Solutions de questions de licence

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 24-26

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__24_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS DE LICENCE.

Question C.40.

[*Mathématiques générales, épreuve théorique; énoncé publié en janvier* 1926, p. 123.]

SOLUTION

Par M. A. MONJALLON.

Ox, Oy, Oz étant trois axes de coordonnées rectangulaires, on considère le volume V intérieur au cylindre

$$(C) \qquad x^2+y^2-y=0$$

limité inférieurement par le plan

$$(P) \qquad z=0$$

et supérieurement par la surface

$$(\Sigma) \qquad z=\frac{y^2}{x^2+y^2}.$$

1° La courbe d'intersection de (C) et (Σ) est une courbe plane située dans le plan

$$z=y,$$

c'est une ellipse passant par l'origine dont le grand axe est la droite $z=y$ du plan zOy et dont le centre a pour coordonnées

$$x=0, \qquad y=z=\frac{1}{2}.$$

2° Pour calculer la surface latérale S du cylindre comprise entre (P) et (Σ) passons en coordonnées semi-polaires, l'équation de (C) est alors

$$r=\sin\theta,$$

l'aire est alors

$$S=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sin^2\theta}dz=\frac{\pi}{2}.$$

3° Calculons le volume V, nous avons

$$V=\int\int\int_{(V)}dx\,dy\,dz=2\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y-y^2}}dx\int_0^{\frac{y^2}{x^2+y^2}}dz$$

$$=2\int_0^1 y\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{1}{y}-1}\,dy=\frac{3\pi}{16} \quad \text{(par parties).}$$

4° Le moment d'inertie de ce volume (densité 1) par rapport à Oz est fourni par l'intégrale

$$M = \iiint_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} (x^2+y^2)\,dx \int_0^{\frac{y^2}{x^2+y^2}} dz$$

$$= 2\int_0^1 y^2\sqrt{y-y^2}\,dy = \frac{5\pi}{64}.$$

Le rayon de giration correspondant sera

$$R = \sqrt{\frac{M}{V}} = \sqrt{\frac{5}{12}} = 0{,}64.$$

Question C.62.

[*Calcul différentiel et intégral; épreuve pratique; énoncé publié en mai* 1926, p. 253.]

Solution

Par M. Jacques Devisme.

Il s'agissait d'évaluer l'aire de la surface

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = (x^2-y^2)a^2.$$

Coupons cette surface (qui est une cyclide) par des plans passant par l'axe des z. Chaque intersection est formée par deux cercles égaux tangents en O à l'axe des z. Ceci nous donne l'idée de passer en coordonnées polaires. On a alors

$$x = a\sqrt{\cos 2\varphi}\cos\varphi\cos^2\theta,$$

$$y = a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi\cos^2\theta.$$

$$z = a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\theta\cos\theta.$$

On en déduit l'élément linéaire de la surface (pour $a = 1$)

$$ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2 = E\,d\varphi^2 + 2F\,d\varphi\,d\theta + G\,d\theta^2$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\cos 2\varphi}[\sin^2 2\varphi + \cos^2 2\varphi\cos^2\theta]\,d\varphi^2 + 2\sin 2\varphi\sin\theta\cos\theta\,d\varphi\,d\theta + \cos 2\varphi\,d\theta^2;$$

on en tire aisément

$$\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{\cos^2\theta[\sin^2 2\varphi + \cos^2 2\varphi\cos^2\theta] - \sin^2 2\varphi\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$= \cos\theta\sqrt{\sin^2 2\varphi(1-\sin^2\theta) + \cos^2 2\varphi\cos^2\theta} = \cos^2\theta.$$

Nous sommes ramenés à calculer

$$\iint \cos^2\theta\,d\varphi\,d\theta.$$

Calculons les limites. Considérons l'intersection de la surface avec le plan xOy, on obtient

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2),$$

c'est une lemniscate, les tangentes à l'origine sont les bissectrices des axes. Considérons la portion de la surface comprise dans l'angle $Oxyz$. Les limites sont

$$0<\varphi<\frac{\pi}{4}, \qquad 0<\theta<\frac{\pi}{2};$$

l'aire cherchée est donc

$$A=8a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\;d\theta=8a^2\,\frac{\pi}{4}\,\frac{\pi}{4}=a^2\,\frac{\pi^2}{2}.$$

Autres solutions de MM. R. Odile et R. Weinzaepfel.