NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

POTRON

Quelques remarques sur les équations aux dérivées partielles et les intégrales singulières des équations différentielles

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 78-82
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__78_1>

QUELQUES REMARQUES SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ET LES INTÉGRALES SINGULIÈRES DES ÉQUATIONS DIFFERENTIELLES ;

PAR L'ABBE POTRON,
Ancien élève de l'Ecole Polytechnique,
Docteur es sciences mathématiques.

1. On sait [1] que la détermination des surfaces intégrales d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre contenant une courbe donnée (C) se fait par des procédés essentiellement différents suivant que l'équation est, ou non, linéaire. Dans le premier cas, la surface demandée est le lieu des caractéristiques rencontrant (C). Dans le second cas, si l'on emploie la méthode de Lagrange, on a préalablement déterminé une intégrale complète. On cherche alors à former une famille simplement infinie de surfaces de l'intégrale complète tangentes à la courbe (C). L'enveloppe de cette famille est une surface intégrale répondant à la question.

2. On pourrait chercher à appliquer, dans le second cas, le procédé utilisé dans le premier. Si $V(x, y, z, \lambda, \mu) = 0$ représente une intégrale complète de l'équation $F(x, y, z, p, q) = 0$, les caractéristiques sont [2] représentées par

$$V(x, y, z, \lambda, \mu) = 0, \tag{1}$$

$$V'_\lambda + \mu' V'_\mu = 0, \tag{2}$$

[1] *Voir*, par exemple, mon ouvrage : *Exercices de Calcul differentiel et intégral*, t. I, IV° Partie, n° 3, p. 220, et n° 17, p. 243; Paris, Hermann, 1926. Au cours de ce travail, cet ouvrage sera simplement désigné par « *Exercices* ». Le chiffre romain qui suit ce titre désigne l'une des six Parties en lesquelles est divisé le tome I de cet ouvrage.

[2] *Exercices*, IV, 15, p. 242.

μ étant considéré comme fonction de λ.

Sur la courbe (C), on a, par exemple,

$$(3) \qquad x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t).$$

Substituant dans (1) et (2), puis éliminant t, on obtient une relation

$$(4) \qquad G(\lambda, \mu, \mu') = 0.$$

Il faut et suffit que la fonction μ de λ vérifie (4) pour que chaque caractéristique rencontre (C) en un point dont le t est solution commune des équations (1′) et (2′), déduites de (1) et (2) en y remplaçant x, y, z par leurs valeurs (3).

Mais, de la manière même dont on a formé (4), il résulte que son intégrale générale (1) est représentée par (1′) où t joue le rôle de constante arbitraire. D'ailleurs la solution commune de (1′) et (2′), compatibles en vertu de (4), est une fonction θ de λ dont la dérivée vérifie l'équation obtenue en dérivant (1′) et tenant compte de (2′), soit

$$\left(x' \frac{\partial V}{\partial x} + y' \frac{\partial V}{\partial y} + z' \frac{\partial V}{\partial z}\right)\theta' = 0.$$

On a donc, en général $\theta' = 0$. Il y a exception si la (...) est nulle, ce qui signifie que θ est racine double de (1′), donc que la surface de l'intégrale complète est tangente à la courbe (C). En dehors de ce cas d'exception, à toute solution ordinaire de l'équation (4) correspond une famille simplement infinie de caractéristiques (1)-(2) qui toutes rencontrent la courbe (C) au même point M_θ. Leur lieu $[\Sigma_\theta]$, en général, ne contient donc pas la courbe (C).

3. Mais si l'on détermine μ par l'équation

$$(5) \qquad \varphi(\lambda, \mu) = 0$$

obtenue en exprimant que (1′) a une racine double, on obtient une famille simplement infinie de surfaces (1) tangentes à la courbe (C) en ses divers points. L'enveloppe $[\Sigma]$ de ces surfaces, lieu des caractéristiques (1)-(2), contient bien la courbe (C).

---

(1) *Exercices*, III, 2, p. 168.

On peut remarquer que cette surface $[\Sigma]$ est aussi enveloppe des surfaces $[\Sigma_\theta]$ obtenues au n° **2**. En effet, au point M_θ de (C), la surface $[\Sigma_\theta]$ a pour cône de tangentes le cône $[T]$ de ce point (1). La bande caractéristique, ayant pour éléments initiaux M_θ et un plan tangent au cône $[T]$ mené par la tangente à (C), est, comme ses éléments initiaux (2), commune à $[\Sigma]$ et $[\Sigma_\theta]$.

De la manière dont on a formé l'équation (5) il résulte que, si l'on considère λ et μ comme coordonnées cartésiennes d'un point, l'équation (5) représente l'enveloppe des courbes intégrales de l'équation (4). C'est donc (3) la courbe intégrale singulière de cette équation.

