NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 208-212

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__208_1>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. C. 115. — 1° *Soient une courbe plane* C, P *la projection orthogonale d'un point donné* O *du plan sur la tangente au point courant* M. *Déterminer les courbes* C *telles que l'on ait* $\overline{\mathrm{OM}}^2 = a.\mathrm{OP}$, *a étant une longueur donnée.*

2° *Soient une surface* S, P *la projection orthogonale d'un point donné* O *sur le plan tangent au point courant* M. *Former l'équation aux dérivées partielles qui caractérise les surfaces* S *telles que l'on ait* $\overline{\mathrm{OM}}^2 = a.\mathrm{OP}$, *a longueur donnée.*

3° *Montrer géométriquement qu'il existe une intégrale complète formée de sphères. La déterminer ainsi que l'intégrale singulière.*

A défaut de cette solution géométrique, déterminer analytiquement une intégrale complète soit en employant les coordonnées polaires de l'espace, soit en effectuant une inversion de pôle O.

4° *Indiquer la nature géométrique des caractéristiques et montrer que ce sont des lignes de courbure des surfaces intégrales. Donner une définition géométrique simple de l'autre famille de lignes de courbure.*

II. C. 116. — 1° *On considère les intégrales*

$$\mathrm{F}(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1}\, dt, \qquad \mathrm{G}(z) = \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt,$$

où t est réel et positif et $z = x + iy$ *complexe. Dans quelles conditions ont-elles un sens ?*

2° *Montrer que* F(z) *est holomorphe dans tout domaine borné dans* *lequel x est positif et que, dans ces conditions,*

$$\text{(1)} \qquad F(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \ldots.$$

Établir que la série du second membre de (1) *converge uniformément dans tout domaine borné ne contenant pas les points* $0, -1, -2, \ldots$. *En déduire que* $F(z)$ *est prolongeable analytiquement dans tout le plan et est méromorphe.*

3° *On pose*

$$G_m(z) = \int_1^m e^{-t} t^{z-1}\, dt \qquad (m \text{ entier positif}).$$

Montrer que $G_m(z)$ *est holomorphe dans tout domaine borné. En déduire que* $G(z)$ *est une fonction holomorphe en tout point à distance finie.*

4° *Montrer que, pour* $y = 0$ *et* $x > 0$,

$$\frac{1}{x(x+1)} < F(x) < \frac{1}{x}$$

et que, quel que soit z,

$$|G(z)| < \Gamma(|z|+1),$$

$\Gamma(u)$ *étant la fonction eulérienne. En déduire que* $G(z)$ *est de genre* 1 *et est décomposable en facteurs sous la forme*

$$G(z) = A e^{bz} \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}},$$

la série $\sum \frac{1}{|a_n|}$ *étant divergente.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Les axes* $Oxyz$ *sont rectangulaires. Une droite* MP *se déplace de telle façon que le point* M *décrive le cercle* $z = 0$, $x^2 + y^2 = a^2$, *que le point* P *décrive le cercle* $y = 0$, $x^2 + z^2 = b^2$ *et que les angles de* OM *et* OP *avec* Ox *soient égaux (ces angles sont comptés dans le sens de* Ox *vers* Oy *et dans le sens de* Ox *vers* Oz *respectivement). On appellera* θ *l'angle* (Ox, OM). *Soit* S *la surface engendrée par la droite* MP.

1° *Calculer le volume compris entre la surface* S *et les plans de coordonnées dans la portion de l'espace où* $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. *Quel est le maximum de ce volume lorsque* a *et* b *varient de telle façon que* $a^2 + b^2 = R^2$, R *étant donné ?*

2° *Trouver les lignes asymptotiques de la surface* S. *On donnera notamment l'équation cartésienne de leurs projections sur le plan* yOz

Nota. — *Dans la première question on pourra, par exemple, remar-*

quer qu'un point du volume considéré a pour coordonnées

$$x = u[a + v(a - b)]\cos\theta,$$
$$y = ua(1 + v)\sin\theta,$$
$$z = -uvb\sin\theta,$$

u et v étant deux paramètres variant entre certaines limites et θ *variant de* 0 *à* $\frac{\pi}{2}$. (Strasbourg, juin 1927.)

