

**NOUVELLES ANNALES**

**DE**

**MATHÉMATIQUES**

---

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C<sup>ie</sup>

79970

Quai des Grands-Augustins, 55

---

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM

# NOUVELLES ANNALES

DE

# MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION

DIRIGÉ PAR

**R. BRICARD**

Professeur au Conservatoire national  
des Arts et Métiers  
et à l'École Centrale des Arts et Manufactures

**H. VILLAT**

Correspondant de l'Académie des Sciences  
Professeur à l'Université de Strasbourg  
Directeur du *Journal de Mathématiques pures  
et appliquées*  
Directeur du *Mémorial des Sciences mathématiques*

**J. PÉRÈS**

Professeur à la Faculté des Sciences de Marseille

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,  
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOINE,  
DUPORCQ, BOURLET, LAISANT.

**SIXIÈME SÉRIE — TOME II**

(LXXXIV<sup>e</sup> VOLUME DE LA COLLECTION)



B. 24

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET C<sup>ie</sup>, ÉDITEURS

LIBRAIRES DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES

55, Quai des Grands-Augustins, 55

1927

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés  
pour tous pays.

# NOUVELLES ANNALES

DE

## MATHÉMATIQUES

---

---

### SECTIONS SPHÉRIQUES D'UN TORE ;

PAR ILIOVICI.

---

*L'intersection d'un tore et d'une sphère se trouve sur un cône du second ordre, dont le sommet est sur l'axe de révolution du tore.*

Le tore peut être considéré comme enveloppe d'une sphère  $S$  dont le centre  $s$  se déplace sur le cercle médian  $C$ . Toutes ces sphères ont même axe radical, qui est l'axe de révolution du tore.

Soient  $\omega$  le centre de la sphère donnée  $\Sigma$  et  $I$  le centre radical des sphères  $S$  et de  $\Sigma$ .

Toute sphère  $S$  coupe  $\Sigma$  suivant un cercle qui se trouve dans le plan radical  $P$ , plan mené par  $I$  perpendiculairement à  $\omega s$ .

L'intersection de  $\Sigma$  et du tore est l'enveloppe de ces cercles. Elle est donc sur l'enveloppe des plans  $P$ , qui est le cône de sommet  $I$  et supplémentaire du cône de sommet  $\omega$ , qui a comme base le cercle médian  $C$ .

La section sphérique d'un tore est une biquadratique gauche.

De là résulte le théorème suivant, dû à Mannheim.

*Toute sphère bitangente à un tore le coupe suivant deux cercles.* — En effet si la sphère est bitangente au tore, elle est aussi bitangente au cône  $I$ , et l'on sait que deux quadriques bitangentes se coupent en général suivant deux courbes planes.

En faisant une inversion, qui a pour pôle un des points d'intersection de la sphère avec l'axe de révolution, on déduit du théorème de Mannheim celui d'Yvon Villarceau.

Le cône de sommet I et supplémentaire du cône  $\omega C$  <sup>(1)</sup> coupe le tore suivant une courbe du 8<sup>e</sup> degré, qui se décompose en deux biquadratiques gauches, se trouvant l'une sur la sphère  $\Sigma$  et l'autre sur la sphère  $\Sigma'$  qui a pour centre  $\omega'$  (symétrique de  $\omega$  par rapport au centre de C) et telle que son centre radical avec les sphères S, soit encore I.

On voit en effet que le cône  $\omega' C$  se déduit de  $\omega C$  par translation, il a donc même supplémentaire que ce dernier.

*Réciproquement*, pour qu'un cône du second ordre dont le sommet I est sur l'axe de révolution, coupe le tore suivant deux biquadratiques gauches, il faut et il suffit que la section par un plan perpendiculaire à l'axe admette le pied de l'axe comme foyer. En effet le cône supplémentaire admet ce plan comme plan cyclique. On peut donc construire deux cônes parallèles à celui-ci, en prenant comme base le cercle C. Les sommets des deux cônes ainsi obtenus seront les centres des sphères contenant les biquadratiques gauches, sphères que le point I détermine sans ambiguïté.

---

---

## AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (SESSION DE 1926).

### Problème de Calcul différentiel et intégral.

*On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre*

$$(1) \quad x'' + xA(t) = 0,$$

où  $A(t)$  désigne une fonction analytique de la variable indépendante  $t$ , réelle et régulière pour toutes les valeurs réelles et finies de  $t$ .

1<sup>o</sup> Démontrer que toute solution de cette équation peut se mettre sous la forme

$$x = \rho \cos \varphi,$$

---

(1)  $\omega$  sommet, cercle C base.

$\rho$  satisfaisant à l'équation différentielle

$$(2) \quad \rho'' - \frac{c^2}{\rho^3} + \rho A(t) = 0,$$

où  $c$  désigne une constante à laquelle on peut donner une valeur arbitraire, autre que zéro (1 par exemple), tandis que  $\varphi$  a pour valeur

$$\int \frac{c dt}{\rho^2}.$$

Réciproquement, si  $\rho$  est une intégrale quelconque de (2) et  $\varphi$  une fonction primitive de  $\frac{c}{\rho^2}$ , l'intégrale générale de (1) est de la forme

$$C \rho \cos(\varphi + h),$$

$C$  et  $h$  étant les constantes d'intégration. Toute solution  $\zeta(t)$  de l'équation (2) est régulière et de signe constant quand  $t$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

2° Il résulte de ce qui précède que l'équation (2) s'intègre au moyen d'une quadrature dès que l'on en connaît une solution particulière. Sous quelle forme les constantes d'intégration  $\rho_0$  et  $\rho'_0$  figurent-elles dans l'expression de l'intégrale générale ? Interpréter le résultat en considérant les trajectoires du point analytique

$$z = \rho e^{i\varphi},$$

et le lien qui existe entre les trajectoires correspondant aux diverses solutions de l'équation (2). Examiner le cas où  $A$  est une constante positive.

3° On suppose, dans cette troisième partie du problème, que  $A(t)$  reste comprise entre deux constantes positives  $M$  et  $m$ . Démontrer que les intégrales réelles  $x(t)$  de l'équation (1) sont oscillantes, les zéros et les points stationnaires se succédant alternativement à des intervalles moindres que  $\frac{\pi}{2\sqrt{m}}$  et plus grands que  $\frac{\pi}{2\sqrt{M}}$ . Établir, dans les mêmes conditions, quelques propriétés des intégrales réelles  $\rho(t)$  de l'équation (2). Montrer notamment que, si  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont deux valeurs stationnaires con-

sécutives, on a

$$\frac{c}{\sqrt{M}} < \rho_1 \rho_2 < \frac{c}{\sqrt{m}},$$

et que, dans le cas où les amplitudes d'oscillation  $|\rho_2 - \rho_1|$  deviennent infiniment grandes, les intervalles  $|t_2 - t_1|$  correspondants ne deviennent ni infiniment grands ni infiniment petits.

4° Examiner ensuite le cas où  $\Lambda(t)$  est une fonction périodique, de période égale à  $\pi$ . Montrer que, parmi les intégrales de (1), il en existe alors en général deux, linéairement distinctes, qui sont multipliées par les facteurs  $\lambda$  et  $\frac{1}{\lambda}$  quand on change  $t$  en  $t + \pi$ ,  $\lambda$  étant racine de l'équation du second degré à coefficients réels

$$\lambda^2 - k\lambda + 1 = 0.$$

Quelles sont les propriétés des intégrales réelles de (1) et (2) qui correspondent aux diverses hypothèses :

$$k > 2 \quad \text{ou} \quad k < -2, \quad \text{ou} \quad k^2 < 4, \quad \text{ou} \quad k = \pm 2?$$

Montrer que la condition  $k^2 < 4$  est suffisante, et la condition  $k^2 \leq 4$  nécessaire pour que (2) admette une solution périodique.

(On dit alors que les solutions de (1) sont stables.)

5° Démontrer que,  $\Lambda(t)$  étant toujours supposée périodique, le nombre  $N$  des zéros d'une intégrale réelle de (1), contenus dans l'intervalle  $(0, T)$ , est donné par la formule

$$N = \alpha T + r,$$

$\alpha$  étant fixe et  $r$  restant borné.

6° On pose en particulier

$$A = q^2 + q_1 \cos 2t,$$

$q$  et  $q_1$  étant des constantes réelles, qui vérifient l'inégalité

$$|q_1| < q^2.$$

Démontrer que si l'intervalle  $(q^2 - q_1, q^2 + q_1)$  ne renferme



le carré d'aucun nombre entier, l'équation (1) n'admet que des solutions stables.

SOLUTION PAR M. BERTRAND GAMBIER.

I. Si  $t$  est considéré comme le temps, l'équation (1) du texte est celle du mouvement sur  $Ox$  d'un point de masse 1, soumis de la part du point fixe  $O$  à une force dirigée sur  $Ox$  et mesurée algébriquement par  $-xA(t)$  (attractive si  $A$  est positif, répulsive si  $A$  est négatif). On peut considérer un axe  $Oy$  perpendiculaire au premier, puis l'équation analogue

$$(1') \quad y'' + yA(t) = 0$$

avec l'interprétation analogue.

Les équations (1) et (1') peuvent être aussi étudiées *ensemble* : ce sont alors les équations du mouvement d'un point  $(x, y)$  de masse 1, soumis à une force centrale, issue de  $O$ , égale algébriquement à  $-\rho A(t)$ . Les équations (1) et (1') admettent la combinaison intégrable

$$xy'' - yx'' = 0,$$

d'où l'intégrale des aires

$$xy' - yx' = \rho^2 \varphi' = c,$$

où  $c$  est une constante numérique arbitraire ; si  $c$  est nulle,  $\varphi$  est constant, la trajectoire est une droite issue de  $O$ , qu'on prendra pour nouvel axe des  $x$ , de sorte que l'on retombe sur l'équation (1). On supposera donc  $c \neq 0$ , ce qui revient à considérer deux intégrales de l'équation (1) linéairement distinctes, c'est-à-dire ne s'annulant pas ensemble. On a aussitôt

$$\begin{aligned} \rho^2 &= x^2 + y^2, & \rho \rho' &= xx' + yy', \\ \rho \rho'' + \rho'^2 &= x'^2 + y'^2 + xx'' + yy'' = x'^2 + y'^2 - A\rho^2. \end{aligned}$$

L'identité

$$(x'^2 + y'^2)(x^2 + y^2) = (xy' - yx')^2 + (xx' + yy')^2$$

permet d'écrire

$$\rho^3 \rho'' = c^2 - A\rho^4$$

ou l'équation (2) de l'énoncé

$$(2) \quad \rho'' = \frac{c^2}{\rho^3} - A\rho$$

Le calcul fait s'applique aussi aux intégrales nouvelles de (1),  $\lambda x$  et  $\frac{y}{\lambda}$ , pour lesquelles la constante des aires est *la même* que précédemment; une rotation d'ensemble des axes donne aussi ( $\lambda$  et  $h$  constantes quelconques)

$$\lambda(x \cos h - y \sin h), \quad \frac{x \sin h + y \cos h}{\lambda}$$

ou, si l'on préfère,

$$\lambda \rho \cos(\varphi + h), \quad \frac{\rho \sin(\varphi + h)}{\lambda}$$

de sorte que, si  $\rho$  est une solution *quelconque* de (2), la quadrature  $\varphi = \int \frac{c dt}{\rho^2}$  donne l'intégrale *générale* de (1)

$$(3) \quad \lambda \rho \cos(\varphi + h),$$

et la solution *générale* R de (2)

$$(4) \quad R^2 = \rho^2 \left[ \lambda^2 \cos^2(\varphi + h) + \frac{\sin^2(\varphi + h)}{\lambda^2} \right]$$

avec les deux constantes arbitraires  $\lambda$  et  $h$ .

Comme  $x$  et  $y$ , solutions de (1), sont régulières pour toutes les valeurs finies et réelles de  $t$ , sous les hypothèses de l'énoncé [A ( $t$ ) fonction analytique de la variable indépendante  $t$ , réelle et régulière pour toutes les valeurs réelles et finies de  $t$ ], la fonction  $x^2 + y^2$  est aussi réelle et régulière : on a choisi le couple  $(x, y)$  de sorte que  $xy' - yx'$  soit égale à la constante  $c$  non nulle : de la sorte, quelle que soit  $t$ , réelle et finie,  $x'$  et  $y'$  étant aussi *finies*,  $x$  et  $y$  ne peuvent s'annuler ensemble, donc  $x^2 + y^2$  n'a aucun zéro réel à distance finie ; sa racine carrée  $\rho$  est régulière et de signe constant quand  $t$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$  ; nous pourrions supposer la détermination  $\rho$ , adoptée, *positive*.

