HENRI LEBESGUE

Sur l’intersection d’un tore et d’une quadrique

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 225-231

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__225_0>

SUR L'INTERSECTION D'UN TORE ET D'UNE QUADRIQUE;

PAR HENRI LEBESGUE.

1. M. Iliovici a donné récemment (*Nouvelles Annales*, janvier 1927), une démonstration très élémentaire et très élégante de la proposition suivante :

La courbe intersection d'une sphère et d'un tore est située sur un cône du second ordre dont le sommet est sur l'axe du tore et qui admet cet axe pour droite focale, c'est-à-dire que la section du cône par un plan perpendiculaire à l'axe du tore est une conique qui admet le pied de cet axe pour foyer. Dans cet énoncé, on n'envisage pas le cercle à l'infini commun à toute sphère et à tout tore.

Je vais d'abord reprendre la démonstration du théorème de M. Iliovici pour attirer l'attention des Lecteurs des *Nouvelles Annales* sur deux remarques très simples qui fournissent la raison profonde de bien des propriétés du tore.

2. La première de ces remarques peut s'énoncer ainsi : *le tore se transforme en lui-même dans une infinité d'inversions;* on peut prendre pour centre d'une de ces inversions un point quelconque I de l'axe X'X du tore T. Cette remarque bien connue conduit naturellement, dans la question actuelle, à se demander si I ne peut pas être choisi de façon que cette inversion transforme aussi en elle-même la sphère donnée S. Cela est évidemment possible, il faut et il suffit que I soit à l'intersection I_0 de X'X avec le plan radical de S et de l'une des sphères ayant pour grand cercle un méridien de T.

Or, la courbe Λ, commune à S et T est, non compris le cercle à l'infini, du quatrième ordre; tout cône ayant pour directrice Λ et un sommet non situé sur Λ, sera donc du quatrième ordre. Mais si ce sommet est en I_0, toute génératrice du cône contient deux points de la courbe Λ, le cône sera donc double, il se réduira à un cône C du second ordre, pris deux fois. C'est la première partie du théorème de M. Iliovici.

3. La deuxième partie, qui est en réalité une propriété commune à toutes les courbes du tore, résulte de la remarque suivante : *chacun des deux plans isotropes passant par l'axe d'un tore touche ce tore suivant deux droites isotropes parallèles.*

Un plan P passant par l'axe $X'X$ du tore T le coupe suivant deux cercles méridiens; ces cercles passent par les deux points coniques A et A' du tore, situés sur $X'X$, et sont les lieux des points en lesquels P coupe les divers parallèles de T. Si l'on prend pour P le plan isotrope P_0, il ne coupe plus à distance finie aucun des parallèles de T, sauf ceux de rayon nul des points A et A'. Chacun de ceux-ci donne, dans P_0, une droite isotrope : la droite isotrope issue de A ou A'; droite bien déterminée puisque, dans le plan isotrope P_0, il n'y a qu'une direction isotrope. L'ensemble de ces deux droites isotropes parallèles constitue la position limite de l'un comme de l'autre des deux cercles méridiens que l'on trouvait dans P quand P n'était pas isotrope. La section de T par le plan isotrope P_0 est donc constituée par ces deux droites prises doubles, ce qui justifie notre remarque.

Si donc une courbe Λ du tore, rencontre en n points, situés à distance finie et différents de A et A', les deux droites du tore situées dans le plan isotrope P_0 passant par l'axe $X'X$, Λ est tangente en ces n points à P_0, sauf si ces points sont singuliers pour Λ. Et comme il en est de même pour le second plan isotrope P'_0 passant par $X'X$, tout cône, admettant Λ pour directrice et pour sommet un point I de $X'X$, admettra $X'X$ comme droite focale n^{uple}; à moins que I n'ait été choisi en l'un des points où $X'X$ rencontre les tangentes à Λ situées dans P_0 ou P'_0. La seconde partie du théorème de M. Iliovici est comprise dans ce qui précède, que l'on peut encore énoncer en disant que, sauf les exceptions indiquées, la perspective de la courbe Λ, faite sur un plan perpendiculaire à l'axe $X'X$ d'un point I de cet axe, admet le pied de l'axe pour foyer n^{uple}.

4. L'application la plus fréquente de cette remarque est relative au cas où I est pris à l'infini; on peut alors l'énoncer en disant :

le contour apparent d'un tore sur un plan perpendiculaire à son axe comprend, outre les deux cercles que l'on a l'habitude de considérer, le cercle de rayon nul, dont le centre est le pied de l'axe, pris deux fois. Utilisons, par exemple, cet énoncé pour caractériser la projection, sur un plan perpendiculaire à l'axe, d'un cercle λ du tore situé dans un plan bitangent. λ rencontre une fois et une seule chaque parallèle du tore, il rencontre donc une et une seule des droites isotropes du tore passant par A, soit δ; le cercle λ' symétrique de λ par rapport au centre O de T rencontre la droite δ' symétrique de δ par rapport à O, c'est-à-dire la parallèle à δ issue de A'; donc λ rencontre l'autre droite isotrope issue de A', celle qui n'est pas parallèle à δ. On s'explique ainsi que la projection de λ sur un plan perpendiculaire à l'axe ait, comme l'on sait, le pied de cet axe pour foyer, et seulement pour foyer simple.

