NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions de licence

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 149-155

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__149_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS DE LICENCE.

Question C.70.

[*Mathématiques générales, épreuve théorique de Mécanique; énoncé publié en juillet* 1926, p. 315]

SOLUTION

Par R. WEINZAEPFEL.

Une plaque en forme de triangle rectangle isoscèle OAB tourne autour du côté de l'angle droit OA, placé verticalement avec la vitesse angulaire

(1) En vertu d'un théorème classique de Riemann, les résultats du 2° s'appliquent à tout domaine simplement connexe du plan $\bar{z}$.

constante ω. Une masse pesante m glisse sur l'hypoténuse AB et est reliée au point A par un fil élastique, de longueur naturelle l et dont la tension est proportionnelle à l'allongement ($T = kx$).

1° On suppose qu'à l'instant initial la longueur du fil est l et la vitesse relative de m nulle et on demande d'étudier le mouvement.

On peut ecrire l'équation du mouvement relatif de m sur AB en faisant intervenir seulement la force d'inertie d'entraînement, on a immédiatement

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{\omega^2}{2} - \frac{k}{m}\right)x + \frac{1}{2}(\omega^2 l + g\sqrt{2})$$

ou,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = ax + b.$$

L'allure du mouvement dépend du signe de a.

1° $a > 0$; on a, avec les conditions initiales ($x_0 = 0$, $x'_0 = 0$),

$$x = \frac{b}{a}(\mathrm{ch}\sqrt{a}\,t - 1)$$

et le mouvement sur AB a lieu toujours dans le même sens (vers le bas);

2° $a = 0$; on a

$$x = \frac{1}{2}bt^2;$$

3° $a < 0$; en posant alors $a = -c$, il vient

$$x = \frac{b}{c}(1 - \cos\sqrt{c}\,t),$$

le mouvement est oscillatoire autour de la position.

$$x = \frac{b}{c};$$

les limites d'oscillation pour x étant 0 et $\frac{2b}{c}$, la période étant $\frac{2\pi}{\sqrt{c}}$. Pour que la vibration puisse pratiquement avoir lieu, il faut naturellement que $\frac{2b}{c} \leqq m_0 B$;

2° Étant donné

$$\omega = 10\pi$$

et le poids de la masse m égal à 5^{kg}, on a observé un mouvement relatif de 150 oscillations à la minute. On demande de calculer la constante k et l'amplitude de l'oscillation, en supposant l'allongement x exprimé en mètres, la tension T en kilogrammes et en prenant

$$g = 10 \text{ m/sec}, \qquad l = 5^{\mathrm{m}}.$$

La période est

$$\frac{2\pi}{\sqrt{c}} = \frac{2}{5};$$

d'où

$$c = 25\pi^2$$

et

$$c = -a = \frac{10k}{5} - 50\pi^2 = 25\pi^2,$$

d'où

$$k = \frac{75\pi^2}{2} = 369$$

et l'amplitude de l'oscillation est

$$\frac{2b}{c} = \frac{500\pi^2 + 10\sqrt{2}}{25\pi^2}$$

de l'ordre de 20.

Question C.76.

[*Mécanique rationnelle, épreuve pratique; énoncé publié en juillet* 1926, p. 320.]

Solution

Par R. Weinzaepfel.

Un gyroscope est constitué par un disque circulaire de 20^{cm} de diamètre, 6^{mm} d'épaisseur et par un tore, dont le centre coïncide avec celui du disque, de rayons équatoriaux 10^{cm} et 14^{cm}. Le point de suspension est à 10^{cm} du centre. On demande la période du mouvement de précession, sachant que le gyroscope fait 3000 tours à la minute.

On sait que, ψ' étant la vitesse angulaire de précession, on a

$$\psi' = \frac{lmg}{C\omega},$$

où l est la distance du centre de gravité au point de suspension et C le moment d'inertie par rapport à l'axe.