II. La formule (4) nous donne l'intégrale générale de (2). Or, associer une solution *quelconque* X de (1) à une autre solution *quelconque* Y de (1) [ou (1')] revient manifestement à écrire les équations de la transformation *affine générale*

$$(5) \quad \begin{cases} X = \lambda x + \mu y, \\ Y = \lambda' x + \mu' y, \end{cases}$$

effectuée, soit sur tout le plan  $(x, y)$ , soit sur la trajectoire *particulière*  $\gamma(x, y)$  étudiée au n° I; le point  $(x, y)$  est l'affixe du point imaginaire  $z = \rho e^{i\varphi}$ . Or, si l'on suppose d'abord les deux formes quadratiques

$$x^2 + y^2, \quad (\lambda x + \mu y)^2 + (\lambda' x + \mu' y)^2$$

non proportionnelles ( $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$  ayant des valeurs fixes), chacune égalée à zéro, donne deux droites imaginaires de sorte qu'il existe un couple et un seul de deux axes réels rectangulaires  $(Ox_1, Oy_1)$  liés aux axes  $(Ox, Oy)$  <sup>(1)</sup>, ayant pour transformés deux axes  $(OX_1, OY_1)$  rectangulaires aussi, liés aux axes  $(OX, OY)$ . Il résulte de là que la transformation *générale* (5) à quatre paramètres  $(x, y; X, Y)$  est équivalente à la suite des substitutions

$$(x, y; x_1, y_1; X_1, Y_1; X, Y)$$

définies par

$$(6) \quad \begin{cases} x_1 = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \\ y_1 = x \sin \alpha + y \cos \alpha, \end{cases}$$

$$(7) \quad \begin{cases} X_1 = l x_1, \\ Y_1 = m y_1, \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{cases} X = X_1 \cos \beta - Y_1 \sin \beta, \\ Y = X_1 \sin \beta + Y_1 \cos \beta. \end{cases}$$

Le résultat est évident si l'on regarde les plans  $Oxy$  et  $OXY$  comme distincts et simplement réunis par le point  $O$ : on peut, par une rotation, supposer les deux directions rectangulaires  $Ox_1, Oy_1$  coïncidant avec l'ensemble des deux directions rectangulaires  $OX_1, OY_1$ , qui leur correspondent et il suffit d'introduire la rotation  $\alpha$  amenant  $Ox$  sur  $Ox_1$ , puis la rotation  $\beta$  amenant  $OX_1$  sur  $OX$ ; on retrouve les quatre paramètres, sous la forme  $l, m, \alpha, \beta$  au lieu de  $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ . Le déterminant jacobien  $\frac{D(X, Y)}{D(x, y)}$  ou  $\lambda\mu' - \mu\lambda'$  est égal au produit des déterminants jacobiens successifs  $\frac{D(X, Y)}{D(X_1, Y_1)}, \frac{D(X_1, Y_1)}{D(x_1, y_1)}, \frac{D(x_1, y_1)}{D(x, y)}$ , donc finalement à la quantité  $lm$ .

---

(1) Ce sont les rayons doubles de l'involution définie par les couples  $x^2 + y^2 = 0$  et  $(\lambda x + \mu y)^2 + (\lambda' x + \mu' y)^2 = 0$ .

La quantité

$$(9) \quad R^2 \equiv X^2 + Y^2 \equiv (\lambda x + \mu y)^2 + (\lambda' x + \mu' y)^2 \equiv A x^2 + 2 B xy + C y^2$$

est la forme quadratique *générale* en  $x$  et  $y$ , de sorte que  $u \equiv R^2$  satisfait à une équation linéaire d'ordre 3 que nous allons former ; on voit aussitôt que

$$(10) \quad AC - B^2 = (\lambda \mu' - \mu \lambda')^2.$$

Dans le numéro précédent, nous nous sommes bornés au cas où la transformation affine (5) conserve les aires, de sorte que

$$\lambda \mu' - \mu \lambda' = lm = \pm 1$$

et alors  $R$  satisfait à l'équation

$$R^3 R'' + A R^4 = c^2$$

du second ordre, où  $c$  est la valeur de  $xy' - yx'$  ; l'équation d'ordre 3 annoncée s'obtient évidemment en écrivant

$$(11) \quad \frac{d}{dt} [R^3 R'' + A R^4] = 0.$$

Si l'on introduit la fonction  $u \equiv R^2$ , on a

$$u' = 2 R R', \quad u'' = 2 R'^2 + 2 R R''$$

de sorte que (11) devient

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{u'' u}{2} - \frac{u'^2}{4} + A u^2 \right] = 0$$

et, en réduisant,

$$(12) \quad u''' + 2 A' u + 4 A u' = 0.$$

La disparition d'une constante sur les quatre contenues par (5) tient à ce que sur les paramètres  $(\alpha, l, m, \beta)$  le dernier  $\beta$  ne modifie pas  $R$ . Si l'on considère deux trajectoires  $\gamma$  ne différant que par une rotation autour de  $O$ , la transformation affine (5) leur fait correspondre des trajectoires  $\Gamma$  non égales.

La partie I suppose donc  $m = \frac{1}{2}$  ; on peut d'ailleurs, au lieu des opérations (6), (7), (8), introduire une quatrième opération en

écrivait :

$$(6') \quad \begin{cases} x_1 = x \cos \alpha - \varepsilon y \sin \alpha \\ y_1 = x \sin \alpha + \varepsilon y \cos \alpha \end{cases} \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

$$(7') \quad \begin{cases} \bar{X}_1 = k x_1, \\ \bar{Y}_1 = k y_1, \end{cases}$$

$$(7'') \quad \begin{cases} X_1 = l \bar{X}_1, \\ Y_1 = \frac{\bar{Y}_1}{l}, \end{cases}$$

$$(8') \quad \begin{cases} X = X_1 \cos \beta - Y_1 \sin \beta, \\ Y = X_1 \sin \beta + Y_1 \cos \beta, \end{cases}$$

on a ainsi deux substitutions orthogonales, une homothétie et la substitution très simple, conservant les aires, définie par (7''); la partie I revient à supposer  $k = 1$ .

Le cas signalé plus haut où  $x^2 + y^2$  et  $(\lambda x + \mu y)^2 + (\lambda' x + \mu' y)^2$  ne diffèrent que par un facteur de proportionnalité revient à se borner aux opérations (6') et (7').

D'autre part, comme on passe de l'équation (2)

$$(2) \quad \rho'' = \frac{c^2}{\rho^3} - A \rho$$

à l'équation

$$(2') \quad \rho_1'' = \frac{c_1^2}{\rho_1^3} - A \rho_1$$

par la substitution  $\frac{\rho_1^2}{\rho^2} = \frac{c_1}{c}$  [homothétie prévue par (7')] les explications qui précèdent prouvent bien que, si  $\rho$  est une solution particulière de (2), l'unique quadrature  $\int \frac{dt}{\rho^2}$  fournit la solution générale soit de (2), soit de (2'), soit de (12), par la formule (4) déjà donnée s'il s'agit de (2), ou la formule analogue

$$(4') \quad R^2 = \rho^2 [\lambda^2 \cos^2(\varphi + h) + \mu^2 \sin^2(\varphi + h)]$$

s'il s'agit de (12).

Il est intéressant de constater qu'une courbe  $\gamma$  quelconque conduit à une fonction  $A(t)$  et une équation (2) de l'espèce indiquée ici, pourvu que  $\gamma$  ne passe pas à l'origine et tourne sa concavité vers l'origine; il suffit en effet de poser

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad c dt = \rho^2 d\varphi,$$

puis

$$A = \frac{-x''}{x}.$$

On a un calcul plus symétrique en écrivant

$$(13) \quad \begin{cases} \rho'_t = \rho'_\varphi \frac{c}{\rho^2}, & \rho''_t = \rho''_\varphi \frac{c^2}{\rho^4} - 2\rho'^2_\varphi \frac{c^2}{\rho^5}, \\ \rho = \frac{1}{u}, & \rho'_\varphi = -\frac{u'_\varphi}{u^2}, & \rho''_\varphi = -\frac{u''_\varphi}{u^2} + \frac{2u'^2_\varphi}{u^3}. \end{cases}$$

On trouve ainsi

$$(14) \quad A = c^2 u^3 (u + u''_\varphi),$$

de sorte que  $t$ ,  $A$  et  $\rho$  sont exprimées au moyen de  $\varphi$ .

Quand on suppose que  $A$  est une constante positive, on a une trajectoire  $\gamma$ , particulière, circulaire

$$(15) \quad x = \cos(t\sqrt{A}), \quad y = \sin(t\sqrt{A}),$$

et la transformation affine lui substitue une ellipse

$$(16) \quad X = \lambda \cos[\sqrt{A}(t - t_0)], \quad Y = \mu \sin[\sqrt{A}(t - t_1)],$$

la valeur de  $c$  étant

$$c = \lambda\mu\sqrt{A} \cos[(t_1 - t_0)\sqrt{A}].$$

III. Supposons maintenant que  $A(t)$  reste comprise entre deux constantes positives  $M$  et  $m$ . Comme l'équation étudiée

$$x'' + xA(t) = 0$$

ne change pas si  $x$  change de signe, nous pouvons supposer que la valeur  $x_0$  correspondant à  $t_0$  est positive; deux cas à distinguer suivant que  $x'_0$  est positive ou négative.

Soit le premier cas :  $x_0 > 0$ ,  $x'_0 > 0$ . La quantité  $x''_0$  est négative, de sorte que  $x'$  diminue, mais reste positive, pendant un laps de temps limité : en effet, dans ce laps de temps,  $x$  croît, reste positif et l'on écrit

$$(17) \quad \begin{aligned} x'' &= -x A(t), \\ x'_0 \geq x'_0 - x' &= \int_{t_0}^t x A(t) dt > x_0 m (t - t_0), \\ t - t_0 &\leq \frac{x'_0}{m x_0}. \end{aligned}$$

La dérivée  $x'$  s'annule donc avant l'époque  $t_0 + \frac{x'_0}{m x_0}$ , et puisque  $x''$  est encore négative,  $x'$  devient négative ; nous rentrons dans le second cas.

Soit maintenant le second  $x_0 > 0$ ,  $x'_0 < 0$  ;  $x''$  est négative,  $x'$  diminue, par valeurs négatives, donc  $|x'|$  augmente pendant que  $x$  diminue ; l'espace  $x_0$  est parcouru en un temps inférieur à  $\frac{x_0}{|x'_0|}$  ; à partir du temps où  $x$  s'annule,  $x'$  étant encore négative non nulle,  $x$  décroît, devient négatif et le changement de signe, légitime sur  $x$ , nous ramène au premier cas ; les intégrales réelles  $x(t)$  sont donc bien oscillantes ; les zéros sont tous simples et correspondent à des points d'inflexion de la courbe  $(t, x)$ . Dans le second cas, on voit aisément que la vitesse reste bornée pendant le retour à zéro, car

$$(18) \quad \begin{aligned} x'_0 - x' &= \int_{t_0}^t x A(t) dt \leq x_0 M(t - t_0) \leq \frac{M x_0^2}{|x'_0|}, \\ |x'| &\leq |x'_0| + \frac{M x_0^2}{|x'_0|}. \end{aligned}$$

Les résultats obtenus par cette voie directe ne sont pas suffisamment précis ; nous allons comparer une intégrale  $\xi$  de

$$\xi'' + \xi \alpha(t) = 0$$

à une intégrale  $\eta$  de  $\eta'' + \eta \beta(t) = 0$ , en supposant  $\alpha(t) \geq \beta(t) > 0$  et  $\xi_0 = \eta_0 \geq 0$ ,  $\xi'_0 = \eta'_0 > 0$ . Quand  $t$  tend vers  $t_0$ , le quotient  $\frac{\eta}{\xi}$  tend vers 1 : pour  $\xi_0 = \eta_0 \neq 0$ , c'est évident, et pour  $\xi_0 = \eta_0 = 0$ , la règle de l'Hospital donne le résultat. Si l'on se borne au temps où  $\xi$  et  $\eta$  sont tous deux positifs, on a

$$\xi'' \eta - \xi \eta'' = \xi \eta (\beta - \alpha) < 0,$$

de sorte que la fonction  $\xi' \eta - \xi \eta'$  est décroissante, donc négative, puisque, pour  $t_0$ , elle est nulle. La dérivée de  $\frac{\xi}{\eta}$  est négative, donc  $\frac{\xi}{\eta} < 1$  et, en se bornant même au laps de temps où  $\eta'$  reste positif, on a

$$(19) \quad \frac{\xi'}{\eta'} < \frac{\xi}{\eta} < 1, \quad \xi < \eta, \quad \xi' < \eta'.$$

Ceci entraîne que  $\xi$  atteint son premier point stationnaire avant

que  $\eta$  atteigne le sien, l'élongation de ce point stationnaire étant également plus petite pour  $\xi$  que pour  $\eta$ .

