$

Les $\mathbf{x}^i$ définissent le système inverse d'unités (16). La dérivée vectorielle (18) est un vecteur, ou tenseur du premier ordre. Les éléments algébriques X_i du tenseur sont covariants s'ils sont exprimés dans les unités inverses $\mathbf{x}^i$. Ils sont contravariants dans le cas contraire. On aura pour la différentielle

$$(19) \qquad dX = \frac{\partial X}{\partial \mathbf{r}}d\mathbf{r} = \sum \frac{\partial X}{\partial x_i}dx_i, \qquad d = d\mathbf{r}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \Sigma\, dx_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

expression qui montre que les $\mathbf{x}_i$ sont bien définis par les relations (16). On a la différentielle pour des coordonnées ou des unités quelconques. On aura d^2 en élevant d au carré.

Désignons par $\mathbf{X}$ le vecteur de (18), et prenons de nouveau sa dérivée, on aura

$$(20) \qquad \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{r}} = \Sigma_j \mathbf{x}^j \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_j} = \Sigma_{ij} \mathbf{x}^i \mathbf{x}^j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} + \Sigma_{ij} \mathbf{x}^j X_i \frac{\partial \mathbf{x}^i}{\partial x_j}.$$

Or les formules (16) nous donnent

$$(21) \qquad \frac{\partial \mathbf{x}^i \mathbf{x}_k}{\partial x_j} = \mathbf{x}_k \frac{\partial \mathbf{x}^i}{\partial x_j} + \mathbf{x}^i \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial x_j} = 0$$

D'où en multipliant par $\mathbf{x}^k$ et sommant, on a

$$(22) \qquad \frac{\partial \mathbf{x}^i}{\partial x_j} = -\Sigma_k \mathbf{x}^k \mathbf{x}^i \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial x_j} = -\Sigma_k \mathbf{x}^i \mathbf{x}^k \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_k \partial x_j}.$$

Le second terme de (20) devient

$$-\Sigma_{ijk} \mathbf{x}^j \mathbf{x}^k \mathbf{x}^i X_i \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_k \partial x_j} = -\Sigma_{jk} \mathbf{x}^j x^k \mathbf{X} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_k \partial x_j},$$

On peut remplacer l'indice arbitraire k par i et la dérivée vectorielle du vecteur $\mathbf{X}$, ou tenseur du premier ordre, devient, en portant dans (20),

$$(23) \qquad \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{r}} = \Sigma_{ij}\mathbf{x}^i\mathbf{x}^j\left(\frac{\partial \mathrm{X}_i}{\partial x_j} - \mathbf{X}\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial x_j}\right), \qquad \mathbf{X} = \Sigma_i \mathbf{x}^i \mathrm{X}_i.$$

C'est un tenseur du second ordre, défini par les unités du second ordre $\mathbf{x}^i\mathbf{x}^j$. Chaque parenthèse représente un élément a_{ij} du tenseur. En prenant de nouveau sa dérivée, on aura un vecteur ou tenseur du troisième ordre en $\mathbf{x}^i\mathbf{x}^j\mathbf{x}^k$, avec trois termes dans la parenthèse, et ainsi de suite. On peut écrire

$$\mathbf{X}\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial x_j} = \Sigma_k \mathbf{x}^k \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial x_j}\mathrm{X}_k = \sum\nolimits_k \frac{\partial x_k}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_k \partial x_j}\mathrm{X}_k = \left\{ \begin{matrix} i\ j \\ k \end{matrix} \right\} \mathrm{X}_k.$$

On retrouve l'expression du symbole de Christoffel, qui sert à traduire en tensoriel la dérivée covariante de Ricci. L'expression (23) est beaucoup plus claire et compréhensive, car elle conserve et met en évidence tous les éléments sur lesquels on opère. Elle se prête beaucoup mieux aux recherches théoriques.

En mécanique la connaissance de l'accélération, ou $d^2\mathbf{r}$, permet d'étudier et de définir complètement le mouvement d'un point matériel. En calcul différentiel absolu, la connaissance de $d\mathbf{r}$ et de $d^2\mathbf{r}$ ou des $\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_i \partial x_j}$, c'est-à-dire des unités du premier ordre et du second ordre, les $\mathbf{x}_i$ et les $\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j = g_{ij}$, permettra de définir la position d'un point géométrique quelconque, dans un espace ou une multiplicité quelconque, permettra de définir cet espace. Les espaces les plus simples, les espaces euclidiens, seront les espaces uniformes, où le système d'unités, ou d'axes, reste partout le même, les $\mathbf{x}_i$ ou les g_{ij} sont constants.

Dans l'espace de Riemann, et le calcul tensoriel ordinaire, on a

$$\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \mathbf{x}_j}{\partial x_i} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Dans l'espace de Cartan, ces dérivées partielles ne sont plus égales. Les symboles de Christoffel ne peuvent plus être définis de la même façon en fonction des g_{ik} et des symboles tensoriels. Ils le sont toujours de même avec les unités vectorielles $\mathbf{x}_i$.