On a ici, dans le système C. G. S.,

$$l = 10, \qquad \omega = \frac{3000}{60}2\pi = 100\pi,$$

$$m = \pi\rho(60 + 96\pi),$$

ρ désignant la densité. Calculons C. Pour le cylindre le moment d'inertie est $3000\pi\rho$. Pour le tore il vaut

$$m_1\left(R^2 + \frac{3a^2}{4}\right) = 96\pi^2\rho\left(12^2 + \frac{3}{4}2^2\right) = 96\pi^2\rho\ 147.$$

Donc

$$\psi' = \frac{(5+8\pi)g}{20\pi[175+588\pi]}$$

et la période demandée est

$$T = \frac{2\pi}{\psi'} = 27 \text{ secondes environ.}$$

Question C.86.

[*Calcul différentiel et intégral, épreuve théorique; énoncé publié en février* 1927, p. 62.]

SOLUTION
Par R. ODILE.

On donnait la surface réglée (S), non développable engendrée par la droite (D)

$$(D) \qquad \begin{cases} x = az + \lambda, \\ y = bz + \mu, \end{cases}$$

où a, b, λ, μ sont fonctions données d'un paramètre variable. (L) étant la ligne de striction de (S), on demande la condition pour que (L) soit courbe de contact d'un cylindre circonscrit à (S) et parallèle à Oz.

Soit z la cote du point central de D, on sait que

$$(1) \qquad z = -\frac{a'\lambda' + b'\mu' + (ab' - ba')(a\mu' - b\lambda')}{a'^2 + b'^2 + (ab' - ba')^2},$$

où les accents désignent des dérivées par rapport au paramètre dont dépend D. Le plan tangent en ce point

$$(2) \qquad (b'z + \mu')(X - aZ - \lambda) - (a'z + \lambda')(Y - bZ - \mu) = 0$$

doit être vertical, d'où

$$(3) \qquad z = \frac{\mu' a - \lambda' b}{a' b - a b'}.$$

En égalant les seconds membres de (1) et (3), il y a des réductions évidentes et il reste

$$(a'\mu' - b'\lambda')(aa' + bb') \equiv 0;$$

le premier crochet ne peut être identiquement nul puisque la surface n'est pas développable; reste

$$aa' + bb' \equiv 0;$$

$$a^2 + b^2 + 1 = \text{const.}$$

ou

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} = \cos\alpha = \text{const.},$$

l'angle de (D) avec Oz doit rester constant; telle est la condition cherchée.

Géométriquement le résultat est évident. Soit le cône directeur de sommet O, de la surface (S). Le plan tangent à ce cône le long de la génératrice OG parallèle à D doit être perpendiculaire au plan vertical (OG, Oz). Ce plan tangent est en effet parallèle au plan asymptote à (S) passant par D, tandis que le plan OG, Oz est parallèle au plan central supposé vertical. En conséquence le cône directeur est de révolution autour de Oz.

Si l'on pose $a^2 + b^2 = c^2$ (c = const.), on pourra écrire

$$a = c\cos\theta, \qquad b = c\sin\theta,$$

où θ est l'angle du plan central avec le plan xOz, d'où la nouvelle forme des équations paramétriques de (S) :

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} x = cz\cos\theta + \lambda(\theta), \\ y = cz\sin\theta + \mu(\theta). \end{cases}$$

On veut que la ligne de striction (L) *soit ligne de courbure sur* (S).

Le z d'un point de (L) est déterminé par

$$z = \frac{1}{c}(\lambda'(\theta)\sin\theta - \mu'(\theta)\cos\theta).$$

Les paramètres directeurs de la normale à S en un tel point sont

$$A = \sin\theta, \qquad B = -\cos\theta, \qquad C = 0,$$

et pour que cette normale engendre une surface développable, il faut que

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ A & B & C \\ dA & dB & dC \end{vmatrix} = dz = 0.$$

Il faut donc, entre λ et μ, la relation

$$(4) \qquad \lambda'(\theta)\sin\theta - \mu'(\theta)\cos\theta = \text{const.};$$

L sera plane et dans un plan parallèle au plan xOy.