Si l'on suppose  $M > A(t) > m$ , on pourra supposer d'abord  $x \equiv \xi$ ,  $\alpha(t) \equiv A(t)$ ,  $\beta(t) \equiv m$ ; on a alors

$$\begin{aligned} \eta &= \lambda \sin[\sqrt{m}(t-h)] & \lambda^2 &= \eta^2 + \frac{\eta'^2}{m} \\ \eta' &= \lambda \sqrt{m} \cos[\sqrt{m}(t-h)] \end{aligned}$$

L'élongation de  $x$  reste inférieure à  $\sqrt{x_0^2 + \frac{x_0'^2}{m}}$ ; le point stationnaire de  $x$  est atteint, en supposant  $x_0 = 0$ , avant l'époque  $\frac{\pi}{2\sqrt{m}}$  et est à une distance de l'origine moindre que  $\frac{|x_0'|}{\sqrt{m}}$ . On peut, au contraire, supposer  $x \equiv \eta$ ,  $\beta(t) \equiv A(t)$ ,  $\alpha(t) \equiv M$  et l'on voit que, supposant  $x_0 = 0$ , le point stationnaire de  $x$  est atteint après l'époque  $\frac{\pi}{2\sqrt{M}}$  et est à une distance de l'origine supérieure à  $\frac{|x_0'|}{\sqrt{M}}$ .

Nous venons de raisonner pour un zéro de  $x$  et le point stationnaire le suivant immédiatement; les mêmes résultats sont valables pour un point stationnaire et le zéro suivant: un raisonnement direct analogue le prouve, mais il est commode de poser

$$t = -t_1, \quad x = x_1, \quad x' = -x'_1, \quad x'' = x''_1$$

(les dérivées sans indice étant prises par rapport à  $t$ , celles avec indice par rapport à  $t_1$ ); la courbe  $(t, x)$  se trouve parcourue en sens inverse. Une conséquence intéressante est la suivante: partons d'un zéro de  $x$  avec la vitesse (absolue)  $v_0$ , le point stationnaire suivant est à la distance  $D$  telle que

$$(20) \quad \frac{v_0}{\sqrt{M}} \leq D \leq \frac{v_0}{\sqrt{m}}.$$

De ce point stationnaire,  $x$  revient à l'origine, la vitesse  $v_1$  à l'origine satisfaisant à l'inégalité

$$(21) \quad \frac{v_1}{\sqrt{M}} \leq D \leq \frac{v_1}{\sqrt{m}}$$

ou, si l'on préfère,

$$(22) \quad D\sqrt{m} \leq v_1 \leq D\sqrt{M}.$$

Le point stationnaire suivant, situé par rapport à  $O$  du côté opposé



à celui déjà étudié, est à une distance  $D_1$ , comprise entre  $\frac{v_1}{\sqrt{M}}$  et  $\frac{v_1}{\sqrt{m}}$ , autrement dit (<sup>1</sup>)

$$(23) \quad D\sqrt{\frac{m}{M}} \leq D_1 \leq D\sqrt{\frac{M}{m}}.$$

La courbe  $(t, x)$  est donc une espèce de sinusoïde n'ayant d'autres points d'inflexion que ceux où elle perce l'axe des  $t$ , dont les boucles ont, sur l'axe des  $t$ , une longueur limitée inférieurement et supérieurement  $\left(\frac{\pi}{\sqrt{M}} \text{ et } \frac{\pi}{\sqrt{m}}\right)$ , pendant que l'amplitude parallèlement à  $Ox$  de la boucle peut offrir des caractères différents :  $A$  constant et positif donne une amplitude constante ;  $A$  périodique peut donner, comme on le verra plus bas, des amplitudes variant en progression géométrique (de raison supérieure ou inférieure à l'unité). Ce sont les deux cas extrêmes pour la variation de cette amplitude (en supposant  $A$  positive et non nulle).

Étudions maintenant la fonction  $\rho$  ; quand  $t$  augmente indéfiniment,  $\rho$  peut ou bien varier toujours dans le même sens, au moins à partir d'une certaine époque, ou bien admettre indéfiniment des alternances de variation.

Dans le premier cas, si  $\rho$  va *toujours en croissant*, il ne peut augmenter au delà de toutes limites ; sinon, en vertu de l'équation (2),  $\rho''$  deviendrait infiniment grande négative, donc  $\rho'$  aussi et il y aurait contradiction puisque  $\rho$  est supposé croissant :  $\rho$  ne peut donc que croître jusqu'à une limite finie. Le même raisonnement prouve que si  $\rho$  va *constamment en décroissant*, il tend, non pas vers zéro, mais vers une valeur limite supérieure à zéro. Un cas simple où l'une et l'autre de ces circonstances peut se trouver réalisée est celui où  $A(t)$  tend vers une limite déterminée  $a^2$  quand  $t$  augmente indéfiniment,  $\rho$  tendant vers  $\sqrt{\frac{c}{a}}$ .

Comme application de la fin du n° II, prenons la courbe

$$\rho^2 = \frac{\varphi^2 + 2}{\varphi^2 + 1},$$

(<sup>1</sup>) On a aussi

$$v_0 \sqrt{\frac{m}{M}} \leq v_1 \leq v_0 \sqrt{\frac{M}{m}}.$$

$\rho$  tend vers 1, en décroissant, quand  $\varphi$  augmente indéfiniment ; on aura ici

$$ct = \varphi + \text{arc tang } \varphi, \quad u = \sqrt{\frac{\varphi^2 + 1}{\varphi^2 + 2}},$$

$$\frac{u'_{\varphi}}{u} = \frac{\varphi}{(\varphi^2 + 1)(\varphi^2 + 2)}, \quad \frac{u''_{\varphi}}{u} - \frac{u'^2_{\varphi}}{u^2} = \frac{1}{(\varphi^2 + 1)(\varphi^2 + 2)} - \frac{2\varphi^2(2\varphi^2 + 3)}{(\varphi^2 + 1)^2(\varphi^2 + 2)^2}$$

et l'on calcule A par la formule, sans radical

$$A = c^2 u^4 \left[ 1 + \frac{u''}{u} \right].$$

On a ainsi

$$A = \frac{c^2 [\varphi^8 + 6\varphi^6 + 10\varphi^4 + 10\varphi^2 + 6]}{(\varphi^2 + 2)^4}.$$

Quand  $\varphi$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ ,  $t$  varie aussi de  $-\infty$  à  $+\infty$  et la fonction A reste comprise entre deux limites positives  $m$  et  $M$  faciles à déterminer : on peut dire que  $t$  croissant indéfiniment, il s'établit un régime sensiblement permanent, où les trajectoires sont sensiblement soit le cercle  $\rho = 1$  décrit d'un mouvement uniforme, soit les ellipses qui en dérivent par la transformation affine indiquée plus haut.

Supposons maintenant que  $\rho$  ait, pendant un certain temps (limité ou non), des alternatives de croissance et de décroissance ; soit un minimum  $\rho_1$  suivi d'un maximum  $\rho_2$ . On écrit

$$(24) \quad 2\rho' \rho'' = \frac{2c^2 \rho'}{\rho^3} - 2A \rho \rho',$$

d'où intégrant entre les limites  $t_1$  et  $t_2$  ( $\rho_1 = \rho_2 = 0$ )

$$(25) \quad \frac{c^2}{\rho_1^2} - \frac{c^2}{\rho_2^2} = \int_{t_1}^{t_2} A(2\rho\rho') dt.$$

Puisque  $\rho$  et  $\rho'$  sont positives, l'intégrale du second membre est comprise entre celles que l'on obtient en remplaçant A par  $m$  ou  $M$ , d'où

$$(26) \quad m(\rho_2^2 - \rho_1^2) \leq \frac{c^2}{\rho_1^2} - \frac{c^2}{\rho_2^2} \leq M(\rho_2^2 - \rho_1^2).$$

La suppression du facteur  $\rho_2^2 - \rho_1^2$ , qui est positif, donne aussitôt

$$(27) \quad \frac{c}{\sqrt{M}} \leq \rho_1 \rho_2 \leq \frac{c}{\sqrt{m}}.$$

Même raisonnement si le maximum précède le minimum.

Supposons, de plus, d'abord que  $\rho$  ait indéfiniment des alternatives de croissance et de décroissance, puis, que l'oscillation  $|\rho_2 - \rho_1|$  devienne infiniment grande; supposons  $\rho_2 > \rho_1$ , il est nécessaire que  $\rho_2$  soit infiniment grand;  $\rho_1$  qui est compris entre  $\frac{1}{\rho_2} \frac{c}{\sqrt{M}}$  et  $\frac{1}{\rho_2} \frac{c}{\sqrt{m}}$  est donc infiniment petit. Prenons comme axe  $Ox$  la droite passant par le minimum  $(\rho_1, \varphi_1)$ ; on aura

$$(28) \quad x_1 = \rho_1, \quad x'_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad y'_1 = \frac{c}{x_1}.$$

Au bout d'un temps  $\theta$ , *limité, non nul*, compris entre  $\frac{\pi}{2\sqrt{M}}$  et  $\frac{\pi}{2\sqrt{m}}$ ,  $y$  atteint un *maximum* compris entre  $\frac{y'_1}{\sqrt{M}}$  et  $\frac{y'_1}{\sqrt{m}}$ , donc *très grand*; pendant cette période  $x$  est resté très petit, de l'ordre de  $\rho_1$ , car les maxima et minima successifs de  $x$  se succèdent à des intervalles de temps compris entre  $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$  et  $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$ ; le temps  $\theta$  ne peut comprendre qu'un nombre limité de ces intervalles compris entre  $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{M}}$  et  $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{M}{m}}$ ; nous avons vu que chaque maximum de  $|x|$  est inférieur au précédent multiplié par  $\sqrt{\frac{M}{m}}$ , de sorte que  $x$  est resté inférieur à

$$\rho_1 \left( \sqrt{\frac{M}{m}} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{M}{m}}$$

et par suite est resté de l'ordre de  $\rho_1$ :  $x^2 + y^2$  ne peut donc devenir très grand que si  $y$  devient très grand et le maximum de  $x^2 + y^2$  sera sensiblement atteint en même temps que le maximum de  $|y|$ ; l'intervalle  $|t_2 - t_1|$  correspondant à  $|\rho_2 - \rho_1|$  est de l'ordre de  $\theta$ , compris entre  $\frac{\pi}{2\sqrt{m}}$  et  $\frac{\pi}{2\sqrt{M}}$ : il n'est ni infiniment petit, ni infiniment grand.

IV. On suppose  $A(t + \pi) \equiv A(t)$ ; les fonctions  $X(t) \equiv x(t + \pi)$  et  $Y \equiv y(t + \pi)$  sont intégrales de l'équation  $x'' + x A(t) = 0$ , avec la même valeur de la constante  $c$ . On peut écrire avec certaines constantes  $l, m, l', m'$  bien déterminées

$$(29) \quad \begin{cases} X(t) \equiv l x(t) + m y(t) \\ Y(t) \equiv l' x(t) + m' y(t) \end{cases} \quad lm' - ml = 1.$$

On peut déterminer la constante  $\mu$  de sorte que

$$(30) \quad Y + \mu X \equiv \lambda(y + \mu x),$$

où  $\lambda$  est une nouvelle constante. Cela entraîne

$$\frac{m' + \mu m}{1} = \frac{l' + \mu l}{\mu} = \lambda.$$

L'élimination de  $\mu$  donne aussitôt l'équation du second degré

$$(31) \quad \lambda^2 - (l + m')\lambda + 1 = 0.$$

La constante  $k$  de l'énoncé est  $l + m'$ ; on a d'ailleurs

$$\mu = \frac{\lambda - m'}{m} = \frac{l'}{\lambda - l}.$$

Si  $k^2 > 4$ , les deux racines  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  (ou  $\mu_1$  et  $\mu_2$ ) sont réelles et distinctes; on peut prendre pour nouveaux axes  $Ox$  et  $Oy$  les deux droites  $y + \mu_1 x = 0$ ,  $y + \mu_2 x = 0$ ; si  $\theta$  est leur angle, on aura

$$(32) \quad \begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 + 2xy \cos \theta, \\ \begin{cases} X \equiv x(t + \pi) \equiv \lambda_1 x, \\ Y \equiv y(t + \pi) \equiv \frac{y}{\lambda_1}. \end{cases} \end{cases}$$

Aux zéros, ou points stationnaires de  $x$  (ou  $y$ ) correspondent les points analogues de  $X$  (ou  $Y$ ); dans un intervalle de longueur  $\pi$ , il y a un certain nombre (entier positif)  $D$  de zéros (et aussi de points stationnaires) de  $x$  <sup>(1)</sup>; cela entraîne d'abord l'existence des nombres  $m$  et  $M$  puisque  $A(t)$  est supposée réelle et régulière de  $t = -\infty$  à  $t = +\infty$ : ici il suffira d'étudier  $A(t)$  de  $t_0$  à  $t_0 + \pi$ , pour obtenir  $m$  et  $M$  [ $A(t)$  étant de plus supposée positive]; en se rappelant que l'écart de deux zéros successifs est compris entre  $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$  et  $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$  on peut écrire

$$(33) \quad D \frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq \pi \leq D \frac{\pi}{\sqrt{m}}$$

ou, ce qui revient au même,

$$(34) \quad m \leq D^2 \leq M.$$

---

(1) On verra plus bas que le nombre  $D$  est le même pour l'intégrale  $\gamma$  (n° V).

