R. MARCHAY

Solution de question proposée

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 270-271

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__270_1>

SOLUTION DE QUESTION PROPOSÉE.

2505.

(1927, p. 181.)

x et y désignant deux variables réelles, établir les relations

$$\sum_1^\infty {}_n \operatorname{Log}\left(\cos^2\frac{x}{2^n}+\operatorname{sh}^2\frac{y}{2^n}\right)=\operatorname{Log}\frac{\sin^2 x+\operatorname{sh}^2 y}{x^2-y^2},$$

$$\sum_1^\infty {}_n \operatorname{Arc\,tang}\left(\operatorname{tang}\frac{x}{2^n}\operatorname{th}\frac{y}{2^n}\right)=\operatorname{Arc\,tang}\frac{y\operatorname{tang}x-x\operatorname{th}y}{x\operatorname{tang}x-y\operatorname{th}y}.$$

A. LABROUSSE.

SOLUTION

PAR M. R. MARCHAY.

La démonstration directe des relations annoncées peut s'obtenir de la façon suivante :

Envisageons d'abord la première et soit $f(x, y)$ le second membre, il vient

$$f(2x, 2y)=f(x, y)+\operatorname{Log}\frac{\sin^2 2x-\sin^2 2iy}{4(\sin^2 x-\sin^2 iy)}$$

puis

$$f(2x, 2y)=f(x, y)+\operatorname{Log}(\cos^2 x-\operatorname{sh}^2 y) \tag{1}$$

en remarquant que

$$\begin{aligned}\sin^2 2x - \sin^2 2iy &= \cos^2 2iy - \cos^2 2x\\ &= (\cos 2iy + \cos 2x)(\cos 2iy - \cos 2x)\\ &= 4(\cos^2 iy - \cos^2 x - 1)(\cos^2 iy - \cos^2 x)\\ &= 4(\cos^2 x + \mathrm{sh}^2 y)(\sin^2 x - \sin^2 iy).\end{aligned}$$

La formule (1) conduit immédiatement à

$$\mathrm{Log}\,\frac{\sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y}{x^2+y^2} = \sum_{1}^{m}{}_n \mathrm{Log}\left(\cos^2\frac{x}{2^n} + \mathrm{sh}^2\frac{y}{2^n}\right) + f\left(\frac{x}{2^m}, \frac{y}{2^m}\right);$$

si m tend vers l'infini, le dernier terme tend vers zéro et l'on obtient la formule de l'énoncé.

La seconde formule s'établit de façon analogue : en désignant par $f(x, y)$ la quantité qui figure au second membre sous le signe arc tang, on vérifie que

$$f(2x, 2y) = \frac{f(x, y) + \mathrm{tang}\,x\,\mathrm{th}\,y}{1 - (\mathrm{tang}\,x\,\mathrm{th}\,y)f(x, y)},$$

d'où

$$(2) \qquad \mathrm{arc\,tang} f(2x, 2y) = \mathrm{arc\,tang} f(x, y) + \mathrm{arc\,tang}(\mathrm{tang}\,x\,\mathrm{th}\,y),$$

les arc tang prenant la valeur zéro pour x et y nuls.

On achèvera comme dans le cas de la formule (1).

Remarque. — On arrive au résultat plus simplement en remarquant que

$$\frac{\sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad -\mathrm{arc\,tang}\,\frac{y\,\mathrm{tang}\,x - x\,\mathrm{th}\,y}{x\,\mathrm{tang}\,x + y\,\mathrm{th}\,y}$$

sont respectivement le carré du module et l'argument de $\frac{\sin z}{z}$ lorsque l'on pose $z = x + iy$.

La formule évidente

$$\frac{\sin 2z}{2z} = \frac{\sin z}{z}\cos z,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\sin z}{z} = \cos\frac{z}{2}\cos\frac{z}{4}\cdots\cos\frac{z}{2^n}\cdot\frac{\sin\frac{z}{2^n}}{\frac{z}{2^n}},$$

donne immédiatement, en passant à la limite pour n infini et prenant les logarithmes dont on égale partie réelle et coefficient de i, les deux formules annoncées.