NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ANDRÉ ROUSSEL

Sur un système de conditions assurant l'holomorphie d'une fonction

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 203-207

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__203_0>

SUR UN SYSTÈME DE CONDITIONS ASSURANT L'HOLOMORPHIE D'UNE FONCTION ;

PAR ANDRÉ ROUSSEL.

Dans cet article sans prétentions je me propose d'indiquer comment on peut former très simplement un système de conditions nécessaires et suffisantes, qui ne semble pas avoir été signalé encore, permettant d'affirmer l'holomorphie d'une fonction uniforme $f(z)$ de la variable complexe z.

Pour cela, nous démontrerons un théorème sur l'existence de la dérivée d'une fonction de variable réelle $\varphi(x)$. Ce théorème est d'ailleurs bien connu, mais nous allons montrer qu'on peut le faire apparaître comme une conséquence presque immédiate d'une proposition d'Ascoli relative à l'existence de la fonction d'accumulation d'un ensemble de fonctions également continues et également bornées.

On sait (principe de Bolzano-Weierstrass) qu'un ensemble E formé de points contenus sur un segment de droite D admet au moins un point d'accumulation, c'est-à-dire un point d'abscisse x_0, tel qu'à tout $\varepsilon > 0$ corresponde une infinité de points de E satisfaisant à l'inégalité

$$|x - x_0| \leqq \varepsilon.$$

Si l'on considère maintenant un ensemble W contenant une infinité de fonctions définies dans un même intervalle $(0,1)$ par exemple, et satisfaisant à l'inégalité

$$|f(x)| < M$$

(on dit alors que les f sont *également bornées*), où M ne dépend pas de la fonction considérée, on peut se demander si W admet une fonction d'accumulation, c'est-à-dire s'il existe une fonction $f_0(x)$ telle qu'à tout $\varepsilon > 0$ on puisse faire correspondre une infinité de $f(x)$ appartenant à W et vérifiant la condition

$$|f(x) - f_0(x)| < \varepsilon \qquad (0,1).$$

Or il est facile de voir que l'on ne peut pas répondre toujours par l'affirmative, comme le montre l'exemple très simple des fonctions

$$y = \sin \pi n x \qquad (0,1) \qquad (n = 0, 1, \ldots, \infty).$$

Mais il est possible d'introduire une condition supplémentaire grâce à laquelle on a le droit d'affirmer l'existence de la fonction d'accumulation : c'est la condition d'*égale continuité* dont voici la définition : *Les fonctions d'un ensemble* W *sont également continues si à tout nombre positif* ε *on peut faire correspondre un nombre positif* δ *tel que pour tout couple* (x_1, x_2) *satisfaisant à*

$$|x_2 - x_1| \leqq \delta,$$

on ait pour chaque fonction de W :

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqq \varepsilon.$$

Cela aura lieu en particulier si les f ont des rapports incrémentaux bornés dans leur ensemble, autrement dit si l'on a quel que soit f, x_1, x_2 :

$$\left|\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\right| \leqq \mathrm{M},$$

en effet, il suffira de prendre

$$\delta < \frac{\varepsilon}{\mathrm{M}}$$

pour avoir

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon.$$

Le théorème d'Ascoli que nous admettrons sans démonstration [1] s'énonce alors ainsi :

Tout ensemble formé d'une infinité de fonctions également continues et également bornées admet au moins une fonction d'accumulation continue [2].

Nous allons en déduire le corollaire suivant :

Toute fonction $\varphi(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ *satisfaisant, quels que*

[1] Pour la démonstration, *voir* par exemple A. Roussel, *Recherches sur le Calcul des Variations* (Thèse de Doctorat) (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. V, pages 404 à 408).

[2] Ceci est encore vrai sans qu'il soit néeessaire de supposer les fonctions également barrées, mais la fonction d'accumulation pourra alors être $y = \pm \infty$.

soient x et h à la condition

$$\left|\frac{\varphi(x+h)+\varphi(x-h)-2\varphi(x)}{h^2}\right| \leqq M, \tag{1}$$

admet dans tout l'intervalle (a, b) une dérivée première continue.

Soit Γ la courbe représentant la fonction

$$y = \varphi(x) \qquad (a.\ b).$$

Divisons (a, b) en n parties égales par les points

$$a \equiv x_0.\ x_1,\ \ldots.\ x_n \equiv b$$

et considérons la ligne polygonale Π_n inscrite dans Γ dont les sommets successifs ont pour abscisses $x_0, x_1, \ldots, x_n$, et soient

$$y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$$

les coefficients angulaires des côtés de Π_n. Soit dans un système d'axes auxiliaires $(O'xy')$ la courbe en paliers qui représente la fonction discontinue $u_n(x)$ ainsi définie

$$u_n(x) = y'_i \qquad x_{i-1} \leqq x < x_i)$$

et soit

$$y' = \psi_n(x) \qquad (a, b)$$

l'équation de la ligne brisée continue Σ_n qu'on obtient en joignant le point (x_0, y'_1) au point (x_1, y'_2) puis (x_1, y'_2) à $(x_2, y'_3) \ldots$, $(x_{n-2}) y'_{n-1})$ à (x_{n-1}, y'_n), et (x_{n-1}, y'_n) à (x_n, y'_n).