Les nombres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$  sont distincts ; on peut supposer  $|\lambda_1| < 1$  ; on voit d'ailleurs que  $\lambda_1 > 0$  entraîne que  $D$  soit *pair* et que  $\lambda_1 < 0$  entraîne  $D$  *impair* ; les amplitudes des maxima de  $|x|$  sont multipliés par  $|\lambda_1|$  en passant de l'un au suivant. Ici la courbe  $(x, y)$  s'allonge de plus en plus du côté de l'axe des  $x$  en se rétrécissant de plus en plus dans la direction parallèle à  $Oy$  et les écarts  $|\rho_2 - \rho_1|$  augmentent indéfiniment. (La transformation affine peut changer arbitrairement l'angle  $Ox, Oy$ .)

Si  $k = +2$ , on a  $\lambda_1 = \lambda_2 = +1$  et il n'y a plus, pour répondre à la question, qu'une intégrale réelle, d'ailleurs périodique ; prenons la droite  $y + \mu x = 0$  en question comme nouvel axe des  $x$ . On aura

$$(35) \quad \begin{cases} X \equiv x(t + \pi) \equiv x(t) + my(t), \\ Y \equiv y(t + \pi) \equiv y(t). \end{cases}$$

Dans un intervalle arbitraire  $(t_0, t_0 + \pi)$  la fonction  $y$  a un nombre constant  $D$  *pair* de zéros (ou points stationnaires) et l'on a encore l'inégalité (34). La courbe  $(x, y)$  reste tangente à une série de  $D$  droites fixes parallèles à  $Ox$  ; elle coupe l'axe des  $x$  en  $D$  points fixes fournis par les racines de  $y(t)$  comprises entre  $t_0$  et  $t_0 + \pi$  ; elle s'allonge de plus en plus parallèlement à  $Ox$ .

Si  $k = -2$ , on a  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$  et il n'y a pas grand'chose de changé ; le nombre  $D$  est *impair* et les droites, parallèles à  $Ox$ , tangentes à la courbe  $(x, y)$  sont en nombre pair  $2D$ , deux à deux symétriques par rapport à l'origine ; les points fixes où la courbe perce  $Ox$  sont également en nombre pair  $2D$  et symétriques deux à deux par rapport à  $O$  ; les formules (35) sont remplacées par

$$(36) \quad \begin{cases} X \equiv x(t + \pi) \equiv -x(t) + my(t), \\ Y \equiv y(t + \pi) \equiv -y(t). \end{cases}$$

Pour ces deux cas  $k = \pm 2$ , les résultats énoncés se rapportent à  $m \neq 0$  ; si  $m$  est nul,  $x$  et  $y$  sont périodiques toutes deux, ainsi que toutes les intégrales de (1) : période  $\pi$  si  $\lambda_1 = +1$ , demi-période  $\pi$  si  $\lambda_1 = -1$ , et la trajectoire  $(x, y)$  est parcourue périodiquement, en le temps  $\pi$  si  $\lambda_1 = +1$ , en le temps  $2\pi$  si  $\lambda_1 = -1$ , et dans ce dernier cas l'origine est centre. Ce cas  $k = \pm 2, m = 0$ , exige que  $\mu$  soit indéterminé, d'où  $m = 0, l' = 0, m' = l = \lambda = \pm 1$ .

Si  $k^2 < 4$ , les deux racines  $\mu_1$  et  $\mu_2$  (ou  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ ) sont distinctes,

mais imaginaires conjuguées ;  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ont pour module commun l'unité ; si les deux droites conjuguées imaginaires  $y + \mu_1 x = 0$ ,  $y + \mu_2 x = 0$  ne sont pas isotropes, on prend pour nouveaux axes  $Ox$ ,  $Oy$  leurs bissectrices, qui sont réelles et bien déterminées. On a alors  $\mu_1 = -\mu_2 = i m_1$ , où  $m_1$  est réelle ; on écrit donc, avec une constante  $\omega$  réelle,

$$(37) \quad \begin{cases} Y + i m_1 X = e^{i\omega} (y + i m_1 x), \\ Y - i m_1 X = e^{-i\omega} (y - i m_1 x). \end{cases}$$

On a le droit d'effectuer la substitution de module unité

$$\left( x, y; \frac{x_1}{\sqrt{m_1}}, y_1 \sqrt{m_1} \right)$$

ce qui, supprimant les indices, ramène (37) à la forme plus simple

$$(38) \quad \begin{cases} Y + iX = e^{i\omega} (y + ix), \\ Y - iX = e^{-i\omega} (y - ix), \end{cases}$$

qui correspond purement et simplement à une rotation de l'angle  $\omega$  pour passer du point  $(x, y)$  au point  $(X, Y)$  ; la courbe  $\gamma$  précisée étudiée se compose donc d'une infinité d'arcs congruents, ne différenciant les uns des autres que par une rotation d'amplitude  $\omega$  autour de l'origine ; la fonction  $\rho^2$  correspondante admet donc la période  $\pi$ . Si les droites  $y + \mu_1 x = 0$ ,  $y + \mu_2 x = 0$  sont isotropes, on a précisément la forme (38) sans intermédiaires.

Dans chaque cas  $k^2 > 4$ ,  $k^2 < 4$ ,  $k^2 = 4$  nous avons mis en évidence une trajectoire particulière possédant des propriétés remarquables ; la transformation affine générale étant effectuée, on verra sans peine la modification de ces propriétés (le cas  $k^2 = 4$ ,  $m = 0$  est exceptionnel).

La discussion complète prouve donc que la condition  $k^2 < 4$  est *suffisante* pour trouver une solution  $\rho$  de (2) périodique, cette solution  $\rho$  étant unique d'ailleurs ; pour  $k^2 > 4$ , il n'en existe plus, donc  $k^2 \leq 4$  est bien *nécessaire* ; le cas  $k^2 = 4$ , *en général*, ne donne aucune solution  $\rho$  périodique ; *exceptionnellement* pour  $k^2 = 4$  toutes les solutions de (2) peuvent être périodiques.

V. Quand on suppose  $A(t)$  simplement positive, toujours comprise entre  $m$  et  $M$ , on voit aussitôt que les zéros de deux intégrales

réelles *quelconques* de (1) se séparent ; en effet la trajectoire  $(x, y)$  est parcourue, toujours dans le même sens de rotation autour de l'origine ; la concavité est toujours tournée vers l'origine, de sorte que deux zéros consécutifs de  $x$  donnent deux points consécutifs communs à la courbe et l'axe  $Oy$ , l'un étant nécessairement sur la demi-droite  $Oy$ , l'autre sur la demi-droite opposée  $Oy'$  : en route on a rencontré nécessairement une fois et une seule  $x'Ox$ . D'ailleurs, si l'on préfère raisonner analytiquement, on écrit

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{y}{x} \right) = \frac{c}{x^2}.$$

Si l'on suppose  $c > 0$ , on voit que  $\frac{y}{x}$  reste continue entre deux zéros consécutifs de  $x$ , varie de  $-\infty$  à  $+\infty$  en croissant constamment ; elle s'annule donc une seule fois. Un intervalle  $(t_0, t_1)$  qui contient  $D$  zéros de  $x$  contient  $D-1$ ,  $D$  ou  $D+1$  zéros de  $y$ . L'écart de deux zéros consécutifs de  $x$  est au moins  $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$ , au plus  $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$  ; on a nécessairement

$$\frac{(D-1)\pi}{\sqrt{M}} \leq |t_1 - t_0| \leq (D+1) \frac{\pi}{\sqrt{m}}.$$

La dernière inégalité est obtenue en remarquant qu'un intervalle d'étendue  $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$  contient au moins un zéro de  $x$ . On pourra écrire cette double inégalité sous la forme

$$(39) \quad \frac{\sqrt{m}}{\pi} |t_1 - t_0| - 1 \leq D \leq \frac{\sqrt{M}}{\pi} |t_1 - t_0| + 1.$$

Conséquence intéressante : soit des nombres successifs croissants

$$(40) \quad t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n, \dots,$$

et supposons qu'entre  $t_0$  et  $t_1$ ,  $x$  et  $y$  n'aient pas le même nombre de zéros :  $D$  pour  $x$ ,  $D-1$  pour  $y$  ; soit  $(t_{n-1}, t_n)$  le premier intervalle de la suite (40) consécutif à  $(t_0, t_1)$ ,  $n \geq 2$ , où  $x$  et  $y$  n'ont pas le même nombre de zéros ; en étudiant  $(t_0, t_n)$  on voit que c'est  $y$  cette fois qui a un zéro *de plus* que  $x$  dans l'intervalle  $(t_{n-1}, t_n)$ . Ce dernier résultat est intéressant quand  $A(t)$  a la période  $\pi$  ; nous prendrons en effet la suite

$$(41) \quad t_0, t_0 + \pi, \dots, t_0 + (n-1)\pi, t_0 + n\pi, \dots,$$

et puisque  $x(t)$ ,  $x(t + \pi)$ ,  $\dots$ ,  $x[t + (n - 1)\pi]$  sont toutes intégrales de (1), si  $D$  est le nombre de zéros donné pour  $x$  par le premier intervalle (41), tout autre intervalle de la suite (41) en donne  $D$ ,  $D - 1$  ou  $D + 1$ ; si les intervalles (41) ne donnent pas tous le même nombre  $D$ , ils donneront, avec certaines alternances, soit les deux nombres  $D$  et  $D + 1$ , à l'exclusion de  $D - 1$ , soit les deux nombres  $D$  et  $D - 1$  à l'exclusion de  $D + 1$ . Si nous sommes dans le cas d'alternance des nombres  $D$  et  $D + 1$ , il peut arriver que l'alternance ait lieu à chaque fois; il peut arriver au contraire que plusieurs nombres consécutifs soient égaux: supposons que deux nombres  $D$  soient consécutifs (on raisonnerait de même si c'était deux nombres  $D + 1$ ); un intervalle de longueur  $2\pi$  donne  $2D$  zéros de  $x$ , et puisque  $2\pi$  est période de  $A(t)$ , un intervalle *quelconque*  $[t_0 + h\pi, t_0 + (h + 2)\pi]$  ne peut donner que  $2D$  ou  $2D + 1$  zéros, donc les nombres  $D + 1$  fournis par la suite (41) sont *isolés*; on voit, toujours suivant les mêmes principes, que le nombre des quantités  $D$  intercalées entre deux nombres  $D + 1$  est ou *fixe*, égal à un certain entier  $p$ , ou égal, avec certaines alternances, de temps en temps à  $p$  et de temps en temps à  $p + 1$ , et l'on pourrait encore continuer dans cette voie.

Supposant toujours que  $A(t)$  a la période  $\pi$ , il s'agit de préciser la formule (39), de montrer que dans l'intervalle  $(t_0, t_0 + T)$ , où  $T$  est positif arbitraire, le nombre  $N$  de zéros d'une intégrale *arbitraire* de (1) est de la forme

$$(42) \quad N = \alpha T + r,$$

où  $\alpha$  est fixe, *indépendant de  $T$  et de l'intégrale adoptée*, et où  $r$  est *borné*; d'après ce qui précède, il suffit de l'établir pour *une* intégrale  $x$ , *choisie comme on voudra*; pour une autre  $\xi$ ,  $r$  ou bien sera le même ou bien aura varié d'une unité. Pour fixer le choix de  $x$ , il est avantageux de séparer les deux cas  $k^2 \geq 4$  et  $k^2 < 4$ .

Soit le premier cas  $k^2 \geq 4$ : il existe au moins une intégrale *réelle*  $x$  au multiplicateur  $\lambda$  réel (n° IV) et c'est celle-là que nous choisissons;  $t_0$  étant zéro de  $x$ ,  $t_0 + \pi$  est un autre zéro que nous supposons séparé de  $t_0$  par  $D - 1$  autres zéros ( $D \geq 1$ ): l'inégalité (39) est remplacée par l'inégalité plus précise (33) ou (34), déjà obtenue, que je rappelle

$$m \leq D^2 \leq M.$$



Cette fois un intervalle *quelconque* d'étendue  $\pi$  contient  $D$  zéros de  $x$ ; en écrivant

$$T = h\pi + \pi_1,$$

où  $h$  est un entier positif ou nul et  $\pi_1$  un nombre positif inférieur à  $\pi$ , on a évidemment

$$N = hD + k,$$

où  $k$  est l'un des entiers  $0, 1, 2, \dots, D - 1$ . Cela permet d'écrire

$$(43) \quad \begin{cases} N = hD + k = \frac{T - \pi_1}{\pi} D + k = \alpha T + r, \\ \alpha = \frac{D}{\pi}, \quad r = k - \frac{\pi_1}{\pi} D. \end{cases}$$

C'est le résultat annoncé;  $r$  reste compris entre  $-D$  et  $D - 1$ , s'il s'agit de  $x$ , entre  $-(D + 1)$  et  $D$  s'il s'agit d'une autre intégrale  $\xi$ .