4. Ces considérations pouvaient s'appliquer à la solution d'un problème posé, cette année, à Paris, pour le Certificat de Calcul différentiel et intégral (4). On demandait les développables de la congruence des tangentes à une surface $[S]$, $z=f(x,y)$, rencontrant la parabole (P), $z=2x-y^2=0$. Une des familles se compose d'enveloppes des plans tangents à $[S]$, nappe de la surface focale (5). On voit immédiatement que ce sont les cônes $[\mathcal{C}]$ circonscrits à $[S]$ ayant pour sommets les points P de (P). Il existe d'ailleurs une développable singulière $[\omega]$, enveloppe des plans $[\Pi]$ tangents à $[S]$ et (P). Cette développable $[\omega]$ touche chaque cône $(\mathcal{C})$ suivant les génératrices de contact des plans tangents qui lui sont menés par la tangente PQ à la parabole (P).

Or la famille doublement infinie des plans tangents à $[S]$ constitue une intégrale complète (6) de l'équation aux dérivées partielles obtenue en éliminant α et β entre les trois équations

$$z-f(\alpha,\beta)=(x-\alpha)\frac{\partial f}{\partial\alpha}+(y-\beta)\frac{\partial f}{\partial\beta}, \tag{6}$$

$$p=\frac{\partial f}{\partial\alpha},\qquad q=\frac{\partial f}{\partial\beta}, \tag{7}$$

(1) *Exercices*, IV, 6, p. 233, et 7, p. 234

(2) *Exercices*, IV, p. 235.

(3) *Exercices*, III, 3, p. 169.

(4) On en trouvera la solution complete dans le tome II de mes « *Exercices* », actuellement sous presse.

(5) *Exercices*, I, 25, p. 45.

(6) *Exercices*, IV, 14, p. 241.

ou entre (7) et

$$(8) \qquad z - px - qy = f(\alpha, \beta) - p\alpha - q\beta.$$

On obtient ainsi une équation de Clairault (¹)

$$(9) \qquad z - px - qy = F(p, q).$$

Les caractéristiques sont définies par (6) et

$$(10) \qquad (x-\alpha)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} + \beta'\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right) + (y-\beta)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \beta'\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2}\right) = 0,$$

β étant considéré comme fonction de α. La surface intégrale de (9) contenant la parabole (P) est précisément la développable singulière [$\mathcal{D}$]. La projection (α, β) du contact avec [S] d'un plan [Π] décrit la ligne dont l'équation s'obtient en écrivant que l'équation

$$(11) \qquad (t^2 - 2\alpha)\frac{\partial f}{\partial\alpha} + 2(t-\beta)\frac{\partial f}{\partial\beta} + 2f(\alpha, \beta) = 0$$

a une racine double, soit

$$(12) \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial\beta}\right)^2 - 2\frac{\partial f}{\partial\alpha}\left[f(\alpha, \beta) - \alpha\frac{\partial f}{\partial\alpha} - \beta\frac{\partial f}{\partial\beta}\right] = 0.$$

Pour exprimer que les caractéristiques (6)-(10) rencontrent la parabole (P), on doit éliminer t entre (11) et

$$(t^2 - 2\alpha)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} + \beta'\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}\right) + 2(t-\beta)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta} + \beta'\frac{\partial^2 f}{\partial\beta^2}\right) = 0.$$

On obtient ainsi l'équation différentielle

$$(13) \qquad G(\alpha, \beta, \beta') = 0,$$

dont (11), où t joue le rôle de constante arbitraire, représente l'intégrale générale.

Or cette équation (11), qui exprime que le plan tangent à [S] au point projeté en (α, β) passe au point P $\left(\frac{t^2}{2}, t\right)$, représente la projection (c) de la courbe de contact (C) du cône ($\mathcal{C}$) circonscrit à [S] de sommet P. Ces courbes (c) sont courbes intégrales ordinaires de l'équation (13). L'équation (12), qui exprime que le plan

(¹) *Exercices*, IV, 22, p. 246.

tangent à (S) au point projeté où (α, β) est tangent à la parabole (P), représente la projection (d) de la courbe (D) le long de laquelle la développable singulière [$\mathcal{D}$] touche [S]. La courbe (d) est bien enveloppe des courbes (c), donc courbe intégrale singulière de l'équation (13). Car si M est le contact, sur [S], d'une génératrice PM commune a [$\mathcal{D}$] et au cône [$\mathcal{C}$] de sommet P, les tangentes en M aux courbes (C) et (D) sont toutes deux conjuguées (1) de MP, donc confondues.