Nouvelles annales de mathématiques

Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 188-192

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__188_1>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

EPREUVE THÉORIQUE. — I. *Un plan* P *tourne uniformément autour de la verticale* Oz, *située dans ce plan. Une tige rectiligne, rigide, homogène et pesante* AB *est astreinte à se mouvoir dans le plan* P *et son extrémité* A *à glisser sur l'horizontale* Ou *du plan* P. *Les liaisons sont bilatérales et sans frottement.*

NOTATIONS. — $2l$ *longueur de la barre;* G *centre de gravité de cette barre;* $u = \text{proj}_{Ou}\overrightarrow{OG}$; $\theta = \widehat{Oz, AB}$ (*sens positif de* Oz *vers* Ou).

a. Sous quelle forme est-il permis d'appliquer ici l'intégrale des forces vives (*raisonnement direct, sur l'exemple proposé*).

b. Déterminer u *et* θ *en fonction de* t. *Caractères du mouvement.*

II. *a. Traduire analytiquement le non-glissement d'un cerceau sur un plan horizontal fixe. Cette condition sera réalisée dans la suite de l'énoncé.*

b. Quelle est la direction de la vitesse du centre du cerceau, quand son plan conserve une inclinaison constante? Cette condition sera également remplie dans ce qui suit.

c. Le bord du cerceau est enfin astreint à s'appuyer sur une verticale fixe. Montrer que son centre décrit généralement un hypocycloïde, exceptionnellement une circonférence. Retrouver géométriquement ces *résultats, en étudiant le mouvement dans son plan de l'ellipse, projection horizontale du cerceau.*

Solution. — I. Prenons la masse du système pour unité. On a pour la force vive

$$2T = u'^2 + l^2\theta'^2\left(\frac{1}{3} + \sin^2\theta\right) + \omega^2\left(u^2 + \frac{l^2}{3}\sin^2\theta\right),$$

la fonction de forces est

$$U = -gl\cos\theta.$$

L'équation de Lagrange relative au paramètre u est

$$(1) \qquad u'' - \omega^2 u = 0.$$

On a d'autre part l'intégrale des forces vives (forme de M. Painlevé)

$$u'^2 - \omega^2 u^2 + l^2\theta'^2\left(\frac{1}{3} + \sin^2\theta\right) - \omega^2\frac{l^2}{3}\sin^2\theta = -2gl\cos\theta + h_1.$$

En vertu de (1), le terme $u'^2 - \omega^2 u^2$ est constant. D'où l'équation

$$\theta'^2\left(\frac{1}{3} + \sin^2\theta\right) = \frac{\omega^2}{3}\sin^2\theta - \frac{2g}{l}\cos\theta + h$$

qui détermine θ.

II. Les conditions de non-glissement sont

$$\frac{d\xi}{R} - (\cos\theta_0\,d\psi + d\varphi)\cos\psi = 0,$$

$$\frac{d\eta}{R} - (\cos\theta_0\,d\psi + d\varphi)\sin\psi = 0.$$

On en déduit la relation $\dfrac{d\xi}{\cos\psi} = \dfrac{d\eta}{\sin\psi}$, montrant que la vitesse du centre est portée par le rayon horizontal. En traduisant la liaison supplémentaire suivant laquelle le cerceau s'appuie sur la verticale O_1z_1, on obtient l'équation

$$(\xi\cos\psi + \eta\sin\psi)^2 + \frac{1}{\cos^2\theta_0}(-\xi\sin\psi + \eta\cos\psi)^2 = R^2;$$

éliminant ψ, on a l'équation différentielle de la trajectoire du centre du cerceau

$$(\xi\,d\xi + \eta\,d\eta)^2 + \frac{1}{\cos^2\theta_0}(\eta\,d\xi - \xi\,d\eta)^2 = R^2(d\xi^2 + d\eta^2).$$