Ses équations seront :

$$(5) \qquad \begin{cases} x = h\cos\theta + \lambda(\theta), \\ y = h\sin\theta + \mu(\theta), \\ z = \dfrac{h}{c}; \end{cases}$$

il est facile de voir que l'équation de la tangente à (L) s'écrit dans son plan, en tenant compte de (4),

$$(6) \qquad x\sin\theta - y\cos\theta - \lambda(\theta)\sin\theta + \mu(\theta)\cos\theta = 0.$$

Mais toute courbe (Γ) de ce même plan, quelle qu'elle soit, peut être considérée comme enveloppe d'une droite (Δ),

$$(\Delta) \qquad x \sin\theta - y\cos\theta + f(\theta) = 0,$$

$f(\theta)$ fonction absolument quelconque.

Or il est évidemment possible d'identifier (Δ) à la tangente qui a pour équation (6); il suffira de choisir $\lambda(\theta)$ et $\mu(\theta)$ de telle sorte que

$$(7) \qquad -\lambda(\theta)\sin\theta + \mu(\theta)\cos\theta = f(\theta);$$

en dérivant cette relation et en tenant compte de (4), on obtient une nouvelle relation lineaire en $\lambda(\theta)$ et $\mu(\theta)$:

$$(8) \qquad -h - \lambda(\theta)\cos\theta - \mu(\theta)\sin\theta = f'(\theta);$$

les équations (7) et (8) donnent :

$$(9) \qquad \begin{cases} \lambda(\theta) = -f(\theta)\sin\theta - [f'(\theta) + h]\cos\theta, \\ \mu(\theta) = f(\theta)\cos\theta - [f'(\theta) + h]\sin\theta; \end{cases}$$

ceci montre que, comme ligne L, on peut prendre une courbe horizontale (Γ) entièrement arbitraire; la surface (S) correspondante dépend des fonctions $\lambda(\theta)$ et $\mu(\theta)$ déterminées par les relations (9).

Autre solution par J. Devisme et R Weinzaepfel.

Question C.88.

[*Calcul différentiel et intégral, épreuve théorique; énoncé publié en février* 1927, p. 63.]

Solution

Par Jacques Devisme.

On donnait une courbe gauche, sur chaque normale principale MN on portait $MP = e =$ const. et par P on menait une parallèle (D) a la tangente MT. Il s'agissait de trouver la ligne de striction de la surface réglée Σ engendrée par (D).

Un point quelconque de Σ s'écrit (avec des notations évidentes)

$$\mu = M + eN + \lambda T,$$

$$d\mu = T\,ds + e\left(-\frac{T}{\rho} - \frac{B}{\tau}\right)ds + \lambda\frac{N}{\rho}\,ds + T\,d\lambda;$$

on en tire

$$T\,d\mu = ds\left(1 - \frac{l}{\rho}\right) + d\lambda,$$

$$N\,d\mu = \frac{\lambda}{\rho}$$

$$B\,d\mu = -\frac{l}{\tau}\,ds;$$

d'où la combinaison.

$$0 \times \mathrm{T}\, d\mu + \left(-\frac{l}{\tau}\right) \mathrm{N}\, d\mu + \left(\frac{\lambda}{\rho}\right) \mathrm{B}\, d\mu = 0.$$

Le vecteur ν normal à Σ au point μ est donc proportionnel à

$$-\frac{l}{\tau}\mathrm{N} + \frac{\lambda}{\rho}\mathrm{B}\,;$$

à l'infini sur D le vecteur est proportionnel à

$$\frac{\mathrm{B}}{\rho}.$$

Pour trouver le point central, on écrira que

$$\nu_0 \nu_\infty = 0,$$

ce qui s'écrira encore, à un facteur près,

$$\left(-\frac{e}{\tau}\mathrm{N} + \frac{\lambda_0}{\rho}\mathrm{B}\right)\frac{\mathrm{B}}{\rho} = \frac{\lambda_0}{\rho^2} = 0,$$

d'où

$$\lambda_0 = 0.$$

Et la ligne de striction est la courbe lieu du point P, ce que l'on pouvait prévoir *a priori*. En effet la tangente à cette courbe est normale à MP, de sorte que le plan tangent en P à la surface (Σ) est normal au plan osculateur à la courbe C en M; il en résulte immédiatement que P est bien le point central de (D) sur (Σ).

Autre solution de R. Odile et R. Weinzaepfel.