En passant, remarquons que  $k^2 > 4$ , sans égalité, donne une autre intégrale  $y$  au multiplicateur  $\frac{1}{\lambda}$ ; dans un intervalle d'étendue  $\pi$ ,  $y$  possède  $D'$  zéros et  $D'$  a pour valeur  $D, D - 1$  ou  $D + 1$ . En prenant un intervalle d'étendue  $n\pi$ , où  $n$  est un entier arbitraire,  $y$  donne d'une part  $nD'$  zéros, de l'autre  $nD, nD - 1$ , ou  $nD + 1$ ; donc  $D' = D$ . Pour  $k^2 = 4$ , dans le cas exceptionnel où *toutes* les intégrales de (1) ont le même multiplicateur  $\lambda = \pm 1$ , naturellement ceci s'applique encore.

Dans le cas  $k^2 < 4$ , utilisons la trajectoire particulière  $\gamma$  relative à la solution périodique  $\rho$  de (2); elle se compose d'une infinité d'arcs congruents, superposables par rotation de l'angle  $\omega$  autour de l'origine. Remarquons qu'un arc de  $\gamma$  sur lequel l'angle polaire  $\varphi$  varie de  $\varphi_0$  à  $\varphi_0 + \pi$  coupe une fois et une fois seulement une droite *indéfinie* issue de l'origine et donne un zéro et un seul de l'intégrale  $x$  ( $x$  et  $y$  sont cette fois  $\rho \cos \varphi$  et  $\rho \sin \varphi$ ). Si donc  $\omega$  est compris entre  $n\pi$  et  $(n + 1)\pi$ , quand  $t$  augmente de  $\pi$ , donc  $\varphi$  de  $\omega$ , on rencontre soit  $n$ , soit  $n + 1$  zéros de  $x$  et tout est ramené à trouver l'accroissement  $\Phi$  de  $\varphi$  quand  $t$  augmente de  $T$ ; on écrit toujours  $T = h\pi + \pi_1$ , de sorte que l'on a

$$\Phi = h\omega + \omega_1,$$

où  $\omega_1$  est compris entre  $0$  et  $\omega$ . On écrit maintenant

$$h\omega = h_1\pi + \pi_2,$$

où  $h_1$  est entier, positif ou nul, et où  $\pi_2$  est compris entre 0 et  $\pi$ .  
Donc

$$\Phi = h_1 \pi + \omega_1 + \pi_2.$$

Le nombre  $N$  résulte de ces accroissements  $h_1 \pi$ ,  $\omega_1$  et  $\pi_2$  de  $\varphi$ ; le premier donne  $h_1$  zéros de  $x$ , le second  $\omega_1$  en donne un nombre égal à l'un des entiers 0, 1, ...,  $n + 1$ ; le dernier  $\pi_2$  en donne zéro ou un. Donc

$$N = h_1 + l,$$

$l$  étant un entier de la suite 0, 1, 2, ...,  $n + 2$ . Or

$$(44) \quad \begin{cases} h_1 = h \frac{\omega}{\pi} - \frac{\pi_2}{\pi} = \frac{T - \pi_1}{\pi} \frac{\omega}{\pi} - \frac{\pi_2}{\pi}, \\ N = T \frac{\omega}{\pi^2} + l - \frac{\pi_1 \omega}{\pi^2} - \frac{\pi_2}{\pi}, \\ \alpha = \frac{\omega}{\pi^2}, \quad r = l - \frac{\pi_1 \omega}{\pi^2} - \frac{\pi_2}{\pi}. \end{cases}$$

Le résultat est encore établi;  $r$  est borné, car il reste compris entre  $n + 3$  et  $-\left(\frac{\omega}{\pi} + 2\right)$  s'il s'agit d'une intégrale *arbitraire*  $\xi$ , entre  $n + 2$  et  $-\left(\frac{\omega}{\pi} + 1\right)$  s'il s'agit de  $x$  ou  $y$ .

Il est intéressant de comparer le résultat  $N = \alpha T + r$  avec l'inégalité (39) que j'écris avec les nouvelles notations

$$(39') \quad \frac{\sqrt{m}}{\pi} T - 1 \leq \alpha T + r \leq \frac{\sqrt{M}}{\pi} T + 1.$$

On en déduit

$$\frac{\sqrt{m}}{\pi} - \frac{1}{T} \leq \alpha + \frac{r}{T} \leq \frac{\sqrt{M}}{\pi} + \frac{1}{T}$$

et en faisant croître indéfiniment  $T$  on a

$$\frac{\sqrt{m}}{\pi} \leq \alpha \leq \frac{\sqrt{M}}{\pi}.$$

Le cas  $k^2 \geq 4$  ne donne que l'inégalité (34) déjà obtenue directement, mais le cas  $k^2 < 4$  donne le résultat intéressant

$$(45) \quad \pi \sqrt{m} \leq \omega \leq \pi \sqrt{M}.$$

VI. Le résultat demandé découle du n° IV; ici  $A$  est positif,

compris entre le minimum  $m = q^2 - q_1$ , et le maximum  $M = q^2 + q_1$ ; l'existence d'une solution non stable entraîne l'existence de l'entier  $D$  tel que, par l'inégalité (34), on ait

$$q^2 - q_1 \leq D^2 \leq q^2 + q_1.$$

Si donc le carré d'aucun entier n'est compris entre  $q^2 - q_1$  et  $q^2 + q_1$ , toutes les solutions de (1) sont stables.

*Note.* — Je n'ai pas tout à fait suivi la marche proposée pour l'énoncé pour le n° II, tout au moins pour indiquer sous quelle forme les constantes  $R_0$  et  $R'_0$  figurent dans l'expression de  $R$ , intégrale générale de (2). On a, par dérivations et tenant compte de (2), avec trois constantes  $\alpha, \beta, \gamma$  telles que  $\alpha\gamma - \beta^2 = 1$

$$\begin{aligned} R^2 &= \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2, \\ RR' &= \alpha xx' + \beta(xy' + x'y) + \gamma yy', \\ R'^2 + \frac{c^2}{R^2} &= \alpha x'^2 + 2\beta x'y' + \gamma y'^2. \end{aligned}$$

La dernière équation s'obtient en dérivant la seconde, remplaçant  $RR'$  par  $\frac{c^2}{R^2} - AR^2$  et  $x''$  par  $-Ax$  et  $y''$  par  $-Ay$ . Ces équations, pour  $t = t_0$ , donnent  $\alpha, \beta, \gamma$  linéairement au moyen de  $R_0^2, R_0R'_0$ , et  $\frac{c^2}{R_0^2} + R_0'^2$ . On a donc

$$(f) \quad R^2 = R_0^2 u + R_0 R'_0 v + \left( R_0'^2 + \frac{c^2}{R_0^2} \right) w,$$

où  $u, v, w$  sont trois intégrales de l'équation du troisième ordre (12) donnée plus haut. Remarquons que, si nous développons les deux membres de (f) suivant les puissances croissantes de  $t - t_0$ , en remplaçant  $2R_0R'_0$  par  $\frac{2c^2}{R_0^2} - 2\Lambda_0 R_0^2$ , l'égalité des termes constants, des coefficients de  $t - t_0$  et de  $(t - t_0)^2$  ne peut avoir lieu, *quelles que soient*  $R_0$  et  $R'_0$ , que si l'on a

$$\begin{aligned} u_0 &= 1, & v_0 &= 0, & w_0 &= 0, \\ u'_0 &= 0, & v'_0 &= 2, & w'_0 &= 0, \\ u''_0 &= -2\Lambda_0, & v''_0 &= 0, & w''_0 &= 2. \end{aligned}$$

et ces valeurs initiales fixent, *d'une façon unique*, les trois intégrales  $u, v, w$  de l'équation (12), *indépendantes de*  $R_0$  et  $R'_0$ , qui doivent figurer dans la formule (f).

**SOLUTIONS DE QUESTIONS DE LICENCE.**

**Question C. 40.**

[*Mathématiques générales, épreuve théorique; énoncé publié en janvier 1926, p. 123.*]

SOLUTION

Par M. A. MONJALLON.

$Ox, Oy, Oz$  étant trois axes de coordonnées rectangulaires, on considère le volume  $V$  intérieur au cylindre

$$(C) \quad x^2 + y^2 - z = 0$$

limité inférieurement par le plan

$$(P) \quad z = 0$$

et supérieurement par la surface

$$(\Sigma) \quad z = \frac{y^2}{x^2 + y^2}.$$

1° La courbe d'intersection de (C) et ( $\Sigma$ ) est une courbe plane située dans le plan

$$z = y,$$

c'est une ellipse passant par l'origine dont le grand axe est la droite  $z = y$  du plan  $zOy$  et dont le centre a pour coordonnées

$$x = 0, \quad y = z = \frac{1}{2}.$$

2° Pour calculer la surface latérale  $S$  du cylindre comprise entre (P) et ( $\Sigma$ ) passons en coordonnées semi-polaires, l'équation de (C) est alors

$$r = \sin \theta,$$

l'aire est alors

$$S = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sin^2 \theta} dz = \frac{\pi}{2}.$$

3° Calculons le volume  $V$ , nous avons

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{(V)} dx dy dz = 2 \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y-y^2}} dx \int_0^{\frac{y^2}{x^2+y^2}} dz \\ &= 2 \int_0^1 y \operatorname{arc tang} \sqrt{\frac{1}{y} - 1} dy = \frac{3\pi}{16} \quad (\text{par parties}). \end{aligned}$$

4° Le moment d'inertie de ce volume (densité 1) par rapport à Oz est fourni par l'intégrale

$$\begin{aligned} M &= \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} (x^2 + y^2) dx \int_0^{\frac{y^2}{x^2+y^2}} dz \\ &= 2 \int_0^1 y^2 \sqrt{y-y^2} dy = \frac{5\pi}{64}. \end{aligned}$$

Le rayon de giration correspondant sera

$$R = \sqrt{\frac{M}{V}} = \sqrt{\frac{5}{12}} = 0,64.$$

**Question C. 62.**

[Calcul différentiel et intégral; épreuve pratique; énoncé publié en mai 1926, p. 253.]

**SOLUTION**

Par M. JACQUES DEVISME.

Il s'agissait d'évaluer l'aire de la surface

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = (x^2 - y^2)a^2.$$

Coupons cette surface (qui est une cyclide) par des plans passant par l'axe des z. Chaque intersection est formée par deux cercles égaux tangents en O à l'axe des z. Ceci nous donne l'idée de passer en coordonnées polaires. On a alors

$$x = a \sqrt{\cos 2\varphi} \cos \varphi \cos^2 \theta,$$

$$y = a \sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi \cos^2 \theta.$$

$$z = a \sqrt{\cos 2\varphi} \sin \theta \cos \theta.$$

On en déduit l'élément linéaire de la surface (pour  $a = 1$ )

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = E d\varphi^2 + 2F d\varphi d\theta + G d\theta^2$$

$$= \frac{\cos^2 \theta}{\cos 2\varphi} [\sin^2 2\varphi + \cos^2 2\varphi \cos^2 \theta] d\varphi^2 + 2 \sin 2\varphi \sin \theta \cos \theta d\varphi d\theta + \cos 2\varphi d\theta^2;$$

on en tire aisément

$$\begin{aligned} \sqrt{EG - F^2} &= \sqrt{\cos^2 \theta [\sin^2 2\varphi + \cos^2 2\varphi \cos^2 \theta] - \sin^2 2\varphi \sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\ &= \cos \theta \sqrt{\sin^2 2\varphi (1 - \sin^2 \theta) + \cos^2 2\varphi \cos^2 \theta} = \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

Nous sommes ramenés à calculer

$$\iint \cos^2 \theta d\varphi d\theta.$$

Calculons les limites. Considérons l'intersection de la surface avec le plan  $xOy$ , on obtient

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),$$

c'est une lemniscate, les tangentes à l'origine sont les bissectrices des axes. Considérons la portion de la surface comprise dans l'angle  $Oxyz$ . Les limites sont

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{4}, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2};$$

l'aire cherchée est donc

$$A = 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \, d\theta = 8a^2 \frac{\pi}{4} \frac{\pi}{4} = a^2 \frac{\pi^2}{2}.$$

Autres solutions de MM. R. ODILE et R. WEINZAEFFEL.

---

---

## CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

---

**ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. C. 80.** On considère l'enveloppe  $E$  de la famille de plans

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi + z \cot \theta - p(\theta, \varphi) = 0$$

où  $\varphi$  et  $\theta$  sont les paramètres variables. A chaque système de valeurs de  $\varphi$  et  $\theta$ , on fait correspondre le point de contact du plan défini par ces valeurs avec la surface.