Chaque côté de Σ_n fait avec Ox un angle dont la tangente est, en vertu de (1), inférieure à M. Par suite les $\psi_n(x)$ sont également continues, comme ayant chacune un rapport incrémental inférieur à M; donc les $\psi_n(x)$ admettent une fonction d'accumulation $\psi_0(x)$, continue ou égale à $\pm\infty$, et l'on peut trouver une suite

$$\overline{\psi_1}(x),\ \overline{\psi_2}(x),\ \ldots,\ \overline{\psi_p}(x), \tag{2}$$

de fonction ψ qui convergent vers $\psi_0(x)$. Or

$$|\psi_n(x) - u_n(x)| \leqq \frac{M}{n}.$$

Donc la suite

$$\overline{u_1}(x),\ \overline{u_2}(x).\ \ldots,\ \overline{u_p}(x), \tag{3}$$

formée des u_i correspondant aux ψ_i de (2), converge elle aussi vers $\Psi_0(x)$, et par suite

$$\lim_{n=\infty} \int_a^x \overline{u_n}(x)\, dx = \int_a^x \psi_0(x)\, dx.$$

Mais, d'après la façon dont on a formé les fonctions u, on a aussi

$$\lim_{n=\infty} \int_a^x \overline{u_n}(x)\, dx = \varphi(x) - \varphi(a).$$

Donc

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \int_a^x \psi_0(x)\, dx,$$

ce qui prouve que $\varphi(x)$ admet une dérivée égale à $\psi_0(x)$, et que cette dernière fonction est finie.

Ceci posé, soit

$$f(z) = \mathrm{P}(x, y) + i\mathrm{Q}(x, y)$$

une fonction uniforme de la variable complexe $z = x + iy$. Nous allons appliquer le théorème précédent en donnant d'abord à z un accroissement purement réel que nous pouvons prendre égal à $\frac{1}{n}$ (n entier), puis un accroissement purement imaginaire $i\frac{1}{n}$.

Si l'on a, quel que soit u,

$$n^2 \left| f\left(z + \frac{1}{n}\right) + f\left(z - \frac{1}{n}\right) - 2f(z) \right| < \mathrm{M},$$

où M est une constante positive, on en déduit l'existence de la dérivée en z pour des accroissements réels. En effet l'inégalité précédente est équivalente à deux inégalités, et les deux conditions obtenues, on en tire l'existence de $\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}$ et de $\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}$. De même de l'inégalité

$$n^2 \left| f\left(z + i\frac{1}{n}\right) + f\left(z - i\frac{1}{n}\right) - 2f(z) \right| < \mathrm{M},$$

on déduit l'existence de la dérivée de $f(z)$ quand z reçoit un accroissement purement imaginaire.

Si l'on a de plus

$$(4) \qquad \left| \frac{f\left(z+\frac{1}{n}\right)-f(z)}{\frac{1}{n}} - \frac{f\left(z+i\frac{1}{n}\right)-f(z)}{i\frac{1}{n}} \right| < \frac{M}{n}$$

ou encore

$$n^2 \left| \left\{ f\left(z+\frac{1}{n}\right)-f(z) \right\} + i \left\{ f\left(z+i\frac{1}{n}\right)-f(z) \right\} \right| < M,$$

les deux dérivées en z définies plus haut seront égales. En effet, leur différence qui est

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)+i\left(\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

possède, d'après (4), un module arbitrairement petit, donc nul, d'où

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{\partial P}{\partial y}$$

et ces relations expriment comme on sait que $f(z)$ possède en z une dérivée unique pour un accroissement quelconque de la variable complexe.

En résumé : *si une fonction uniforme de z satisfait à l'intérieur d'un certain domaine* D, *aux trois inégalités suivantes où n est un entier arbitraire*,

$$n^2 \left| f\left(z+\frac{1}{n}\right)+f\left(z-\frac{1}{n}\right)-2f(z) \right| < M,$$

$$n^2 \left| f\left(z+i\frac{1}{n}\right)+f\left(z+i\frac{1}{n}\right)-2f(z) \right| < M,$$

$$n^2 \left| \left\{ f\left(z+\frac{1}{n}\right)-f(z) \right\} + i \left\{ f\left(z+i\frac{1}{n}\right)-f(z) \right\} \right| < M,$$

où M *désigne une constante positive, $f(z)$ est holomorphe dans* D.

Il est d'ailleurs clair que la réciproque est exacte, car si $f(z)$ est holomorphe dans D elle a des dérivées de tous les ordres holomorphes dans ce domaine, d'où l'on déduit sans peine le résultat précédent.