NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GEORGES VALIRON

Sur les courbes continues qui admettent une tangente en chaque point

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 46-51

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__46_0>

SUR LES COURBES CONTINUES QUI ADMETTENT UNE TANGENTE EN CHAQUE POINT ;

PAR GEORGES VALIRON.

Dans un Mémoire récent (1), M. Fréchet a donné une représentation paramétrique intrinsèque remarquable des courbes continues les plus générales. Cette représentation jouit d'une propriété (que l'on peut rapprocher de cette propriété des courbes rectifiables : l'arc d'une courbe rectifiable est au moins égal à la corde qui le sous-tend) d'où il résulte que, si en un point les coordonnées ont des dérivées par rapport au paramètre, la somme des carrés de ces dérivées ne peut être nulle. Ceci amène M. Fréchet à poser cette question : *une courbe continue qui admet en chaque point une tangente peut-elle être représentée paramétriquement au moyen de fonctions dérivables ?* Je me propose de répondre en partie à cette question ; il résultera en particulier de ce qui suit que la représentation intrinsèque de M. Fréchet ne fournit pas une solution générale du problème posé.

Rappelons que les représentations paramétriques dont il est question ici font correspondre de façon univoque et continue un point M (t) de la courbe à un point t d'un segment, o — 1 par exemple : les coordonnées de M sont des fonctions continues, non simultanément constantes, de t.

Si l'on considère une courbe plane possédant un point de rebroussement O dont la demi-tangente est Ox, si t_0 est la valeur du paramètre t en ce point, le quotient

$$\frac{x - x_0}{t - t_0}$$

est positif ou négatif suivant qu'on se place sur l'un ou l'autre des deux arcs déterminés par O sur la courbe (on suppose $|t - t_0|$

(1) *Sur une représentation paramétrique intrinsèque de la courbe continue la plus générale* (*Journal de Math.*, t. 4, 1925, p. 281-297). *Voir* en particulier la troisième Partie du Mémoire et surtout le n° 11.

suffisamment petit), $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$ ne peut exister que si sa valeur est o, mais alors $\left(\frac{dy}{dt}\right)_0$ existe aussi et est également nul. En un point de rebroussement une représentation paramétrique (de l'espèce indiquée) n'est dérivable que si les dérivées y sont nulles. Il en est de même d'une façon générale lorsque, O étant un point intérieur de la courbe admettant une tangente OT, une droite (un plan dans le cas de l'espace) passant par O laisse la portion de courbe voisine de O d'un seul côté.

Pour écarter ce genre de singularité, on peut, ou bien chercher une relation entre l'existence de la tangente en un point et l'existence des dérivées a droite et à gauche pour les fonctions representatives, ou bien remplacer l'hypothèse de l'existence de la tangente par celle de l'existence *d'une tangente orientée* (pour les points intérieurs). O étant un point intérieur, dire qu'il y a une tangente orientée en ce point, c'est dire que, M étant un point voisin, t_0 et t les valeurs du paramètre en O et M, le vecteur OM si $t > t_0$ et le vecteur MO si $t < t_0$ ont une direction limite unique lorsque t tend vers t_0. Il est équivalent de dire que tout plan passant par O et ne contenant pas la tangente en O coupe la courbe en O : pour $t > t_0$ et $t - t_0$ assez petit, on a des points $M(t)$ situes d'un même côté du plan et pour $t < t_0$ et $t_0 - t$ assez petit des points situés de l'autre côté du plan.

Je démontrerai ceci :

I. *Si une courbe continue possède en chaque point une tangente orientée qui varie continûment, cette courbe est rectifiable, les coordonnées d'un point en fonction de l'arc ont des dérivées continues en chaque point, dont la somme des carrés en axes rectangulaires est égale à* 1.

II. Il existe des courbes planes Γ admettant une tangente orientée en chaque point, mais qui ne varie pas continûment en un point O, et telles qu'aucune représentation n'ait ses deux coordonnées dérivables en ce point, à moins que ces deux dérivées ne soient nulles.

III. Il existe des courbes Γ admettant une tangente (non toujours orientée) en chaque point, variant d'une façon continue, et pour lesquelles la singularité précédente de la représentation a encore lieu en un point.

1. Considérons d'abord une courbe plane continue C

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad 0 \leqq t \leqq 1,$$

admettant une tangente orientée variant d'une façon continue : $f(t)$, $g(t)$, et l'angle A (t) de la demi-tangente orientée dans le sens des t croissants avec une demi-droite fixe, sont des fonctions continues de t sur le segment $0 - 1$.