1° Former la condition à laquelle doit satisfaire la fonction  $p$  pour que les courbes  $\theta = \text{const.}$ ,  $\varphi = \text{const.}$  soient conjuguées. Déterminer la forme générale des fonctions  $p$  satisfaisant à cette condition.

2° Cette condition étant remplie, montrer que les lignes  $\varphi = \text{const.}$ ,  $\theta = \text{const.}$  sont orthogonales. Montrer que les lignes de courbure de la surface sont planes, et que celles de l'une des familles sont égales entre elles.

3° On considère ces lignes de courbure comme les différentes positions d'une courbe mobile : quelle est la nature du déplacement de son plan ? Définir les deux nappes de la développée de  $E$  ; dans quelles conditions l'une ou l'autre de ces deux nappes dégénère-t-elle en une ligne ? Quelle est la nature de  $E$  lorsque les deux nappes sont ainsi dégénérées ?

Nota. — Les candidats devront faire usage, autant que possible, de considérations géométriques.

II. C.81. On donne l'équation différentielle

$$xy'' + (3x - 1)y' - (4x + 5a + 4)y = 0,$$

où  $a$  est une constante.

1° Vérifier que, pour  $a$  entier supérieur à  $-2$ , on a une intégrale de la forme  $e^x P(x)$ ,  $P(x)$  étant un polynôme; et que pour  $a$  entier inférieur à  $1$ , on a une intégrale de la forme  $e^{-4x} Q(x)$ ,  $Q(x)$  étant un polynôme. Dire comment on obtiendrait dans ces deux cas l'intégrale générale. Quelle est cette intégrale générale pour  $a = 1$  et  $a = 0$ ?

2°  $a$  étant quelconque, quels sont les points singuliers des intégrales de l'équation (1)? Quelle est la forme de ces intégrales? Pour quelles valeurs de  $a$  l'intégrale générale est-elle uniforme?

3° Appliquer la méthode de Laplace à l'équation (1). En particulier, retrouver par cette méthode les résultats du n° I.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. Calculer l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x^2 - 4)\sqrt{(1-x)(1+x)^3}}.$$

II. Les axes  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  sont rectangulaires. Soit  $S$  la surface engendrée par une circonférence variable  $C$  tangente à  $Oz$  à l'origine et qui coupe le plan  $Oxy$  suivant la droite  $x - a = 0$ . Calculer l'aire de la portion de  $S$  comprise entre deux positions de la circonférence  $C$ .

(Strasbourg, juin 1920.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Une surface est représentée par l'équation

$$y = x \operatorname{tang} \frac{z}{a}.$$

1° Déterminer les rayons de courbure principaux en un point quelconque de la surface.

2° Déterminer ses lignes de courbure.

3° Pour l'une quelconque de ces lignes de courbure, calculer la longueur de l'arc de courbe, le rayon de courbure et le rayon de torsion de la courbe.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Déterminer une fonction analytique  $P + Qi$  de la variable  $z = x + yi$ , telle que sa partie réelle soit de la forme

$$P = f(x) \varphi(y),$$

Montrer que l'on peut choisir cette fonction de façon qu'elle soit nulle pour  $z = 0$ .

Le problème a-t-il plusieurs solutions?

(Marseille, octobre 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — C. 82. Une surface est représentée par les équations paramétriques

$$x = 3uv^2 - u^3 - 3u,$$

$$y = 3v^2u^2 - v^3 - 3v,$$

$$z = 6uv.$$

1° Déterminer les lignes asymptotiques et prouver qu'elles sont orthogonales.

2° Montrer que, pour chacune de ces courbes, la tangente forme un angle constant avec une direction fixe.

3° Déterminer les lignes de courbure de la surface et montrer qu'elles sont planes.

4° Vérifier qu'en chaque point d'une ligne de courbure le plan tangent à la surface forme un angle constant avec le plan de cette courbe.

5° Calculer les rayons de courbure principaux en un point quelconque de la surface.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Déterminer l'intégrale générale de l'équation

$$(a^2 + xy) \left( x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} \right) + a(x^2 + y^2)z^2 = 0.$$

Déterminer une surface intégrale passant par la circonférence

$$z = a, \quad x^2 + y^2 = R^2.$$

(Marseille, juin 1926.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — C. 83. — On donne l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = e^z \sin(x + y).$$

1° Déterminer l'intégrale générale.

2° Déterminer une surface intégrale S qui passe par la courbe

$$x + y = 0; \quad e^z \cos^2 x = 1.$$

3° Déterminer les lignes de courbure de cette surface.

4° Former l'équation différentielle des lignes asymptotiques de cette surface S, et montrer qu'elles sont imaginaires.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer, en utilisant les intégrales imaginaires,

$$\int_0^\infty \frac{\cos(px)}{(a^2 + x^2)^2} dx.$$



En déduire les intégrales :

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin(px)}{(a^2 + x^2)^2} dx,$$
$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos(px)}{(a^2 + x^2)^2} dx,$$
$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(px)}{a^2 + x^2} dx.$$

(Marseille, novembre 1926.)

## CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Soit l'équation différentielle totale

$$(1) \quad dU = P dx + Q dy,$$
$$P = \frac{(3x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{2x^2y}, \quad Q = \frac{(3y^2 - x^2)(x^2 + y^2)}{2xy^2}.$$

1° Démontrer que P et Q vérifient la condition d'intégrabilité.

2° Intégrer l'équation (1), en choisissant la constante d'intégration de manière que  $U(1, 1) = 2$ .

Considérons P et Q comme les projections d'un vecteur  $\vec{P}$ , définissant un champ de vecteurs dans le plan  $Oxy$ .

3° Déterminer la forme des courbes de niveau du champ

$$U(x, y) = C;$$

en supposant C positif, on pourra passer en coordonnées polaires, en prenant comme pôle le point O, comme axe polaire la demi-droite bissectrice de  $(\widehat{Ox, Oy})$ ; comment la courbe de niveau

$$U(x, y) = -C \quad (C > 0]$$

se déduit-elle de la précédente ?

4° Écrire l'équation différentielle des lignes de force du champ (trajectoires orthogonales des courbes du niveau). Intégrer cette équation. Indiquer un procédé géométrique simple permettant de déduire le réseau des lignes de force de celui des courbes de niveau.

II. On considère la surface définie paramétriquement par les équations

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = uv.$$

1° Déterminer la forme des courbes coordonnées

$$u = \text{const.} \quad \text{et} \quad v = \text{const.};$$

en déduire à quel type connu appartient la surface.

2° Déterminer l'intersection de la surface par un plan parallèle à  $Oxy$ ; on pourra prendre, dans le plan, des coordonnées polaires : pôle, intersection  $O'$  du plan et de l'axe  $Oz$ , axe polaire, l'axe  $O'x'$ , parallèle à  $Ox$ .

Calculer le rayon de courbure de la courbe et l'exprimer en fonction de la distance  $r$  du point  $M$  à  $O'$ .

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. La fonction  $U$  demandée est  $\frac{(x^2 + y^2)^2}{2xy}$ , les courbes de niveau et les lignes de force sont les lemniscates

$$\rho^2 = C \sin 2\theta \quad \text{et} \quad \rho^2 = C \cos 2\theta,$$

qui sont symétriques les unes des autres par rapport à la bissectrice des axes.

II. 1° La surface est un cône dont les génératrices ( $v = \text{const.}$ ) s'appuient sur des hélices circulaires ( $u = \text{const.}$ ) tracées sur des cylindres d'axe  $Oz$ .

2° La courbe est la spirale  $\rho\theta = h$ .

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. Soit la chaînette

$$y = \text{Ch}x;$$

soient  $P$  un point de cette chaînette,  $M$  sa projection sur  $Ox$ ,  $A$  le sommet de la chaînette.

On considère le quadrilatère  $OAPM$ , dont trois côtés sont rectilignes, le quatrième étant l'arc  $AP$  de chaînette.

Déterminer l'abscisse  $x$  du point  $P$  de telle manière que l'on ait la condition

$$\overline{OM} + \widehat{AP} = \overline{OA} + \overline{MP}.$$

On donnera  $x$  avec trois chiffres significatifs exacts.

II. Calculer les deux sommes :

$$S_n(x) = 1 + C_n^1 \cos x + C_n^2 \cos 2x + \dots + C_n^n \cos nx$$

$$T_n(x) = C_n^1 \sin x + C_n^2 \sin 2x + \dots + C_n^n \sin nx$$

sous une forme calculable par logarithmes.

Se servir des expressions obtenues pour calculer leurs valeurs pour

$$n = 20, \quad x = 30^\circ.$$

Nota. —  $C_n^p$  désigne selon l'habitude le coefficient du binôme

$$C_n^p = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{1 \cdot 2 \dots p}.$$

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. L'équation à résoudre est

$$x - 1 = e^{-x}.$$

On la résoudra par la méthode de Newton, ou par approximations successives, au moyen des équations

$$x_1 - 1 = \frac{1}{e}, \quad x_2 - 1 = \frac{1}{e^{x_1}}, \quad \dots, \quad x_n - 1 = \frac{1}{e^{x_{n-1}}}.$$

II. On a

$$S_n + iT_n = (1 + e^{ix})^n = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \left( \cos \frac{nx}{2} + i \sin \frac{nx}{2} \right).$$

(Lille, juillet 1926.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Enveloppe d'une famille de courbes planes

$$f(x, y, \alpha) = 0.$$

Application :  $y^4 - 2\alpha y^2 + (x - \alpha)^2 = 0.$

C.84. — II. Un point M, non pesant, de masse  $m$ , se meut sur un cercle de rayon  $a$ . Il est attiré en raison inverse du carré de la distance par deux points A et B situés dans le plan du cercle symétriquement par rapport au centre du cercle, à la distance  $2a$  de ce centre. A exerce l'attraction  $-\frac{mk}{MA^2}$ , B l'attraction  $-\frac{mk\lambda}{MB^2}$ .

1° Positions d'équilibre et stabilité.

2° Pour  $\lambda = 8$ , calculer les périodes des petits mouvements.

3°  $\lambda$  étant égal à 8, on lance le mobile du point du cercle le plus voisin de A avec la vitesse  $v_0$ . Discuter le mouvement.

4° On remplace les attractions par des répulsions égales en valeurs absolues. Que devient la discussion de 1° ? Si  $\lambda = 8$ , et si on lance le mobile de l'une des positions d'équilibre stable avec la vitesse  $v_0$ , quelle est l'allure du mouvement ?

ÉPREUVE PRATIQUE. — Pour chacune des équations suivantes on demande : 1° de trouver la solution générale; 2° de trouver la solution particulière qui s'annule ainsi que le plus grand nombre possible de ses dérivées successives pour  $x = 0$ ; 3° le premier terme du développement de cette solution :

(1)  $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$ ,

(2)  $y'' - 3y' + 2y = x$ ,

(3)  $y'' - 2y' + 2y = 3 \cos x - 2 \sin x$ ,

(4)  $y'' + 2y' + y = xe^x$ ,

(5)  $y'' + y = \cos^3 x$ ,

(6)  $y'' - 2y' + y = xe^x$ ,

(7)  $y''' - 3y' + 2y = e^{2x}$ ,

(8)  $y''' - 3y' + 2y = e^x$ ,

(Bordeaux, juin 1926.)

---

---

## SUR CERTAINS CYCLES ARITHMÉTIQUES ;

PAR ELIE CARTAN.

---

Le problème de Mathématiques élémentaires proposé au dernier concours d'agrégation contenait une intéressante question d'Arithmétique (1) sur les cycles de nombres entiers obtenus en partant d'un nombre de  $n$  chiffres et en effectuant sur ces chiffres successivement  $1, 2, \dots, n-1$  permutations circulaires. Il peut arriver que les  $n$  nombres ainsi obtenus forment une progression arithmétique, et l'on demandait aux candidats de trouver tous les cycles de 3 et de 6 chiffres jouissant de cette propriété.

Ce problème, qui semble n'avoir fait jusqu'ici l'objet d'aucune recherche, est susceptible d'une solution complète, non seulement dans le système de numération décimale, mais encore dans le système de numération le plus général. C'est cette solution que je me propose d'exposer dans les pages qui suivent. Comme on le verra, les cycles cherchés rentrent dans deux catégories nettement distinctes.

### I. — Remarques préliminaires.

1. Considérons, dans le système de numération à base  $a$ , un nombre de  $n$  chiffres

$$\mathcal{N} = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n,$$

ainsi que les  $n-1$  nombres obtenus par permutation circulaire des chiffres

$$\mathcal{N}_1 = \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \alpha_1,$$

$$\mathcal{N}_2 = \alpha_3 \alpha_4 \dots \alpha_1 \alpha_2,$$

.....