5. M. Iliovici donne encore à la conclusion de son étude la forme suivante : *Pour qu'un cône ayant son sommet sur l'axe* X'X *d'un tore* T *le coupe suivant deux courbes sphériques, il faut et il suffit qu'il admette* X'X *pour focale.* Cette transformation d'énoncé se justifie de suite; on a vu que la condition était nécessaire. Elle est suffisante, car si un cône admet X'X pour focale, et si MN, PQ sont les deux génératrices de ce cône situées dans le plan principal passant par X'X, M et N étant sur l'un des cercles méridiens de ce plan et P et Q sur l'autre, les quatre points M, N, P, Q sont sur une circonférence, et la sphère dont cette circonférence est un grand cercle coupe le tore suivant une courbe située sur un cône, qui, admettant MN et PQ comme génératrices principales et X'X pour focale, est celui proposé; l'autre courbe sphérique s'obtient en associant différemment les génératrices principales et les cercles méridiens situés dans le plan principal du cône qui contient X'X.

La seconde de nos remarques nous permet de donner à la proposition de M. Iliovici la forme suivante : *Pour qu'un cône du second ordre ayant son sommet sur l'axe d'un tore coupe ce tore suivant deux courbes sphériques, il faut et il suffit qu'il soit quadruplement tangent au tore.* Le cône et le tore que nous avons considérés sont, en effet, tangents aux quatre points où les deux génératrices du cône situées dans les plans isotropes passant par $X'X$ coupent les quatre droites du tore. Cette forme d'énoncé, que je ne justifierai pas plus complètement, suggère des généralisations que nous allons examiner.

6. L'intersection d'un tore et d'une quadrique est du huitième ordre, les cas de décomposition sont donc les suivants :

Une courbe du septième ordre et une droite;

Une courbe du sixième ordre et une conique ou deux droites;

Une courbe du cinquième ordre et une cubique, ou une conique et une droite, ou trois droites;

Deux courbes du quatrième ordre, lesquelles peuvent se décomposer.

Nous connaissons les droites situées sur le tore; les coniques du tore sont les trois espèces de circonférences qu'il contient et le cercle de l'infini; quelles sont les cubiques du tore? Si Λ est une de ces cubiques, faisons passer une sphère Σ par quatre points de Λ, pris à distance finie. Cette sphère coupe Λ en ces quatre points et aux trois points à l'infini de Λ, car Λ, comme toute courbe du tore, n'a que des directions isotropes pour directions asymptotiques. Donc Σ coupe Λ en sept points, Σ contient Λ. L'intersection à distance finie de Σ et du tore contient donc, outre Λ, une droite; cette droite passant nécessairement par l'un des deux points coniques du tore donc Σ et Λ passent par l'un de ces points.

En se reportant à notre tableau de décomposition, on voit alors que les courbes du septième et du cinquième ordre sont fournies par des quadriques passant par l'un au moins des points coniques du tore, et, par suite, passent elles-mêmes par un de ces points ([1]).

Si donc nous laissons de côté les quadriques passant par les points coniques du tore, nous n'aurons plus à nous occuper que des cas de décomposition en courbes d'ordre pair; les décompositions ainsi laissées de côté sont d'ailleurs relatives au domaine imaginaire seulement puisque les courbes d'ordre impair du tore, n'ayant aucune direction asymptotique réelle, sont imaginaires.

([1]) La proposition est plus générale : toute courbe d'ordre impair tracée sur un tore passe par l'un de ses points coniques; on le voit à l'aide de l'inversion transformant le tore en un cône.

Si nous laissons aussi de côté les quadriques passant par l'un des cercles du tore, il ne restera plus à considérer que les décompositions en deux courbes du quatrième ordre. Nous serons ainsi dispensés de l'étude de tous les cas de décomposition possibles — étude d'ailleurs facile et excellente comme exercice — et nous pourrons plus rapidement généraliser le résultat de M. Iliovici.

7. Si une quadrique Q coupe un tore T suivant deux courbes du quatrième ordre Λ, Λ_1, deux cas sont possibles : ou bien une génératrice de Q rencontre Λ en deux points, elle rencontre alors Λ_1 en deux points, Λ et Λ_1 sont deux biquadratiques; ou bien une génératrice de Q rencontre l'une des deux courbes Λ et Λ_1 en trois points et l'autre en un point, Λ et Λ_1 sont deux courbes unicursales du quatrième ordre. Examinons d'abord ce cas.

