Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 212-219

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__212_1>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE THEORIQUE. — C. 121. — *Un losange articulé* ABCD *est constitué par quatre tiges identiques, homogènes, de longueur a, de masse m.*

Les sommets opposés AC, BD *sont assujettis à se déplacer respectivement sur les glissières rectangulaires $x'Ox$, yOy'. Enfin le plan xOy est librement mobile autour de $y'Oy$ qui reste fixe et verticale.*

On prendra pour paramètre θ, demi-angle en A *du losange et φ angle du plan xOy avec un plan fixe passant par Oy. On négligera les frottements et la masse des glissières $x'Ox$, $y'Oy$.*

I. Déterminer *le mouvement du losange pour des données initiales quelconques*

II. *On suppose de plus qu'il s'exerce entre les points* B *et* D *une attraction proportionnelle à la distance* BD (*prendre cette attraction égale à* mk^2DB, *où* k *est une constante donnée*).

1° Discuter sommairement *les circonstances du mouvement. Il sera commode de faire cette discussion sur l'équation différentielle qui détermine* $\cos\theta = u$ *en fonction du temps.*

2° *Préciser la discussion précédente dans le cas particulier où, à l'instant initial,* $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\frac{d\theta}{dt} = 0$, $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ (*donnée*). *On discutera par rapport à* ω, *et l'on examinera si, dans le mouvement,* θ *prend des valeurs plus grandes ou plus petites que* $\frac{\pi}{4}$.

3° *Les données initiales restant celles de la question précédente, on suppose que le sommet* C *est au contact d'un plan horizontal fixe, placé au-dessous du losange. Évaluer la réaction au contact* (*on pourra traiter la question comme problème d'équilibre relatif*).

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un fil inextensible, homogène et pesant, est fixé par l'une de ses extrémités* A. *La portion* AB *du fil est verticale, il s'enroule ensuite suivant la section droite* BCDB *d'un cylindre fixe de révolution dont l'axe est horizontal; enfin l'extrémité* BE *du fil pend verticalement.*

On donne : p = *poids de l'unité de longueur du fil;* a = *longueur* BE; *on néglige les frottements au contact du fil et du cylindre.*

Condition de possibilité de l'équilibre :

On suppose que l'extrémité A, *au lieu d'être fixée, est tenue à la main et qu'on lui imprime un mouvement uniforme suivant la verticale. Qu'y a-t-il de changé dans les réactions du cylindre ?*

(Marseille, juin 1927.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. C. 122. — *Un triangle équilatéral* ABC *est constitué par trois tiges homogènes infiniment minces, de masse commune* m *et de longueur commune* $2a\sqrt{3}$. *Ce triangle peut tourner sans frottement autour d'un axe vertical, perpendiculaire à son plan et passant par son centre* O.

Un point P, *de masse* $2m$, *peut glisser sans frottement le long de la tige* BC. *Il est en outre attiré par* O *suivant une force égale à* k.PO, k *désignant un facteur constant.*

On place ce point P *en une position initiale quelconque* P_0, *sur* BC, *et l'on abandonne tout le système sans vitesse initiale. Déterminer le mouvement qui prend naissance.*

On établira, en particulier, les équations paramétriques cartésiennes de la trajectoire du point P, *en prenant pour origine le point* O *et pour axe des* x *la position occupée par la hauteur* AH *issue du* *sommet* A *au sommet où* P *passe au milieu de* BC. *On prendra pour paramètre l'angle* θ *de* Ox *avec* OH..

II. *Un disque circulaire homogène, infiniment plat, peut tourner sans frottement autour d'un axe fixe* Ox *perpendiculaire à son plan et passant par son centre. Il peut également glisser sans frottement le long de cet axe. Il est en outre appuyé, avec une force normale constante* N, *contre un plan* P *parallèle à* Ox. *Le coefficient de frottement entre ce plan et le disque est* f.

On lance le disque, à partir du point O, *avec une vitesse de translation* V *et une vitesse angulaire de rotation* ω. *Déterminer le mouvement qui prend naissance.*

On construira l'hodographe correspondant au vecteur vitesse de glissement du disque sur le plan P. *Puis, on calculera la durée totale du mouvement, le chemin total parcouru par le centre du disque et l'angle total dont tourne le disque autour de* Ox.