Épreuve théorique. — I. C. 117. — *Soit l'équation différentielle*

$$(1)\qquad \frac{d\mu}{d\lambda} = \frac{4K^2\lambda\mu}{(\lambda^2+\mu^2+1-K^2)(\lambda^2+\mu^2+1+K^2)},$$

où λ, μ *sont deux coordonnées rectangulaires dans le plan* $O\lambda\mu$, K *une constante réelle positive. On pose*

$$(2)\qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{2K\mu}{\lambda^2+\mu^2+1-K^2}.$$

Vérifier que l'équation (1) *est équivalente à*

$$(3)\qquad d\varphi + \frac{d\mu}{K} = 0.$$

II. *On suppose la fonction* φ *des deux variables indépendantes* λ, μ *définie par la formule* (2).

a. Pour $K = 1$, *donner l'interprétation géométrique de* $\operatorname{tang}\varphi$, *point critique, quand* (λ, μ) *tourne autour de l'origine et revient au point de départ quel changement subit* φ.

b. Pour $0 < K < 1$, *la fonction* $\varphi(\lambda, \mu)$ *est uniforme.*

c. Pour $1 < K$, *la fonction* φ *admet les points critiques* $\left(\sqrt{K^2-1}, 0\right)$ *et* $\left(-\sqrt{K^2-1}, 0\right)$. *On suppose que* (λ, μ) *suive une courbe continue partant de l'origine et allant en un point* M *donné; la valeur initiale de* φ *est prise égale à* 0; *classer les déterminations de* φ *à l'arrivée en* M; *influence d'une circulation autour d'un point critique.*

III. *L'expression*

$$dU = 2K\left[\frac{(\lambda^2-\mu^2+1-K^2)\,d\mu - 2\lambda\mu\,d\lambda}{(\lambda^2+\mu^2+1-K^2)^2+4K^2\mu^2}\right]$$

est une différentielle totale exacte; calculer la valeur de l'intégrale $\int dU$ *prise le long d'un circuit fermé de dimensions suffisamment petites entourant l'un des points* $\left(\sqrt{K^1-1}, 0\right)$ *ou* $\left(-\sqrt{K^2-1}, 0\right)$ *en supposant* $K > 1$.

IV. *En changeant* λ *en* μ, μ *en* λ, K *en* iK, *montrer que l'intégrale générale de*

$$(4) \qquad \frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{-4K^2\lambda\mu}{(\lambda^2+\mu^2+1-K^2)(\lambda^2+\mu^2+1+K^2)}$$

est donnée par

$$\frac{1}{2}\log\frac{\lambda^2+\mu^2+2K\lambda+1+K^2}{\lambda^2+\mu^2-2K\lambda+1+K^2}-\frac{\lambda}{K}=\text{const.}$$

V. *Par un point du plan passe une intégrale de* (1), *une de* (4) : *elles sont orthogonales.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — C. 118. — 1° *Soit l'équation différentielle*

$$xy'-y=\frac{y^2-x^2}{ax^2+2bx+c},$$

où a, b, c *désignent des constantes réelles.*

Montrer qu'elle admet des intégrales particulières indépendantes de a, b, c;

2° *Écrire l'intégrale générale en distinguant les trois cas suivants :*

$$b^2-ac>0,$$
$$b^2-ac=0,$$
$$b^2-ac<0;$$

3° *Pour que l'intégrale générale soit rationnelle il faut et il suffit que*

$$\frac{1}{b^2-ac}$$

soit le carré d'un entier.

L'intégrale générale peut-elle être uniforme dans tout le plan de la variable complexe, sans se réduire à une fraction rationnelle ? Trouver dans ce cas les points singuliers d'une intégrale. Préciser leur nature en remontant aux définitions. Prouver qu'ils sont sur une même circonférence. (Lille, juin 1927.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Question de Cours. — *Existence des solutions de l'équation en* y

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),$$

f *étant une fonction donnée de variable réelle non nécessairement analytique, satisfaisant à des hypothèses que l'on précisera.*

II. Problème. — C. 119. — *En s'appuyant sur les expressions de* $\Gamma(1+x)$ *et de* $\dfrac{\sin \pi x}{\pi x}$ *en produit infini, prouver que*

$$\log\Gamma(1+x)+\frac{1}{2}\log\frac{\sin \pi x}{\pi x}+\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}=\sum_{1}^{\infty}{}_{n}\, a_n x^{2n-1},$$

le second membre étant une série entière dont on donnera le rayon de convergence et dont on exprimera les coefficients à l'aide de séries.

Épreuve pratique. — C. 120. — $z = x+iy$ *étant une variable complexe, calculer l'intégrale*

$$\int \frac{dz}{z-2+\sqrt{1-z^2}}$$

prise : 1° *Le long du cercle*

$$x^2+y^2-3x=0$$

dans le sens direct, le point z partant de l'origine et le radical partant de la valeur 1.

2° *Le long du même cercle, dans le même sens, avec le même point de départ, le radical partant de la valeur* -1.

3° et 4° *Mêmes questions pour le cercle*

$$x^2+y^2-3y=0$$

le point de départ étant encore 0. (Clermont, juin 1927.)