Solutions de questions de licence

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 52-56

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__52_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS DE LICENCE.

Question C.65.

[*Mécanique rationnelle; épreuve théorique; énoncé publié en juin* 1926. *p.* 286.]

SOLUTION

Par M. JACQUES DEVISME.

1° On considérait un cube homogène, d'arête a, et l'on demandait son mouvement en chute libre, pour des conditions initiales arbitraires.

Le centre de gravité G prendra le mouvement d'un point pesant. D'autre part, comme l'ellipsoïde d'inertie relatif au point G est une sphère $\left(\text{moments d'inertie } A = B = C = \frac{Ma^2}{6}\right)$, le mouvement du disque par rapport à des axes de direction fixe passant par G sera une rotation uniforme.

2° Un sommet O du cube étant fixé, on suppose qu'à l'instant initial une arête est verticale, le solide étant animé d'une rotation ω autour de la diagonale OO′ du cube.

L'étude du mouvement est tout à fait classique. On prendra des axes fixes $Ox_1y_1z_1$, Oz_1 vertical et des axes mobiles $Oxyz$, Oz suivant la diagonale OO′. Les équations du mouvement sont, en introduisant les angles d'Euler,

$$\varphi' + \psi'\cos\theta = \omega \qquad (3^e \text{ équation d'Euler}),$$

$$\frac{11}{2}\psi'\sin^2\theta + \omega\cos\theta = \frac{\omega}{\sqrt{3}} \qquad (\text{moment cinétique par rapport à } Oz_1),$$

$$\frac{11}{12}a(\psi'^2\sin^2\theta + \theta'^2) = g(1 - \sqrt{3}\cos\theta) \qquad (\text{théorème de la force vive}).$$

On en déduit, pour déterminer $\cos\theta = u$, l'équation différentielle

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = (1 - \sqrt{3}u)\left\{\frac{12}{11}\frac{g}{a}(1 - u^2) - \frac{4\omega^2}{363}(1 - \sqrt{3}u)\right\}.$$

La discussion est immédiate : u variera entre $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et la plus petite racine u_1 de la quantité entre crochets.

Pour que la valeur maximum de l'angle θ soit $\frac{\pi}{2}$, il faut que u_1 soit nul, c'est-à-dire

$$\omega^2 = 99\,\frac{g}{d}.$$

3° A un moment où OO′ est horizontal, on immobilise brusquement le point O′. Le nouveau mouvement sera un mouvement de rotation uniforme avec la vitesse angulaire ω, autour de l'axe fixe OO′.

Question C.75.

[*Mécanique rationnelle; épreuve théorique; énoncé publié en juillet* 1926, *p.* 320.]

SOLUTION

Par M. R. WEINZAEPFEL.

Une circonférence matérielle, de masse m et de rayon R, peut tourner sans frottement autour d'un de ses diamètres, supposé vertical. Une tige pesante de masse m' de longueur $2a (a < R)$ s'appuie par ses extrémités sur la circonférence, sur laquelle elle peut glisser sans frottement.

1° Nous rapportons le mouvement à un trièdre trirectangle $Ox_1y_1z_1$, O étant le centre de la circonférence, Oz_1 la verticale descendante. Nous désignons par φ l'angle du diamètre horizontal de la circonférence avec Ox_1, par θ l'angle de la perpendiculaire OH à la tige avec Oz_1 et posons

$$b = \mathrm{OH} = \sqrt{R^2 - a^2}.$$

La forme vive est

$$2T = \varphi'^2 \left[\frac{mR^2}{2} + \frac{m'a^2}{3}\cos^2\theta + m'b^2\sin^2\theta \right] + m'\left(\frac{a^2}{3} + b^2\right)\theta'^2$$

et la fonction des forces

$$U = m'gb\cos\theta.$$

L'équation de la force vive et l'équation de Lagrange par rapport à φ détermineront le mouvement. Cette dernière équation

