Louis Gérard

Théorèmes de Puiseux et de Halphen sur le pendule sphérique

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 147-148

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__147_1>

THÉORÈMES DE PUISEUX ET DE HALPHEN SUR LE PENDULE SPHÉRIQUE;

PAR LOUIS GÉRARD.

En prenant pour unité le diamètre de la sphère, pour origine le point le plus bas, on trouve, dans les traités de mécanique, que l'accroissement α de l'azimut pendant une oscillation simple est

$$\alpha = \int_a^b \frac{dz\sqrt{abc}}{z(1-z)\sqrt{(z-a)(b-z)(c-z)}}$$

avec

$$0 < a < b < 1-a, \qquad c = \frac{(1-a)(1-b)}{1-a-b} = 1 + \frac{ab}{1-a-b} > 1.$$

De plus

$$\int_a^b \frac{dz\sqrt{ab}}{z\sqrt{(z-a)(b-z)}} = \pi = \int_a^b \frac{dz\sqrt{(1-a)(1-b)}}{(1-z)\sqrt{(z-a)(b-z)}}.$$

Donc, pour montrer que $\alpha > \pi$, il suffit de remarquer que

$$\frac{\sqrt{c}}{(1-z)\sqrt{c-z}} > 1.$$

Pour montrer que $\alpha < 2\pi$, il suffit de prouver que

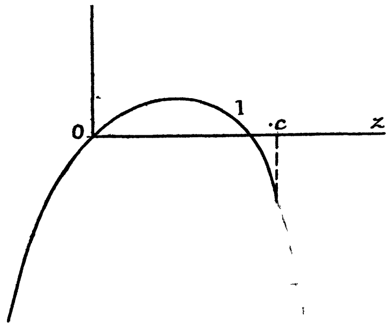
$$\frac{\sqrt{abc}}{z(1-z)\sqrt{c-z}} < \frac{\sqrt{ab}}{z} + \frac{\sqrt{(1-a)(1-b)}}{1-z}. \tag{1}$$

En posant $A = \sqrt{(1-a)(1-b)}$, $B = \sqrt{ab}$ et en remplaçant c

par sa valeur $\frac{A^2}{A^2 - B^2}$, l'inégalité (1) devient

$$(2) \qquad [Az + B(1-z)]\sqrt{A^2 - z(A^2 - B^2)} - AB > 0.$$

M. Hadamard m'a fait remarquer que le premier membre de cette inégalité s'annule pour $z = 0$ et $z = 1$. De plus, $A > B$ (à cause de l'hypothèse $1 - a - b > 0$); donc la variation de ce



premier membre est représentée par la courbe ci-dessus; donc ce premier membre est positif pour $0 < z < 1$.

Pour le voir algébriquement, posons

$$\sqrt{A^2 - z(A^2 - B^2)} = u;$$

l'inégalité (2) devient

$$(A^2 + AB + B^2 - u^2)u - AB(A + B) > 0$$

ou

$$(3) \qquad (u - A)(u - B)(u + A + B) < 0.$$

Quand z varie de 0 à 1, u varie de A à B; donc l'inégalité (3) est vérifiée.