On examinera à part les cas particuliers $V = 0$, $\omega > 0$ *et* $V > 0$, $\omega = 0$.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un cylindre creux horizontal* H *a pour rayon* 4^{m}. *A l'intérieur de ce cylindre reposent deux autres cylindres pleins et homogènes,* A *et* B, *de rayons respectifs* 2^{m} *et* 1^{m} *et de masses respectives* 3 *et* 2. *Ces deux cylindres roulent sans glisser sur* H *et glissent sans frottement l'un contre l'autre. Le cylindre* H *étant supposé fixe, déterminer la position d'équilibre des cylindres* A *et* B. *Démontrer que cet équilibre est stable et calculer la durée des petites oscillations obtenues en abandonnant le système sans vitesse initiale dans une position très voisine.*

On donne $g = 9^{m},81$.

(Clermont, juin 1927.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Entre deux plans* horizontaux fixes P *ou* $x_1O_1y_1$ *et* P′ *dont la distance est* 2R *se meut* sans frottement *un corps solide pesant* S *formé d'un cylindre de révolution homogène de masse* M, *de rayon* R, *de hauteur* $2h = R\sqrt{3}$, *auquel sont fixés deux points matériels* AA′ *de même masse* $m = \frac{M}{4}$; *ces deux points sont symétriques l'un de l'autre par rapport au centre* G *du cylindre et sont situés sur les circonférences de base. Étudier le mouvement de ce solide.*

On désignera par Gx *l'axe de figure du cylindre (cet axe est horizontal), par* Gy *la perpendiculaire au plan* AGx, *et par* Gz *la perpendiculaire au plan* Gxy. *La position du corps sera déterminée par*

$$\psi = (O_1x_1, Gx), \qquad \theta = (O'_1z_1, Gz),$$

et par ξ *et* η, *coordonnées du point* G *suivant les axes fixés* O_1x_1 *et* O_1y_1.

1° *Calculer en fonction de* ξ, η, ψ, θ, *et de leurs dérivées par rapport au temps, la force vive du corps et les composantes suivant* Gx, Gy, Gz, *du moment cinétique de son mouvement autour de* G.

2° *Écrire les équations du mouvement : a, en s'aidant des équations de Lagrange; b, en n'utilisant que les théorèmes généraux,*

3° *Discuter le mouvement. Différents aspects. Montrer en particulier que, si* θ_0 *est suffisamment grand,* $\frac{d\psi}{dt}$ *change de signe au cours du mouvement, pour quelle valeur de* θ *ce changement se produit-il?*

4° *Déterminer en grandeur et position la résultante des actions de contact des plans* P *et* P′ *sur le corps à l'instant où* θ *passe par la valeur zéro.*

Distinguer le cas où le cylindre appuie sur le plan P *seul, ou sur les deux plans* PP′.

5° *Le cylindre étant dépouillé de ses deux points matériels* A *et* A′ *et se trouvant au repos entre les deux plans* PP′, *on lance ces deux points matériels avec des vitesses* V *égales et de sens opposés parallèlement à* Gx, *de telle manière que ces points matériels viennent s'incruster dans le cylindre en des points* AA′ *symétriques par rapport à* G *le long des circonférences de bases, le plan* AA′Gx *faisant* 45° ($\theta = 45°$) *avec la verticale.*

Déterminer les vitesses prises par le corps à la suite de ce choc.

Indications sur la solution. — L'ellipsoïde central d'inertie a pour équation

$$\frac{MR^2}{8}\left(8x^2+11y^2+7z^2-4\sqrt{3}\,zx\right)=1.$$

La force vive a pour expression

$$2T=\frac{3M}{2}(\xi'^2+\eta'^2)+\frac{MR^2}{8}\left[8\theta'^2+11\psi'^2\sin^2\theta+7\psi'^2\cos^2\theta-4\sqrt{3}\,\theta'\psi'\cos\theta\right].$$

Les composantes du moment cinétique en G sont

$$\gamma_x=\frac{MR^2}{8}\left[8\theta'-2\sqrt{3}\psi'\cos\theta\right],$$

$$\gamma_y=\frac{MR^2}{8}\,11\psi'\sin\theta,$$

$$\gamma_z=\frac{MR^2}{8}\left[7\psi'\cos\theta-2\sqrt{3}\theta'\right];$$

ξ' et η' sont évidemment constants; ψ et θ se déterminent soit par le théorème de la force vive et le théorème du moment cinétique appliqué à la verticale de G dans le mouvement autour de G, soit en remplaçant cette dernière équation par l'équation de Lagrange du paramètre ψ.