Nous supposerons dans ce qui suit que  $\mathcal{N}$  est le plus petit des nombres du cycle formé par les  $n$  nombres considérés. Nous nous proposons de trouver tous les cas dans lesquels les nombres du cycle forment, à l'ordre près, une progression arithmétique. Il est clair que la question ne se pose que pour  $n \geq 3$ .

---

(1) L'énoncé et la solution ont paru dans le numéro de novembre 1926, p. 366.  
*Ann. de Mathémat.*, 6<sup>e</sup> série, t. II. (Février 1927.)

Nous pouvons regarder le nombre  $\mathcal{N}$  comme la période d'une fraction pseudo-décimale périodique simple, résultant de la conversion d'une certaine fraction irréductible  $\frac{N}{D}$  :

$$\frac{N}{D} = \frac{\alpha_1}{a} + \frac{\alpha_2}{a^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{a^n} + \frac{\alpha_1}{a^{n+1}} + \dots = \frac{\mathcal{N}}{a^n} + \frac{\mathcal{N}}{a^{2n}} + \dots = \frac{\mathcal{N}}{a^n - 1}.$$

On aura  $N < D$  ; de plus  $D$  sera un diviseur de  $a^n - 1$  ; en particulier  $D$  sera premier avec  $a$ .

Il est facile de voir quelles sont les fractions ordinaires qui donnent naissance aux périodes  $\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_{n-1}$ . On a en effet

$$\frac{aN}{D} - \alpha_1 = \frac{\alpha_2}{a} + \dots = \frac{\mathcal{N}_1}{a^n - 1},$$

$$\frac{a^2N}{D} - (\alpha_1 a + \alpha_2) = \frac{\mathcal{N}_2}{a^n - 1},$$

.....

Les fractions

$$\frac{aN - \alpha_1 D}{D}, \quad \frac{a^2N - (\alpha_1 a + \alpha_2) D}{D}, \quad \dots$$

sont irréductibles, car tout diviseur commun au numérateur et au dénominateur de la  $i^{\text{ième}}$  fraction diviserait  $a^i N$  ; étant premier avec  $a$ , il diviserait  $N$ , contrairement à la propriété d'irréductibilité de la fraction  $\frac{N}{D}$ .

Par suite les  $n$  nombres  $\mathcal{N}, \mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_{n-1}$  du cycle sont les périodes des fractions périodiques résultant de la conversion de  $n$  fractions irréductibles  $\frac{N}{D}, \frac{N_1}{D}, \dots, \frac{N_{n-1}}{D}$ , où  $N_i$  est le reste de la division de  $a^i N$  par  $D$ .

Si les nombres  $\mathcal{N}_i$  forment une progression arithmétique, il en est de même des nombres  $N_i$  ; ces derniers nombres seront donc tous distincts. Par suite  $n$  est l'exposant de la plus petite puissance de  $a$  qui soit congrue à 1 (mod  $D$ ) ; autrement dit,  $a$  appartient à l'exposant  $n$  (mod  $D$ ).

2. Nous pouvons adopter une représentation géométrique commode. Considérons une circonférence divisée en  $D$  parties égales à partir d'un point origine  $O$ . Tout entier  $N_i$  sera représenté par un des points de subdivision de la circonférence, à savoir celui qu'on

obtient en portant, à partir de  $O$ , dans un sens fixé une fois pour toutes,  $N_i$  divisions ; nous désignerons ce point par  $(N_i)$ . Deux nombres congrus entre eux (mod  $D$ ) sont représentés par le même point.

Nous avons alors à chercher tous les cas dans lesquels les points de la suite illimitée  $(N), (aN), (a^2N), \dots$  se réduisent à  $n$  distincts et forment les sommets d'une ligne brisée polygonale régulière convexe  $\mathcal{L}$  ; il faut du reste qu'en partant de  $O$ , on rencontre tous les sommets de cette ligne avant de revenir au point  $O$ .

3. D'après ce qui précède, la suite des points

$$(1) \quad (aN), (aN_1), \dots, (aN_{n-1})$$

coïncide, à l'ordre près, avec la suite des points

$$(2) \quad (N), (N_1), \dots, (N_{n-1}).$$

Soit d'autre part  $R$  la raison de la progression arithmétique formée par les nombres  $N_i$  ; la suite des points

$$(3) \quad (N + R), (N_1 + R), \dots, (N_{n-1} + R)$$

a  $n - 1$  points communs avec la suite (2). De là résulte que la suite des points

$$(aN + aR), (aN_1 + aR), \dots, (aN_{n-1} + aR)$$

a également  $n - 1$  points communs avec la suite (2) ; il en est de même de la suite

$$(N + aR), (N_1 + aR), \dots, (N_{n-1} + aR).$$

Donc si l'on fait tourner de  $aR$  divisions la ligne brisée polygonale régulière  $\mathcal{L}$ , la nouvelle ligne  $\mathcal{L}'$  obtenue a au moins  $n - 1$  sommets communs avec  $\mathcal{L}$ .

4. Remarquons que la rotation de  $aR$  divisions est une rotation effective ; sinon en effet  $aR$  serait un multiple de  $D$ , et aussi par suite  $R$ , ce qui est absurde.

Si les deux lignes  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}'$  ont tous leurs sommets communs, c'est qu'en allant dans le sens positif du dernier sommet  $[N + (n - 1)R]$

au premier (N) on s'avance exactement de R divisions, autrement dit qu'on a

$$(4) \quad D = nR.$$

Si  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}'$  n'ont pas tous leurs sommets communs, on peut supposer que le sommet de  $\mathcal{L}$  qui n'appartient pas à  $\mathcal{L}'$  est soit le premier sommet (N), soit le dernier  $[N + (n - 1)R]$ , soit un sommet intermédiaire.

Si le point (N) ne fait pas partie de  $\mathcal{L}'$ , la ligne  $\mathcal{L}'$  se déduit de  $\mathcal{L}$  par une rotation de R divisions dans le sens positif; on a donc

$$aR \equiv R \pmod{D}$$

ou

$$(5) \quad (a - 1)R \equiv 0 \pmod{D}.$$

Si c'est le point  $[N + (n - 1)R]$  qui ne fait pas partie de  $\mathcal{L}'$ , on obtient de même  $\mathcal{L}'$  par une rotation de  $\mathcal{L}$  de R divisions dans le sens négatif; on a donc

$$(6) \quad (a + 1)R \equiv 0 \pmod{D}.$$

Si enfin c'est un sommet intermédiaire de  $\mathcal{L}$  qui ne fait pas partie de  $\mathcal{L}'$ , les deux points  $(N - R)$  et  $(N + nR)$  doivent faire partie de  $\mathcal{L}'$ , et comme aucun d'eux ne fait partie de  $\mathcal{L}$ , c'est qu'ils sont identiques; par suite

$$(n + 1)R \equiv 0 \pmod{D}.$$

Cela n'est possible que si l'on a

$$(7) \quad D = (n + 1)R.$$

En définitive on a l'une des quatre relations (4), (5), (6), (7).

§. Ajoutons enfin un dernier théorème. Soit  $\Delta$  le plus grand commun diviseur de R et de D. On a

$$(a - 1)N = N_1 - N + \alpha_1 D = hR + \alpha_1 D \quad (1 \leq h \leq n - 1).$$

Par suite  $\Delta$  divise  $(a - 1)N$ ; mais  $\Delta$  est premier avec N, puisque la fraction  $\frac{N}{D}$  est irréductible; donc  $\Delta$  divise  $a - 1$ .



**THÉORÈME.** — *Le plus grand commun diviseur de R et de D divise  $a - 1$ .*

Le cas où R et D sont premiers entre eux n'est naturellement pas exclu.

**II. — Les cycles de la première catégorie.**

6. *Nous allons, après ces préliminaires, supposer d'abord que le dénominateur D de la fraction irréductible  $\frac{N}{D}$  contient au moins un facteur premier p ne figurant pas dans  $a - 1$ .*

Supposons que p figure dans D avec l'exposant  $\alpha$ . Il ne figure certainement pas dans R, à cause du théorème du n° 5.

Il résulte immédiatement de là l'inégalité

$$(8) \quad p > n.$$

En effet l'un des p termes de la progression arithmétique

$$N, N + R, \dots, N + (p - 1)R,$$

dont la raison est première avec p, est divisible par p; si p était inférieur ou égal à n, ce terme serait le numérateur d'une des fractions  $\frac{N_i}{D}$ , qui ne serait donc pas irréductible, ses deux termes étant divisibles par p.

En second lieu, la base a appartient à l'exposant  $n \pmod{p}$ . En effet si a appartenait à l'exposant  $\nu < n$ , on aurait

$$a^\nu N - N \equiv 0 \pmod{p}.$$

Or

$$(a^\nu - 1)N = qD + hR \quad (1 \leq h \leq n - 1);$$

le nombre premier p divisant le premier membre, ainsi que le terme qD du second membre, devrait diviser hR, ce qui n'est pas, puisque p ne divise ni R, ni  $h \leq n - 1 < p$ .

Si nous revenons maintenant aux quatre cas possibles indiqués au n° 4, nous voyons que les congruences (5) et (6) sont exclues, puisqu'elles entraîneraient  $a^2 \equiv 1 \pmod{p}$ ; l'égalité (4) est également exclue, puisque p est premier avec nR. On a donc nécessairement

$$(7) \quad D = (n + 1)R.$$

Il résulte de cette dernière égalité que  $p^\alpha$  est un diviseur de  $n+1$ , et comme  $p$  est au moins égal à  $n+1$ , cela n'est possible que si l'on a

$$(9) \quad p = n + 1, \quad \alpha = 1.$$

Cela prouve en particulier qu'il ne peut entrer dans  $D$  qu'un seul facteur premier diviseur de  $a-1$ , et que ce facteur premier est  $n+1$ , entrant avec l'exposant 1. Il en résulte aussi que  $a$  est une racine primitive de  $p$ , puisque  $a$  appartient à l'exposant

$$n = p - 1.$$

Enfin des  $p$  termes de la progression arithmétique

$$N - R, \quad N, \quad N + R, \quad \dots, \quad N + (n-1)R,$$

dont la raison est première avec  $p$ , un est divisible par  $p$ ; ce ne peut être que le premier : on a donc

$$(10) \quad \begin{aligned} N - R &\equiv 0 \pmod{p}, \\ N &= R \mp kp. \end{aligned}$$

L'entier  $k$ , s'il est précédé du signe  $-$ , doit satisfaire à l'inégalité

$$(11) \quad kp < R;$$

s'il est précédé du signe  $+$ , le nombre  $N + (n-1)R = nR + kp$  doit être plus petit que  $D = (n+1)R$ ; on a donc encore la même inégalité (11).

Le théorème du n° 5 montre enfin, d'après (7), que  $R$  est un diviseur de  $a-1$ .

7. De l'analyse précédente résulte le théorème suivant :

**THÉORÈME.** — Si la fraction irréductible  $\frac{N}{D}$  jouit de la propriété que son dénominateur contienne un facteur premier  $p$  ne figurant pas dans  $a-1$ , elle est de la forme

$$(12) \quad \frac{N}{D} = \frac{R \mp kp}{pR},$$

où  $R$  est un diviseur de  $a-1$ ,  $a$  une racine primitive de  $p$ , et  $k < \frac{R}{p}$ .

Réciproquement, supposons ces conditions réalisées. On a

$$a^i N = a^i R \mp a^i kp \equiv a^i R \mp kp \pmod{pR}.$$

Or les  $p - 1$  nombres  $a^i R$  sont, à l'ordre près, congrus aux nombres

$$R, 2R, \dots, (p - 1)R \pmod{pR}.$$

Les points  $(a^i N)$  sont donc identiques aux points représentatifs des nombres

$$R \mp kp, 2R \mp kp, \dots, (p - 1)R \mp kp,$$

lesquels sont tous inférieurs à  $D = pR$  et forment une progression arithmétique de raison  $R$ . Le cycle de  $n = p - 1$  nombres définis par la fraction considérée  $\frac{N}{D}$  fournit donc bien une progression arithmétique de raison  $R$ .

8. On peut poser

$$(13) \quad \frac{N}{D} = \frac{1}{p} \mp \frac{k}{R} = \frac{1}{p} \mp \frac{k'}{a - 1}.$$

La fraction  $\frac{k'}{a - 1}$  se développe suivant une fraction illimitée dont tous les chiffres sont égaux à  $k'$ . D'autre part tous les chiffres du développement de  $\frac{1}{p}$  sont d'une part supérieurs ou égaux à  $k'$ , d'autre part inférieurs ou égaux à  $a - k'$ . En effet le plus petit chiffre de la période de  $\frac{1}{p}$  est évidemment son premier chiffre, c'est donc le quotient de  $a$  par  $p$ . Or

$$k' < \frac{a - 1}{p} < \frac{a}{p}.$$

De même le plus grand chiffre de la période de  $\frac{1}{p}$  est le quotient de  $(p - 1)a$  par  $p$ . Or on a

$$a - k' > a - \frac{a - 1}{p} = \frac{a(p - 1)}{p} + \frac{1}{p} > \frac{a(p - 1)}{p}.$$

Il résulte de là le théorème suivant.