$$\varphi' \left[\frac{mR^2}{2} + m'\frac{a^2}{3}\cos^2\theta + m'b^2\sin^2\theta \right] = k$$

montre que la circonférence tourne toujours dans le même sens. Le mouvement relatif de la barre est défini par

$$(1) \quad \theta'^2 = \frac{1}{m'\left(\frac{a^2}{3} + b^2\right)} \times \left[2m'gb\cos\theta + h - \frac{k^2}{\frac{mR^2}{2} + m'\left(\frac{a^2}{3}\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta\right)} \right],$$

que l'on discutera sans peine par rapport aux données initiales.

2° Dans le cas particulier où la tige a pour longueur le côté du triangle équilatéral, on a

$$a = R\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad b = \frac{R}{2}$$

et l'équation en θ' s'écrit

$$\theta'^2 = \frac{1}{m'\frac{R^2}{2}}\left[m'gR\cos\theta + h - \frac{k^2}{\frac{mR^2}{2} + m'\frac{R^2}{4}}\right]$$

ou

$$\theta'^2 = \theta_0'^2 + \frac{2g}{R}(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

équation d'un mouvement pendulaire, la longueur du pendule synchrone étant $l = R$, indépendante de m et de m'. Pour φ on a

$$\varphi' = \frac{4k}{R^2(2m + m')} = \varphi_0',$$

de sorte que la rotation de la circonférence est uniforme.

3° Revenant au cas général et désignant par $f(\theta)$ le crochet au second membre de l'équation (1), les positions d'équilibre relatif de la tige annuleront $f'(\theta)$ de sorte qu'il est bien évident, comme l'indique l'énoncé, que les positions horizontales de la tige ($\theta = 0$ ou π) sont des positions d'équilibre relatif.

Or en développant en série suivant les puissances de θ on a, φ' désignant la vitesse angulaire de la circonférence,

$$f(\theta) = \text{const.} - \theta^2 m'\left[gb - \varphi_0'^2\left(b^2 - \frac{a^2}{3}\right)\right] + \ldots$$

et, posant $\theta - \pi = \varepsilon$,

$$f(\theta) = \text{const.} + \varepsilon^2 m'\left[gb + \varphi_0'^2\left(b^2 - \frac{a^2}{3}\right)\right] + \ldots,$$

d'où résulte immédiatement que :

a. Si $a < \frac{R\sqrt{3}}{2}$, $\theta = 0$ sera stable si $\varphi_0'^2 < \frac{gb}{R^2 - \frac{4a^2}{3}}$ et $\theta = \pi$ sera nstable.

b. Si $a > \frac{R\sqrt{3}}{2}$, $\theta = 0$ sera stable et $\theta = \pi$ stable si $\varphi_0'^2 > \frac{gb}{\frac{4a^2}{3} - R^2}$.

L'équation (1) donne par dérivation

$$2m^2\left(\frac{a^2}{3} + b^2\right)\theta'' = f'(\theta)$$

et, en se bornant au terme principal du second membre il reste, pour les petites oscillations au voisinage de la position d'équilibre $\theta = 0$ (lorsque cette position est stable)

$$\theta'' = -\frac{gb - \varphi_0'^2\left(b^2 - \frac{a^2}{3}\right)}{\frac{a^2}{3} + b^2}\theta$$

dont l'intégration est élémentaire. La période est

$$2\pi\sqrt{\frac{a^2 + 3b^2}{3gb - \varphi_0'^2(3b^2 - a^2)}}.$$

De même, pour les petites oscillations autour de la position d'équilibre $\theta = \pi$, on a

$$\varepsilon'' = -\frac{\varphi_0'^2\left(\frac{a^2}{3} - b^2\right) - gb}{\frac{a^2}{3} + b^2}\varepsilon.$$