Les équations du mouvement sont de la forme

$$\psi'(11\sin^2\theta + 7\cos^2\theta) - 2\sqrt{3}\,\theta'\cos\theta = k,$$
$$44(2\sin^2\theta + \cos^2\theta)\theta'^2 = h^2(11\sin^2\theta + 7\cos^2\theta) - k^2.$$

h et k étant des constantes d'intégrations. $11h^2$ est nécessairement supérieur à k^2 Si $7h^2$ est inférieur à k^2, θ oscille de part et d'autre de $\frac{\pi}{2}$, si $7h^2$ est supérieur à k^2, le mouvement est révolutif.

ψ' change de signe au cours du mouvement, si θ' prend la valeur $\frac{k}{2\sqrt{3}\cos\theta}$, ce qui donne la condition

$$2k^2 = 3h^2\cos^2\theta.$$

Ce changement de signe ne se produit que dans le cas du mouvement révolutif, à condition bien entendu que $3h^2$ soit supérieur à $2k^2$.

La résultante des réactions est évidemment égale au poids du corps. L'abscisse λ du point où elle rencontre Gx s'obtient en appliquant le théorème du moment cinétique par projection sur Gy.

On obtient ainsi

$$\frac{d\gamma_y}{dt} + r\gamma_x - p\gamma_z = -\lambda\frac{3Mg}{2}\cos\theta);$$

soit, dans l'hypothèse $\theta = 0$:

$$\frac{MR^2}{8}\left[\psi'\theta' + \psi'(8\theta' - 2\sqrt{3}\psi') - \theta'(7\psi' - 2\sqrt{3}\theta')\right] = -\lambda\frac{3Mg}{2},$$

où l'on a

$$7\psi' - 2\sqrt{3}\,\theta' = k; \qquad 44\theta'^2 = 7h^2 - k^2.$$

Dans le choc mentionné dans l'énoncé, le centre de gravité reste fixe, l'état des vitesses s'obtient en écrivant la conservation du moment cinétique par rapport à Gx et par rapport à la verticale de G, de manière à éliminer les percussions de contact dues aux plans P et P′. On a donc

$$8\theta' - 2\sqrt{3}\psi'\cos\theta = 0,$$
$$\frac{MR^2}{8}\left[7\psi'\cos\theta - 2\sqrt{3}\theta'\right]\cos\theta + \frac{MR^2}{8}11\psi'\sin^2\theta = -\frac{M}{2}R\sin\theta V.$$

Épreuve pratique. — *Une sphère homogène pesante* S *de masse* M, *de rayon* R, *repose sur une sphère creuse concentrique* fixe S′ *de centre* O, *par l'intermédiaire d'une couronne de billes* Σ; *la sphère* S *a ainsi son centre fixe en* O, *elle peut prendre autour de ce point toutes les orientations.*

La couronne Σ est un anneau de révolution présentant des cavités contenant des billes (par exemple trois billes au sommet d'un triangle équilatéral). Le frottement sera négligé au contact de la couronne et des billes, *mais non pas bien entendu au contact des billes et des sphères* S *et* S′, *où l'on supposera* nulle la vitesse de glissement.

La masse des billes sera négligée. *La masse de la couronne Σ sera désignée par m, la distance de son centre de gravité au point* O *sera désignée par l; a, a_1, c désignant les moments principaux d'inertie de la couronne au point* O.

1° Le diamètre des billes étant négligé vis-à-vis de R, *montrer sans calculs que dans tout mouvement où les billes roulent sans glisser sur* S *et* S′, *la rotation instantanée de la couronne a la même direction que la rotation instantanée de la sphère* S *et en vaut la moitié.*

2° *Montrer sans calculs, que les forces de frottement aux deux points* P *et* P′ *où une bille touche* S *et* S′ *sont égales et parallèles.*

3° *Cela posé, on définira la position de la couronne par les angles d'Euler classiques* ω, θ, φ, θ *désignant l'angle de la verticale avec la perpendiculaire* Oz *abaissée du point* O *sur le plan de la couronne et l'on déterminera les composantes du moment cinétique de la sphère* S *et de la couronne Σ au point* O, *composantes prises suivant* Ox *horizontale, perpendiculaire au plan vertical contenant* Oz; *suivant* Oy *perpendiculaire au plan* zOx; *et suivant* Oz.

On exprimera le théorème du moment cinétique pour la sphère, puis pour la couronne, en utilisant : 1° *la verticale de* O; 2° *l'axe* Oz *comme axes de projection. On désignera par* $\mathcal{L}$ $\mathcal{M}$ $\mathcal{N}$ *les moments par rapport à* Ox, Oy, Oz *des réactions de* S *sur l'ensemble des trois billes. Ces moments sont aussi ceux des réactions de* S′ *d'après* 2°. *On exprimera également le théorème de la force vive.*

Des équations ainsi écrites, on déduira que le mouvement de la couronne est identique à celui d'une toupie pesante dont on indiquera les caractéristiques.