Pour intégrer, on pose $\xi = \rho\cos\omega$, $\eta = \rho\sin\omega$. On trouve une intégrale singulière $\rho = \pm R\cos\theta_0$ et l'intégrale générale

$$\omega - \omega_0 = \cos\theta_0 \operatorname{arc\,tang} u - \operatorname{arc\,tang}(u\cos\theta_0),$$

en posant

$$u^2 = \frac{R^2 - \rho^2}{\rho^2 - R^2 \cos^2 \theta_0};$$

si l'on pose maintenant

$$m = \cos\theta_0, \qquad u = \operatorname{tang}\alpha, \qquad u\cos\theta_0 = \operatorname{tang}\beta,$$

on obtient finalement

$$\xi = R(\cos\alpha \cos m\alpha + m \sin\alpha \sin m\alpha),$$
$$\eta = R(\cos\alpha \sin m\alpha - m \sin\alpha \cos m\alpha),$$

équations parametriques de l'hypocycloïde annoncée.

La solution géométrique se ramène à l'étude du déplacement continu d'une ellipse, tel que cette courbe passe par un point fixe, et que la vitesse de son centre soit dirigée suivant le grand axe. *Voir* sur cette question un article de M. Bouligand (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, janvier 1926).

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un système primitivement au repos se compose d'une tige rectiligne et homogène* AB, *de longueur* $2l$, *de masse* $2M$, *portant à ses extrémités deux pendules simples, ayant chacun la longueur* $2l$ *et la masse* M. *La tige* AB *est initialement horizontale Ce système est abandonné en chute libre (donc, sans vitesses initiales), et à l'instant précis où il est tombé de la hauteur* $2l$, *on fixe le point* C *de la tige tel que* $AC = 3CB$. *Trouver l'état des vitesses succédant à cette opération. On prendra pour origine le milieu* O *de la barre à l'instant du choc, pour axe* Ox *la verticale ascendante, pour axe* Oy *la demi-droite* OB. *On déterminera une position virtuelle du système par les coordonnées* ξ, η *de son centre de gravité et les angles* α, β, θ *des pendules et de la barre avec* Ox.

SOLUTION. — Dans la position où se produit le choc, la force vive du système total est

$$4M\left\{\xi'^2 + \eta'^2 + \frac{2l^2}{3}\theta'^2 + l^2(\alpha'^2 - \beta'^2) + l\eta'(\alpha' + \beta')\right\}.$$

Les liaisons introduites imposent aux variations virtuelles des paramètres les conditions

$$\delta\xi - \frac{l}{2}\delta\theta = 0 \qquad \text{et} \qquad \delta\eta = 0.$$

Comme ces liaisons persistent, les vitesses postérieures au choc, satisfont aux conditions

$$\xi'_1 - \frac{l}{2}\theta'_1 = 0, \qquad \eta'_1 = 0$$

ou

$$(1) \qquad 2\sqrt{gl} + \Delta\xi' - \frac{l}{2}\Delta\theta' = 0,$$

$$(2) \qquad \Delta\eta' = 0.$$

Il reste à écrire que l'équation générale de la dynamique des percussions

$$\Delta\xi'\,\delta\xi + \Delta\left[\eta' + \frac{l}{2}(\alpha' + \beta')\right]\delta\eta + \frac{2l^2}{3}\Delta\theta'\,\delta\theta + l^2\Delta\left(\alpha' + \frac{\eta'}{2l}\right)\delta\alpha + l^2\Delta\left(\beta' + \frac{\eta'}{2l}\right)\delta\beta = 0$$

est satisfaite moyennant les conditions qui correspondent aux liaisons introduites. On obtient aussi trois nouvelles équations

$$(3) \qquad \Delta\xi' + \frac{4}{3}l\Delta\theta' = 0,$$

$$(4) \qquad \Delta\alpha' = 0,$$

$$(5) \qquad \Delta\beta' = 0,$$

qui, jointes à (1) et (2), donnent la solution cherchée.

(Poitiers, juin 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — C.111. — *Deux solides de révolution identiques homogènes et pesants sont fixés par un point* O *commun à leurs axes* (OG = OΓ, G *et* Γ *étant les centres de gravité*).