Faisons la perspective (ou projection stéréographique) d'un point Ω de Q, non situé sur Λ et Λ_1, comme centre. Λ et Λ_1 se projettent suivant deux quartiques λ et λ_1 qui passent par les points d'intersection i et j du plan de projection et des génératrices de Q passant par Ω. λ aura, par exemple, i pour point triple et j pour point simple; alors λ_1 admet i pour point simple et j pour point triple. i et j comptent donc pour $2 \times 3 = 6$ points dans l'intersection de λ et λ_1; il reste 10 autres points d'intersection de λ et λ_1 qui correspondent à 10 points de rencontre de Λ et Λ_1. Quatre de ces points sont les points de rencontre de Q et du cercle à l'infini; il reste 6 points qui sont en général distincts et à distance finie. Ce sont 6 points de contact de Q et de T.

Réciproquement, si Q et T sont tangents en 6 points, la perspective de l'intersection de Q et de T est une courbe du huitième ordre admettant i et j pour points quadruples, donc comptant chacun pour 6 points doubles. En plus de ces 12 points doubles, la perspective admet 6 points doubles provenant des 6 points de contact et 4 points doubles provenant des points de rencontre de Q et du cercle de l'infini; soit au total 22 points doubles. Or, le nombre maximum des points doubles d'une courbe du huitième ordre indécomposable est 21, donc l'intersection de Q et T se décompose et en deux quartiques puisque nous avons écarté les autres cas de decomposition. Nous ne pouvons cependant pas affirmer que ces quartiques sont de la nature considérée, mais en anticipant sur les résultats du paragraphe précédent, on peut conclure :

Pour qu'une quadrique Q, *ne contenant aucun des cercles ni aucun des points coniques d'un tore* T, *le coupe suivant deux quartiques unicursales, il faut que* Q *et* T *soient tangentes en six points; si cette condition est réalisée, l'intersection de* Q *et* T *se décompose en deux quartiques qui sont unicursales; lorsque la condition indiquée au paragraphe suivant est aussi vérifiée, les quartiques sont des biquadratiques à point double.*

8. *Pour qu'une quadrique* Q *coupe un tore* T *suivant deux biquadratiques, il faut et il suffit que* Q *et* T *soient tangentes en quatre points formant un quadrilatère plan et inscriptible.* En effet, si l'intersection de Q et T se compose de deux biquadratiques Λ_1, Λ_2, on peut par Λ_1 et un point du cercle de l'infini, non situé sur Λ_1, faire passer une quadrique Σ_1, laquelle est une sphère puisqu'elle coupe le cercle à l'infini en cinq points. Ainsi, Λ_1 et Λ_2 sont tracées sur deux sphères Σ_1, Σ_2; ces sphères se coupent suivant une circonférence σ dont les quatre points de rencontre à distance finie avec T sont des points communs à Λ_1 et Λ_2, en lesquels Q et T sont tangents.

Réciproquement, si Q et T sont tangents en quatre points situés sur une circonférence σ, faisons passer une sphère Σ par σ et un point P commun à Q et T, situé à distance finie et en dehors de σ. Σ coupe l'intersection totale Λ de Q et T en les quatre points doubles de Λ situés sur σ, qui comptent chacun pour deux, en les quatre points doubles à l'infini de Λ et au point P. Cela fait 17 points, donc Σ contient une partie de Λ, et comme nous avons écarté les cas où Λ contiendrait une courbe de degré inférieur à quatre, la biquadratique commune à Q et Σ fait partie de Λ. La réciproque est démontrée.

9. On peut considérer ces propriétés sous un autre aspect : supposer donnée une biquadratique et se demander si l'on peut ou non la placer sur un tore? La réponse est immédiate : *il faut et il suffit que la biquadratique soit sphérique et ait un plan de symétrie.*

Il est clair que ces conditions sont nécessaires; si elles sont remplies, considérons l'un des cônes passant par la biquadratique Λ et qui ont leur sommet dans le plan de symétrie de Λ. Soient SAB, SCD les deux génératrices principales de ce cône Γ; A, B, C, D étant sur Λ. Soit SF une focale de Γ située dans le plan de symétrie de Λ. Considérons le tore T d'axe SF et dont les deux cercles méridiens passent respectivement par A, B et C, D; il coupe la sphère contenant Λ suivant une biquadratique, qui, d'après le premier énoncé de M. Iliovici, est précisément située sur Γ, donc se confond avec Λ.

Ainsi, par la biquadratique passent six tores; on vérifiera de suite que les deux tores dont les axes SF, SΦ sont les deux focales d'un même cône Γ ont des méridiens égaux. Une étude des relations entre ces tores et avec la biquadratique supposerait bien connue les propriétés des cyclides; le Lecteur se reportera au Mémoire de Darboux : *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques.*

10. On sait que la projection de l'intersection de deux tores dont les axes se rencontrent, faite sur le plan de ces axes, est une conique; en d'autres termes, il passe une quadrique par la partie à distance finie de l'intersection de deux tores dont les axes se rencontrent. Donc, les résultats précédents relatifs à la décomposition de l'intersection d'un tore et d'une quadrique s'étendent à la courbe d'intersection de deux tores dont les axes se coupent. On pourrait sans difficultés examiner tous les cas de décomposition de la courbe commune à deux tores; lorsque les axes se rencontrent des simplifications proviennent de l'existence du plan de symétrie de la figure.