

Solutions de questions de licence

Nouvelles annales de mathématiques 6^e série, tome 2
(1927), p. 24-26

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2_24_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1927, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS DE LICENCE.

Question C. 40.

[*Mathématiques générales, épreuve théorique; énoncé publié en janvier 1926, p. 123.*]

SOLUTION

Par M. A. MONJALLON.

Ox, Oy, Oz étant trois axes de coordonnées rectangulaires, on considère le volume V intérieur au cylindre

$$(C) \quad x^2 + y^2 - y = 0$$

limité inférieurement par le plan

$$(P) \quad z = 0$$

et supérieurement par la surface

$$(\Sigma) \quad z = \frac{y^2}{x^2 + y^2}.$$

1° La courbe d'intersection de (C) et (Σ) est une courbe plane située dans le plan

$$z = y,$$

c'est une ellipse passant par l'origine dont le grand axe est la droite $z = y$ du plan zOy et dont le centre a pour coordonnées

$$x = 0, \quad y = z = \frac{1}{2}.$$

2° Pour calculer la surface latérale S du cylindre comprise entre (P) et (Σ) passons en coordonnées semi-polaires, l'équation de (C) est alors

$$r = \sin \theta,$$

l'aire est alors

$$S = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sin^2 \theta} dz = \frac{\pi}{2}.$$

3° Calculons le volume V , nous avons

$$\begin{aligned} V &= \int \int \int_{(V)} dx dy dz = 2 \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dx \int_0^{\frac{y^2}{x^2+y^2}} dz \\ &= 2 \int_0^1 y \operatorname{arc tang} \sqrt{\frac{1}{y} - 1} dy = \frac{3\pi}{16} \quad (\text{par parties}). \end{aligned}$$

4° Le moment d'inertie de ce volume (densité 1) par rapport à Oz est fourni par l'intégrale

$$\begin{aligned} M &= \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} (x^2 + y^2) dx \int_0^{\frac{y^2}{x^2+y^2}} dz \\ &= 2 \int_0^1 y^2 \sqrt{y-y^2} dy = \frac{5\pi}{64}. \end{aligned}$$

Le rayon de giration correspondant sera

$$R = \sqrt{\frac{M}{V}} = \sqrt{\frac{5}{12}} = 0,64.$$

Question C.62.

[Calcul différentiel et intégral; épreuve pratique; énoncé publié en mai 1926, p. 253.]

SOLUTION

Par M. JACQUES DEVISME.

Il s'agissait d'évaluer l'aire de la surface

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = (x^2 - y^2)a^2.$$

Coupons cette surface (qui est une cyclide) par des plans passant par l'axe des z . Chaque intersection est formée par deux cercles égaux tangents en O à l'axe des z . Ceci nous donne l'idée de passer en coordonnées polaires. On a alors

$$\begin{aligned} x &= a \sqrt{\cos 2\varphi} \cos \varphi \cos^2 \theta, \\ y &= a \sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi \cos^2 \theta, \\ z &= a \sqrt{\cos 2\varphi} \sin \theta \cos \theta. \end{aligned}$$

On en déduit l'élément linéaire de la surface (pour $a = 1$)

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 = E d\varphi^2 + 2F d\varphi d\theta + G d\theta^2 \\ &= \frac{\cos^2 \theta}{\cos 2\varphi} [\sin^2 2\varphi + \cos^2 2\varphi \cos^2 \theta] d\varphi^2 + 2 \sin 2\varphi \sin \theta \cos \theta d\varphi d\theta + \cos 2\varphi d\theta^2; \end{aligned}$$

on en tire aisément

$$\begin{aligned} \sqrt{EG - F^2} &= \sqrt{\cos^2 \theta [\sin^2 2\varphi + \cos^2 2\varphi \cos^2 \theta] - \sin^2 2\varphi \sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\ &= \cos \theta \sqrt{\sin^2 2\varphi (1 - \sin^2 \theta) + \cos^2 2\varphi \cos^2 \theta} = \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

Nous sommes ramenés à calculer

$$\iint \cos^2 \theta d\varphi d\theta.$$

Calculons les limites. Considérons l'intersection de la surface avec le plan xOy , on obtient

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),$$

c'est une lemniscate, les tangentes à l'origine sont les bissectrices des axes. Considérons la portion de la surface comprise dans l'angle $Oxyz$. Les limites sont

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{4}, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2};$$

l'aire cherchée est donc

$$A = 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \, d\theta = 8a^2 \frac{\pi}{4} \frac{\pi}{4} = a^2 \frac{\pi^2}{2}.$$

Autres solutions de MM. R. ODILE et R. WEINZAEPFEL.