Nous nous appuierons sur ce lemme : *si* P *et* P′ *sont deux points de* C, *il existe un point* Q *appartenant à l'arc* γ *ayant pour extrémités ces points en lequel la demi-tangente est parallèle à la corde* PP′. Si l'arc γ est le segment PP′, la proposition est évidente. Dans le cas contraire, Q étant l'un des points de γ dont la distance à PP′ est maximum, les points voisins de Q sont d'un même côté de la parallèle QT à PP′ menée par Q. La demi-tangente en Q est donc portée par QT, sans quoi QT, droite distincte de la demi-tangente, ne couperait pas γ au point Q ([1]).

ε étant donné, on peut entourer chaque point M(t) de C d'un arc correspondant à un intervalle $t - d(t)$, $t + d(t)$ en chaque point duquel la demi-tangente fait avec la demi-tangente en M(t) un angle inférieur à ε. D'après le théorème de Borel-Lebesgue (ou, si l'on veut, en vertu de la continuité uniforme), on peut recouvrir le segment $0 - 1$ avec un nombre fini de ces intervalles $t - d(t)$, $t + d(t)$. Considérons l'un de ces intervalles et l'arc correspondant M′MM″ (si $t = 0$ ou $t = 1$, M est une extrémité de l'arc que l'on considère). P et P′ étant deux points de cet arc, la corde PP′ qui est parallèle à la tangente en un point Q de l'arc PP′ fait avec la demi-tangente MT en M un angle moindre que ε. Si l'on inscrit dans l'arc M′MM″ une ligne polygonale π dont les sommets sont joints dans l'ordre des t croissants, chaque côté fait avec MT un angle moindre que ε, cette ligne se projette biunivoquement sur MT suivant le segment $m'm''$, projection de la corde M′M″, et par suite la longueur de π est au plus égale à

$$\frac{m'm''}{\cos\varepsilon}.$$

La longueur de tout polygone inscrit π est bornée, l'arc M′M″ est

([1]) Si P et P′ sont confondus, la corde PP′ peut être prise arbitrairement.

rectifiable [1], et il en est de même de la courbe C complète.

Soit alors s la valeur de l'arc de C compté à partir de $t = 0$ dans le sens des t croissants, s et t sont fonctions continues et croissantes l'un de l'autre. Soient $M(s_0)$ un point de C, MT la demi-tangente et MN la normale faisant avec elle l'angle $+\frac{\pi}{2}$, et $x(s)$ et $y(s)$ les coordonnées d'un point de C par rapport à ces axes. Si $s - s_0$ et $s' - s_0$ sont assez petits, l'angle du vecteur

$$M(s')\,M(s) \qquad (s' < s)$$

avec MT est encore moindre que le nombre arbitrairement petit ε. En inscrivant une ligne polygonale et passant à la limite, on a

$$\frac{1}{\cos\varepsilon} \leqq \frac{x(s)}{s - s_0} \leqq 1,$$

ce qui montre que $x'(s_0)$ existe et est égal à 1. D'autre part

$$\frac{y(s)}{s - s_0} = \frac{y(s)}{x(s)}\,\frac{x(s)}{s - s_0};$$

donc $y'(s_0)$ existe et est égal à 0. Une transformation de coordonnées immédiate montre que si l'on prend des axes fixes OXY, et si A est l'angle de la demi-tangente au point $M(s)$ avec OX, $X(s)$ et $Y(s)$ les coordonnées de ce point, $X'(s)$ et $Y'(s)$ existent pour chaque valeur de s, et l'on a

$$X'(s) = \cos A, \qquad Y'(s) = \sin A.$$

Comme A est fonction continue de t, donc de s, la proposition I est établie pour une courbe plane.

Pour une courbe gauche le lemme utilisé n'est plus valable, mais on peut s'appuyer sur cet autre lemme général : *si en tout point d'un arc* M'M *la demi-tangente existe et fait un angle moindre que* ε *avec la demi-tangente* MT *en* M, *toute corde joignant deux points de l'arc fait aussi avec* MT *un angle au plus égal à* ε. Soient PP' une corde et Σ le demi-cône de révolution engendrée par une demi-droite issue de P et faisant l'angle ε avec MT [2]. Dans le voisinage de P, l'arc PP' est intérieur à Σ. Montrons que

---

(1) Voir le *Traité d'Analyse* de JORDAN ou le *Cours d'Analyse* de M. GOURSAT, t. 1, 3e édition, note de la page 198.

