NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

RAOUL BRICARD

Sur un mouvement plan à deux paramètres, doublement décomposable

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 2 (1927), p. 105-109

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1927_6_2__105_1>

[O'8]

SUR UN MOUVEMENT PLAN A DEUX PARAMÈTRES, DOUBLEMENT DÉCOMPOSABLE;

PAR RAOUL BRICARD.

1. Soient S_0 un solide fixe, S_1 un solide animé d'un mouvement à un paramètre ou mouvement $\mathfrak{M}_1$ par rapport à S_0, S_2 un solide animé d'un mouvement $\mathfrak{M}_1$, indépendant du premier, par rapport à S_1. La position de S_2 par rapport à S_0 dépend de deux paramètres, et l'on peut parler du mouvement à deux paramètres ou mouvement $\mathfrak{M}_2\left(\frac{S_2}{S_0}\right)$. Ce $\mathfrak{M}_2$, résultant de deux $\mathfrak{M}_1$, est dit *décomposable*. Il est clair que le $\mathfrak{M}_2$ le plus général n'est pas décomposable.

M. G. Kœnigs, qui a introduit en Cinématique la notion de mouvement décomposable (elle s'étend naturellement aux mouvements à plus de deux paramètres), a posé la question de *rechercher tous les $\mathfrak{M}_2$ qui sont décomposables de plusieurs manières.*

Le problème est déjà difficile quand tous les mouvements considérés sont des mouvements *plans*, c'est-à-dire des mouvements de plans glissant les uns sur les autres. Dans une Note déjà ancienne ([1]), j'ai fait connaître un certain nombre de $\mathfrak{M}_2$ plans doublement décomposables, sans d'ailleurs prétendre avoir épuisé la question.

Je parlerai ici d'un $\mathfrak{M}_2$ qui rentre comme cas particulier dans

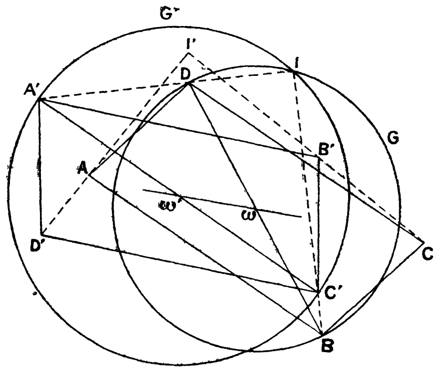
---

([1]) *Société mathématique de France, comptes rendus des séances*, 1913.

un de ceux-là. Il m'a semblé qu'il méritait d'être signalé, à cause de sa simplicité et de sa théorie tout à fait élémentaire.

2. Tout repose sur le théorème suivant :

Soient (voir *fig.*) ABCD *et* A′B′C′D′ *deux parallélogrammes*



tracés dans un même plan et inversement égaux. Si A′D *est perpendiculaire à* BC′, *alors* AD′ *est perpendiculaire à* B′C.

Soit en effet I le point de rencontre de A′D et de BC′. Il appartient au cercle G de diamètre BD et au cercle G′ de diamètre A′C′. Les centres ω et ω' de ces deux cercles sont aussi les centres des deux parallélogrammes.

Faisons tourner ceux-ci autour de leurs centres respectifs d'un même angle θ (considéré avec son signe). On reconnaît immédiatement que A′D et BC′ ne cessent pas de se couper à angle droit au point I.

On peut choisir l'angle θ de telle manière que les deux parallélogrammes, dans leurs nouvelles positions, soient symétriques par rapport à la médiatrice de $\omega\omega'$. Il suffit pour cela que les nouvelles positions des points A et A′ présentent cette symétrie, ce qui se traduit par la condition

$$\widehat{\omega'\omega, \omega A} + \theta + \widehat{\omega'\omega, \omega' A'} + \theta = \pi,$$

d'où

$$\theta = \frac{\pi - \widehat{\omega'\omega, \omega A} - \widehat{\omega'\omega, \omega' A'}}{2}.$$

Les deux parallélogrammes étant amenés dans les positions dont il s'agit, la symétrie rend évident le théorème à démontrer.

Ramenons alors, par des rotations de $-\theta$, les deux parallélogrammes dans leurs positions initiales. AD′ et B′C ne cessent pas de se couper à angle droit, ce qui établit la proposition.