Dire si l'emploi des équations de Lagrange se justifie ici?

4° *Le mouvement peut avoir lieu avec θ constant; dans cette hypothèse, sachant que la rotation propre φ' de la couronne est de* 100 *tours par seconde, que* $\theta = \frac{\pi}{6}$, *que* M $= 500^{g}$; *que* R $= 5^{cm}$, $l = 3^{cm}$, $m = 5^{g}$, *que a et c sont égaux entre eux et définis par un même rayon de giration valant* 4^{cm}, *calculer la vitesse angulaire ψ' du plan vertical contenant* Oz; *indiquer les moments par rapport à* Ox, Oy, Oz *des réactions exercées par les billes sur la sphère* S, *et indiquer quel est le diamètre de la sphère* S *qui décrit un cône de révolution autour de la verticale.*

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — 1° Le point P d'une bille a la même vitesse que le point P de la sphère S, puisqu'il n'y a pas glissement. Or la vitesse du centre de la bille est la moitié de la précédente. Il existe donc trois points de Σ (les centres des trois billes) dont les vitesses s'obtiennent en réduisant dans le rapport $\frac{1}{2}$ les vitesses des points de S immédiatement voisins.

La rotation instantanée de la couronne s'obtient donc en réduisant dans le rapport $\frac{1}{2}$ la rotation instantanée de S.

2° La bille considérée étant sans masse, les réactions en P et P' doivent avoir un moment résultant nul au centre de la bille, d'où la propriété.

3° Le théorème du moment cinétique en projetant sur la verticale de O s'écrit

$$\text{(sphère)} \quad 2\frac{MR^2}{5}\frac{d}{dt}(2\psi' + 2\varphi'\cos\theta) = -(\mathfrak{M}\sin\theta + \mathfrak{N}\cos\theta),$$

$$\text{(couronne)} \quad \frac{d}{dt}[a\psi'\sin^2\theta + c(\varphi' + \psi'\cos\theta)\cos\theta] = 2\mathfrak{M}\sin\theta + 2\mathfrak{N}\cos\theta.$$

En projetant sur Oz, on obtient

$$\text{(sphère)} \qquad 2\frac{MR^2}{5}\frac{d}{dt}(2\varphi' + 2\psi'\cos\theta) = -\mathfrak{N},$$

$$\text{(couronne)} \qquad c\frac{d}{dt}(\varphi' + \psi'\cos\theta) = 2\mathfrak{N}.$$

De ces équations, on déduit, par élimination de $\mathfrak{M}$ et de $\mathfrak{N}$,

$$\left(a + \frac{8MR^2}{5}\right)\psi'\sin^2\theta + \left(c + \frac{8MR^2}{5}\right)(\varphi' + \psi'\cos\theta)\cos\theta = \text{const.},$$

$$\varphi' + \varphi'\cos\theta = \text{const.}$$

Le théorème de la force vive au système entier donne

$$\frac{8MR^2}{5}[\theta'^2 + \psi'^2\sin^2\theta + (\varphi' + \psi'\cos\theta)^2] + a(\theta'^2 + \psi'^2\sin^2\theta) + c(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2$$
$$= 2mgl\cos\theta + h.$$

Ces équations sont celles du mouvement d'une toupie pesante dont les moments principaux d'inertie seraient $a + \frac{8MR^2}{5}$ et $c + \frac{8MR^2}{5}$, le moment de la pesanteur étant mgl.

L'emploi des équations de Lagrange ne se justifie pas, car les liaisons ne sont pas holonomes. L'établissement de ces équations suppose en effet la possibilité de calculer, avant toute étude du mouvement, les coordonnées de chaque élément de matière en fonction des paramètres choisis φ, θ, ψ; il n'en est pas ainsi pour les éléments matériels de la sphère. Cependant les équations de Lagrange qu'on écrivait avec l'expression ci-dessus de la force vive sont exactes, mais le raisonnement par lequel on les établit ne les justifie pas. Elles se justifient cependant indirectement puisqu'on est ramené au mouvement d'une toupie pesante.

4° L'équation de Lagrange relative au paramètre θ donne la condition de mouvement stationnaire ($\theta =$ const.) :

$$\psi' = - \frac{mgl}{\left(c + \frac{8\,\mathrm{MR}^2}{5}\right)\varphi'}$$

soit, avec les chiffres donnés, $\frac{1}{5300}$ tour par seconde.