(2) Il est clair que P et P' ne peuvent être confondus si $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$.

cet arc ne coupe pas Σ, ce qui démontrera le lemme. Supposons le contraire et soit P'' un point d'intersection de PP' avec Σ, l'arc PP'' ne peut être confondu avec le segment PP' ; désignons alors par Q un point de l'arc PP'' dont la distance au plan tangent τ a Σ le long de PP'' est maximum. La demi-tangente en Q devrait être parallèle au plan τ, elle ferait avec MT un angle au moins égal à ε, ce qui est contraire à l'hypothèse.

En utilisant ce lemme, on montre comme pour une courbe plane que la courbe gauche est rectifiable, et la démonstration s'achève sans difficulté.

2. L'exemple fournissant les singularités signalées dans les énoncés II et III est donné par une courbe Γ symétrique par rapport à Oy et comprise entre l'axe Ox et la parabole $y = x^2$. Définissons-la pour $x \geqq 0$.

Prenons sur la parabole la suite de points A_n d'abscisses 2^{-n} ($n = 0, 1, 2, \ldots$), et joignons A_n à A_{n+1} par un arc de courbe C_n passant par le point B_n de coordonnées

$$x'_n = 2^{-n+1}, \qquad y'_n = 2{,}5 \times 4^{-n-1}$$

Nous prendrons d'abord pour C_n un arc tel que Γ soit rectifiable et admette en chaque point une tangente orientée qui variera continûment, sauf en O. Par exemple, C_n sera formée :

1° par le demi-cercle

$$(x - 2^{-n+1} - 4^{-n-1})^2 + (y - y'_n)^2 = 4^{-2n-2}, \qquad x \geqq 2^{-n+1} - 4^{-n-1},$$

2° par deux segments tangents à ce demi-cercle, parallèles à Ox et limités respectivement aux points de contact avec le demi-cercle et aux points de contact avec deux arcs de cercles tangents à ces segments et tangents extérieurement à la parabole en A_n et A_{n+1} (ces deux cercles sont ceux qui sont extérieurs à la bande comprise entre les deux segments) ;

3° par les arcs de ces derniers cercles limités à leurs points de contact avec les segments et la parabole.

La longueur de l'arc C_n est au plus égale a $2^{-n}K$, K étant un nombre fixe, Γ est bien rectifiable et la tangente orientée n'est discontinue qu'en O. Supposons que les coordonnées x, y d'un point de la courbe soient exprimees au moyen d'un paramètre nul en O

et qui croît lorsqu'on décrit la courbe dans le sens de O vers A_0, ce qui est loisible. Lorsqu'on parcourt l'arc $B_n A_n$, t croît de t'_n à t_n et si x_n est l'abscisse de A_n, on a

$$\frac{x'_n}{t'_n} > \frac{x'_n}{t_n} = \frac{2x_n}{t_n}.$$

Donc

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$$

ne peut exister que si sa valeur est o, et si cette circonstance se présente,

$$\frac{y}{t} = \frac{y}{x}\frac{x}{t}$$

tend vers o; $\left(\frac{dy}{dt}\right)_0$ existe aussi et est nul. On est dans le cas de l'énoncé II.

On remarquera que s étant l'arc de la courbe Γ ici considérée, compté à partir de l'origine, $\frac{x}{s}$ ne tend pas vers o ; la représentation au moyen de l'arc, comme celle de M. Fréchet, présente la singularité avec non-existence des dérivées (même des dérivées à droite et à gauche) et non pas des dérivées nulles. On obtiendra la singularité avec dérivées nulles (dans la représentation au moyen de l'arc) en remplaçant C_n par un arc présentant n sinuosités au lieu d'une seule, la variation de x sur les diverses sinuosités gardant la même valeur que précédemment; on voit que l'arc existe encore, mais que sa valeur à partir de O est infiniment grande par rapport à x.

3. On peut aussi prendre pour C_n un arc tel que Γ présente en A_n et B_n des points de rebroussement avec tangente parallèle à Ox et tel que entre A_n et B_n ou entre B_n et A_{n+1}, x et y soient fonctions monotones l'un de l'autre, la pente de la tangente étant moindre que $2^{-n}K'$. Par exemple, on prendra deux arcs de cercle égaux tangents en A_n et B_n aux tangentes de rebroussement données et se raccordant au milieu du segment $A_n B_n$ et l'on procédera de même entre B_n et A_{n+1}. On aura un exemple de la singularité III. Ici encore la courbe est rectifiable et la représentation au moyen de l'arc n'a pas de dérivées à droite et à gauche à l'origine. On pourra comme ci-dessus construire des courbes pour lesquelles cette représentation donne des dérivées nulles à l'origine.