3. On met ainsi en évidence l'existence d'un $\mathcal{M}_2$ doublement décomposable. Appelons en effet P un plan lié au parallélogramme ABCD, P′ un plan lié au parallélogramme A′B′C′D′, P_1 un plan lié à l'angle droit BID, P'_1 un plan lié à l'angle droit B′I′D′, I′ étant le point de rencontre de AD′ et de B′C. Si, les deux parallélogrammes restant de grandeurs constantes, on leur donne toutes les positions relatives telles que A′D et BC′ restent rectangulaires, le mouvement $\left(\frac{P'}{P}\right)$ est un $\mathcal{M}_2$ qui résulte des deux $\mathcal{M}_1$ suivants : 1° $\left(\frac{P_1}{P}\right)$, mouvement d'un plan dont deux droites passent chacune par un point fixe; 2° $\left(\frac{P'}{P_1}\right)$, mouvement d'un plan dont deux points décrivent chacun une droite fixe.

Or le même $\mathcal{M}_2$ peut s'obtenir, d'après le théorème du n° 2, si l'on remplace le plan intermédiaire P_1 par le plan P'_1. Comme les plans P_1 et P'_1 ne sont évidemment pas liés l'un à l'autre, on a bien obtenu un $\mathcal{M}_2$ doublement décomposable.

On peut encore interpréter le résultat, en remarquant que $\left(\frac{P'_1}{P_1}\right)$ est un $\mathcal{M}_2$, résultant soit de $\left(\frac{P}{P_1}\right)$ et de $\left(\frac{P'_1}{P}\right)$, soit de $\left(\frac{P'}{P_1}\right)$ et de $\left(\frac{P'_1}{P'}\right)$.

4. Cherchons si le théorème du n° 2 s'étend à l'espace. La question se traite rapidement par le calcul vectoriel [1].

Soient dans l'espace ABCD et A′B′C′D′ deux parallélogrammes ayant des diagonales de mêmes longueurs. Posons, ω et ω' étant leurs centres,

$$\text{longueur } \omega A = \text{longueur } \omega' A' = a,$$
$$\text{longueur } \omega B = \text{longueur } \omega' B' = b.$$

Soient d'autre part $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$ des vecteurs unitaires parallèles

[1] Notations de Burali-Forti et Marcolongo.

respectivement à ωA, ωB, $\omega' A'$, $\omega' B'$. On peut écrire

$$\begin{aligned} A &= \omega + a\mathbf{u}, & B &= \omega + b\mathbf{v}, \\ C &= \omega - a\mathbf{u}, & D &= \omega - b\mathbf{v}, \\ A' &= \omega' + a\mathbf{u}', & B' &= \omega' + b\mathbf{v}', \\ C' &= \omega' - a\mathbf{u}', & D' &= \omega' - b\mathbf{v}'. \end{aligned}$$

La condition que $A'D$ et BC' soient rectangulaires s'exprime par

$$(A' - D) \times (C' - B) = 0,$$

ou

$$(\omega' - \omega + a\mathbf{u}' + b\mathbf{v}) \times (\omega' - \omega - a\mathbf{u}' - b\mathbf{v}) = 0,$$

ou

$$(\omega' - \omega)^2 - (a\mathbf{u}' + b\mathbf{v})^2 = 0,$$

ou enfin

$$(1) \qquad (\omega' - \omega)^2 - a^2 - b^2 - 2ab.\mathbf{u}' \times \mathbf{v} = 0.$$

De même, la condition que AD' et $B'C$ soient rectangulaires s'exprime par

$$(2) \qquad (\omega' - \omega)^2 - a^2 - b^2 - 2ab.\mathbf{u} \times \mathbf{v}' = 0.$$

Pour que (2) résulte de (1), il faut et il suffit qu'on ait

$$\mathbf{u}' \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}',$$

c'est-à-dire

$$(3) \qquad \widehat{\omega B, \omega' A'} = \widehat{\omega A, \omega' B'}.$$

Le résultat peut s'énoncer ainsi :

Soient dans l'espace deux parallélogrammes ABCD, $A'B'C'D'$, *tels que l'on ait*

$$AC = A'C' \qquad BD = B'D'.$$

Des trois conditions :

$A'D$ *est perpendiculaire à* BC',

AD' *est perpendiculaire à* $B'C$,

$$\widehat{BD, A'C'} = \widehat{AC, B'D'},$$

l'une entraîne les deux autres.

Cela comprend le théorème du n° 2.

L'énoncé est particulièrement simple quand les deux parallélogrammes sont aplatis, parce que la condition (3) est alors satisfaite d'elle-même, et l'on a ceci :

Soient dans l'espace deux ponctuelles égales ABCD, A'B'C'D', *telles que les milieux de* AC *et de* BD *coïncident, et de même les milieux de* A'C' *et de* B'D'. *Si* A'D *est perpendiculaire à* BC', AD' *est perpendiculaire à* B'C.