4° Une position $\theta = \theta_0$ correspond à l'équilibre relatif si $f'(\theta_0) = 0$, ou

$$gb\sin\theta_0 - \frac{k^2\left(b^2 - \frac{a^2}{3}\right)\cos\theta_0\sin\theta_0}{\left[\frac{mR^2}{2} + m'\left(\frac{a^2}{3}\cos^2\theta_0 + b^2\sin^2\theta_0\right)\right]^2} = 0,$$

ce qui peut s'écrire encore, en faisant intervenir la valeur correspondante de φ',

$$gb\sin\theta_0 - \varphi_0'^2\left(b^2 - \frac{a^2}{3}\right)\cos\theta_0\sin\theta_0 = 0,$$

d'où (θ_0 étant différent de 0 ou π)

$$\varphi_0'^2 = \frac{gb}{\left(b^2 - \frac{a^2}{3}\right)\cos\theta_0} = \frac{gb}{\left(R^2 - \frac{4a^2}{3}\right)\cos\theta_0}.$$

Si $a < \frac{R\sqrt{3}}{2}$, cela donne une valeur acceptable pour φ_0' lorsque

$$-\frac{\pi}{2} < \theta_0 < +\frac{\pi}{2};$$

si, au contraire $a > \frac{R\sqrt{3}}{2}$, il faut que $\cos\theta_0$ soit négatif : $\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \frac{3\pi}{2}$.

La discussion de la stabilité se fera de la façon suivante : en se bornant, ce qui ne restreint rien, au cas où θ est compris entre 0 et π, $f'(\theta)$ a le signe de

$$-\left(m\frac{R^2}{2} + m'b^2\right) - m'\left(\frac{a^2}{3} - b^2\right)u^2$$
$$+\frac{u}{u_0}\left[\left(m\frac{R^2}{2} + m'b^2\right) + m'\left(\frac{a^2}{3} - b^2\right)u_0^2\right]$$

(où l'on pose $\cos\theta = u$) dont la dérivée prend, pour $u = u_0$, la valeur

$$-m'\left(\frac{4a^2}{3} - R^2\right)u_0 + \frac{1}{u_0}\left(m\frac{R^2}{2} + m'b^2\right).$$

Pour $a < \frac{R\sqrt{3}}{2}$, u_0 étant positif, cette expression est positive et cela implique que $f(\theta)$ soit maximum pour $\theta = \theta_0$; la position d'équilibre correspondante est donc stable parce que, pour des conditions initiales voisines, il apparaît, de part et d'autre de θ_0, deux racines de θ_0 qui donnent les limites du mouvement en θ.

Pour $a > \frac{R\sqrt{3}}{2}$, l'équilibre peut devenir instable.

Question C.78.

[*Calcul différentiel et intégral; épreuve pratique; énoncé publié en novembre* 1926, p. 379.]

Solution

Par M. E. Lainé.

Il s'agit de calculer l'intégrale réelle

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(x-a)\sqrt[5]{x^2(1-x^2)^3}}.$$

L'énoncé du problème indique, sans doute à titre impératif, d'employer la méthode des résidus : c'est un calcul classique. La solution suivante, qui s'applique à toutes les intégrales du même type, montrera que l'emploi des intégrales eulériennes conduit au résultat d'une manière beaucoup plus rapide et beaucoup plus sûre.

Posons

$$x = a\frac{1-t}{a-t};$$

quand x croît de 0 à 1, t décroît de 1 à 0; on a alors

$$\begin{aligned} I &= a^{-\frac{2}{5}}(1-a)^{-\frac{3}{5}}\int_0^1 t^{-\frac{3}{5}}(1-t)^{-\frac{2}{5}}dt \\ &= a^{-\frac{2}{5}}(1-a)^{-\frac{3}{5}}\Gamma\frac{2}{5}\Gamma\frac{3}{5} = a^{-\frac{2}{5}}(1-a)^{-\frac{3}{5}}\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{5}}. \end{aligned}$$

Autre solution par M. R. Odile.