Sur OΓ *et sur le prolongement de* GO *sont calés deux cônes de friction identiques immatériels et à contact forcé qui ne peuvent que rouler sans glisser l'un sur l'autre.*

Le plan des deux axes est assujetti à toujours rester vertical.

L'angle constant des deux axes est supposé égal à $\frac{\pi}{2}$.

Mouvement du système. — Variation de tous les paramètres. — Diverses formes de la trajectoire sphérique d'un point de δ génératrice de contact des deux cônes de friction, génératrice dont on désignera par θ *l'angle avec la verticale descendante.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — C.112. — *D'une plaque circulaire homogène de centre* O *et de rayon* 12^{cm}, *on enlève l'intérieur d'un cercle de centre* C, *passant par* O *et de rayon* 5^{cm}.

Parmi les droites que l'on peut tracer, issues de C, *dans la plaque restante, déterminer celle que l'on doit fixer horizontalement pour que la durée des petites oscillations du pendule composé ainsi formé avec la plaque évidée soit aussi faible que possible.*

(Bordeaux, juin 1922.)

Epreuve théorique. — C.113. — *Soient deux axes rectangulaires* Oxy. *Deux points* A *et* B, *de masse commune* m, *décrivent l'un* Ox, *l'autre* Oy, *avec un coefficient de frottement* f. *Ils s'attirent mutuellement suivant une force égale à* k.AB.

1° *Déterminer leur mouvement, en supposant les conditions initiales quelconques. Indiquer quelles sont les différentes espèces de mouvements possibles. Montrer que, lorsque les distances* OA *et* OB *varient dans le même sens, le travail absorbé par le frottement est proportionnel à la diminution de l'aire du triangle* OAB *et que, lorsque les distances* OA, OB *varient en sens inverse, ledit travail est proportionnel à l'aire balayée par le vecteur* OP, *en appelant* P *le quatrième sommet du rectangle dont les trois premiers sommets sont* O, A, B.

2° *Que se passe-t-il quand on abandonne* A *et* B *sans vitesse initiale?*

3° *On suppose* $f = 0{,}6$ *et l'on abandonne* A *et* B, *sans vitesse initiale, dans des positions telles qu'ils se mettent tous deux en mouvement. Quel est celui qui arrive le premier en* O? *Calculer le travail absorbé par le frottement à cet instant.*

4° *Étudier complètement le mouvement, en supposant* $f < 1$, *les vitesses initiales nulles et les positions initiales équidistantes de* O. *Calculer les abscisses des positions extrêmes successives et les époques correspondantes. Quelles sont les positions limites de* A *et de* B, *quand le temps augmente indéfiniment? Calculer le travail absorbé par le frottement au bout de la* n^{ieme} *élongation maxima. Limite de ce travail pour* n *infini.*

N. B. — On supposera que Ox *et* Oy *ne sont pas tout à fait dans le même plan, pour éviter les chocs.*

Épreuve pratique. — C.114. — *Un cube, d'arête* a, *peut pivoter sans frottement autour d'un de ses sommets* O. *Une tige, de masse négligeable, le traverse suivant la diagonale qui joint* O *au sommet opposé* A. *Cette tige se prolonge du côté de* O *et traverse diamétralement une sphère de rayon* $\frac{a}{2}$. *Le cube et la sphère étant supposés homogènes, de même densité et solidaires de la tige, on demande à quelle distance* x *de* O *il faut placer le centre* O′ *de la sphère pour que le corps solide ainsi formé soit en équilibre indifférent, quand on le suppose soumis à la seule action de la pesanteur.*

Cette condition étant supposée remplie, on place les arêtes du cube issues de O *suivant les axes de coordonnées et l'on imprime au système la vitesse angulaire* ω *autour de* Ox. *Calculer les équations de la trajectoire du point* A *et le temps mis pour la parcourir.*

Application numérique : $\omega = 230$ *tours par minute.*

(Clermont, juin 1925.)