**THÉORÈME.** — *Pour avoir toutes les solutions du problème*

pour lesquelles  $D$  admet un diviseur premier non contenu dans  $a - 1$ , on cherche les différents nombres premiers  $p$  dont  $a$  est racine primitive. Si  $p$  est un de ces nombres, la période de la fraction illimitée à laquelle donne naissance  $\frac{1}{p}$  définit un cycle d'ordre  $p - 1$ , dont les  $p - 1$  nombres forment une progression arithmétique; on déduira de ce cycle un certain nombre d'autres cycles jouissant de la même propriété en augmentant ou en diminuant tous les chiffres d'une même valeur, tant que cela sera possible.

9. Le cas  $n = 2$  étant exclu, nous n'avons à considérer que les nombres premiers  $p \geq 5$  :

Si $p = 5$ , $n = 4$ .....	$a \equiv \pm 2$	(mod 5);
si $p = 7$ , $n = 6$ .....	$a \equiv 3$ ou 5	(mod 7);
si $p = 11$ , $n = 10$ .....	$a \equiv 2, 5, 7$ ou 8	(mod 11);
si $p = 13$ , $n = 12$ .....	$a \equiv 2, 6, 7$ ou 11	(mod 13);
.....	.....	.....

Dans le cas particulier  $a = 10$ , on peut avoir

$$p = 7, 17, 19, 23, 29, 47, \dots$$

On a 3 cycles d'ordre 6 définis respectivement par les nombres

$$142857, 031746, 253968,$$

qui sont respectivement les périodes des fractions

$$\frac{1}{7}, \quad \frac{1}{7} - \frac{1}{9} = \frac{2}{63}, \quad \frac{1}{7} + \frac{1}{9} = \frac{16}{63}.$$

On a un cycle d'ordre 16 défini par le nombre

$$0588235294117647,$$

période de la fraction  $\frac{1}{17}$ .

On a un cycle d'ordre 18 défini par le nombre

$$052631578947368421,$$

période de la fraction  $\frac{1}{19}$ .

Enfin si  $a = 2$  (système de numération binaire), on peut avoir

$$p = 5, 11, 13, 19, 29, 37, 53, 59, 61, \dots;$$

tous ces nombres sont des multiples de 8, plus ou moins 3.

Si  $p = 5, n = 4$ , on a le cycle défini par le nombre

$$0011;$$

si  $p = 11, n = 10$ , on a le cycle défini par le nombre

$$0001011101;$$

si  $p = 13, n = 12$ , on a le cycle défini par le nombre

$$000100111011;$$

si  $p = 19, n = 18$ , on a le cycle défini par le nombre

$$000011010111100101.$$

### III. — Les cycles de la seconde catégorie.

10. Supposons maintenant que les facteurs premiers de  $D$  entrent tous dans  $a - 1$ . Soit

$$\begin{aligned} a - 1 &= p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_h^{\alpha_h}, \\ D &= p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \dots p_h^{\lambda_h}. \end{aligned}$$

Nous allons d'abord chercher l'exposant  $n$  auquel appartient  $a$  (mod  $D$ ).

Nous nous appuierons sur la remarque suivante :

*Si  $a$  appartient respectivement aux exposants  $n_1$  et  $n_2$  par rapport aux modules  $D_1$  et  $D_2$  premiers entre eux, l'exposant  $n$  auquel appartient  $a$  (mod  $D_1 D_2$ ) est égal au plus petit commun multiple de  $n_1$  et de  $n_2$ .*

En effet la congruence

$$a^n \equiv 1 \pmod{D}$$

entraîne

$$a^n \equiv 1 \pmod{D_1};$$

donc  $n$  est un multiple de  $n_1$ . De même  $n$  est un multiple de  $n_2$ .

Réciproquement si  $n$  est un multiple commun de  $n_1$  et de  $n_2$ ,  $a^n - 1$  est divisible à la fois par  $D_1$  et par  $D_2$ , et par suite par  $D$ .

Il résulte de là qu'il suffit de connaître l'exposant auquel appartient  $a$  par rapport à chacun des nombres  $p_1^{\lambda_1}, p_2^{\lambda_2}, \dots, p_h^{\lambda_h}$ .

11. Prenons l'un des nombres premiers  $p$  qui entrent dans  $a - 1$ ; soit  $\alpha$  son exposant. On peut poser

$$a = 1 + kp^\alpha,$$

$k$  étant premier avec  $p$ . On en déduit

$$(14) \quad \begin{aligned} a^p &= (1 + kp^\alpha)^p = 1 + kp^{\alpha+1} + \dots + k^p p^{p\alpha}, \\ a^p - 1 &= kp^{\alpha+1} + \dots + k^p p^{p\alpha}. \end{aligned}$$

Les coefficients des termes non extrêmes du binôme  $(x + y)^p$  sont tous divisibles par  $p$ , si  $p$  est un nombre premier. Les différents termes du second membre de (14) contiennent donc  $p$  avec les exposants

$$\alpha + 1, \quad 2\alpha + 1, \quad \dots, \quad (p-1)\alpha + 1, \quad p\alpha.$$

Par suite  $a^p - 1$  est divisible par  $p^{\alpha+1}$ . Il ne pourrait être divisible par  $p^{\alpha+2}$  que si l'on avait

$$\begin{aligned} \alpha + 1 &= p\alpha, \\ \text{c'est-à-dire} \quad p &= 2, \quad \alpha = 1. \end{aligned}$$

Si nous écartons ce cas, nous voyons que si  $p$  entre avec l'exposant  $\alpha$  dans  $a - 1$ , il entre avec l'exposant  $\alpha + 1$  dans  $a^p - 1$ . Le même raisonnement appliqué au nombre  $a^p$ , au lieu du nombre  $a$ , montre que  $p$  entre avec l'exposant  $\alpha + 2$  dans  $a^{p^2} - 1$ ,  $\alpha + 3$  dans  $a^{p^3} - 1$ , et ainsi de suite. Il en résulte que l'exposant auquel appartient  $a \pmod{p^{\alpha+k}}$  est égal à  $p^k$  ou à un diviseur de  $p^k$ ; mais ce ne peut être un diviseur de  $p^k$ , car ce serait  $p^{k-1}$  ou un de ses diviseurs, et l'on aurait

$$a^{p^{k-1}} - 1 \equiv 0 \pmod{p^{\alpha+k}},$$

tandis que  $p$  n'entre qu'avec l'exposant  $\alpha + k - 1$  dans  $a^{p^{k-1}} - 1$ .

En conséquence l'exposant auquel appartient  $a \pmod{p^\lambda}$  est égal à 1 si  $\lambda \leq \alpha$ , à  $p^{\lambda-\alpha}$  si  $\lambda > \alpha$ .

12. Il y a un cas d'exception, c'est celui où  $p = 2, \alpha = 1$ ;  $a - 1$  est alors le double d'un nombre impair. Dans ce cas, en effet,  $a^2 - 1$  est divisible au moins par 8 et, par suite, contient le facteur premier  $p = 2$  plus de  $\alpha + 1 = 2$  fois. Mais si  $a^2 - 1$  contient  $\beta$  fois le facteur 2, le raisonnement du numéro précédent est valable;  $a^4 - 1$  contient  $\beta + 1$  fois le facteur 2,  $a^8 - 1$  le contient  $\beta + 2$  fois et ainsi de suite.

13. Si nous excluons le cas où  $a - 1$  est le double d'un nombre impair, nous voyons que  $n$  est le plus petit multiple commun de  $h$  nombres qui sont égaux soit à 1, soit à des puissances des facteurs premiers  $p_1, \dots, p_h$ ; si donc  $\lambda_i \leq \alpha_i$ ,  $n$  ne contient pas le facteur premier  $p_i$ ; si  $\lambda_i > \alpha_i$ ,  $n$  contient le facteur premier  $p_i$  avec l'exposant  $\lambda_i - \alpha_i$ . Autrement dit,  $n$  est le quotient de  $D$  par le plus grand commun diviseur  $\delta$  de  $D$  et de  $a - 1$ .

Ce résultat est encore valable si  $a - 1$  est le double d'un nombre impair, à condition que  $D$  soit impair ou contienne le facteur premier 2 à un des exposants 1 ou 2. Si  $D$  est impair ou le double d'un nombre impair,  $n$  est impair; si  $D$  est divisible par 4 (et non par 8),  $n$  est le double d'un nombre impair.

14. Nous allons montrer que, réciproquement, si l'on a

$$D = n\delta,$$

$\delta$  étant le plus grand commun diviseur de  $D$  et de  $a - 1$ , la période du développement de la fraction irréductible  $\frac{N}{D}$  donne naissance à un cycle dont les  $n$  nombres forment une progression arithmétique.

Prenons en effet sur la circonférence le point  $(N)$  et considérons le polygone régulier de  $n$  côtés dont ce point est un des sommets; deux sommets consécutifs du polygone sont séparés par  $\delta$  divisions.

On a

$$a^i N - N = (a^i - 1) N \equiv 0 \pmod{\delta};$$

par suite le point  $(a^i N)$  coïncide avec l'un des sommets du polygone régulier qui vient d'être construit. Et comme tous ces points sont au nombre de  $n$  distincts, on obtient bien tous les sommets du polygone. Le théorème est donc démontré, et l'on a  $R = \delta$ . On est dans le cas de la formule (4) prévue au n° 4.

Remarquons qu'ici on peut écrire

$$\frac{N}{D} = \frac{N}{n\delta} = \frac{N'}{n(a-1)},$$

$N'$  étant premier avec  $n$ , et  $a - 1$  étant divisible par chacun des facteurs premiers qui entrent dans  $n$ , avec la restriction qu'il doit être divisible par 4 si  $n$  est lui-même divisible par 4.

Si l'on veut que la période de  $\frac{N}{D}$  fournisse le plus petit nombre du cycle, il faut que  $N$  soit inférieur à  $\delta$ , c'est-à-dire  $N' < a - 1$ .

15. Reste le cas où  $D$  serait divisible par 8,  $a - 1$  étant simplement divisible par 2. Nous allons voir que les  $n$  nombres du cycle ne peuvent pas dans ce cas former une progression arithmétique.

En effet remarquons d'abord que si  $i$  est impair,  $a^i - 1$  est divisible par 2 et non par 4, car on a

$$a^i - 1 = (a - 1)(a^{i-1} + a^{i-2} + \dots + a + 1);$$

le nombre premier 2 entre une fois dans le premier facteur du second membre, et il n'entre pas dans le second facteur, qui est la somme d'un nombre impair de nombres impairs.

Au contraire si  $i$  est pair,  $a^i - 1$  est divisible par  $a^2 - 1$  et par suite par 8.

Cela posé, le nombre  $D$  de divisions de la circonférence étant un multiple de 8, on passe du point  $(N)$  au point  $(a^i N)$  en portant un nombre de divisions égal au double d'un nombre impair si  $i$  est impair, à un multiple de 8 si  $i$  est pair. Si les résidus de  $a^i N$  formaient une progression arithmétique, la raison de cette progression serait donc le double d'un nombre impair; le double de cette raison, qui serait congru à l'un des nombres  $(a^i - 1)N \pmod{\delta}$ , serait divisible par 4, sans l'être par 8, ce qui est impossible.

16. En résumé, on voit qu'on peut former tous les cycles de la seconde catégorie en partant d'un nombre  $n$  quelconque; on prend une base  $a$  telle que  $a - 1$  soit divisible par chacun des facteurs premiers de  $n$  (avec la restriction que  $a - 1$  doit être divisible par 4 si  $n$  est divisible par 4). La période de la fraction illimitée résultant du développement de  $\frac{N'}{n(a-1)}$ , où  $N' < a - 1$



est premier avec  $n$ , donne naissance à un cycle de la seconde catégorie.

Si $n = 3$	on prendra	$a = \text{mult. } 3 + 1,$
si $n = 4$	»	$a = \text{mult. } 4 + 1;$
si $n = 5$	»	$a = \text{mult. } 5 + 1,$
si $n = 6$	»	$a = \text{mult. } 6 + 1,$
si $n = 7$	»	$a = \text{mult. } 7 + 1,$
si $n = 8$	»	$a = \text{mult. } 4 + 1,$
si $n = 9$	»	$a = \text{mult. } 3 + 1,$
.....		

Dans le cas  $a = 10$ ,  $n$  sera une puissance quelconque de 3 :

$$n = 3^h, \quad \frac{N}{D} = \frac{N'}{3^{h+2}} \quad (N' = 1, 2, 4, 5, 7, 8).$$

Pour  $h = 1$ , on aura 6 cycles d'ordre 3 définis respectivement par leurs plus petits nombres

$$037, 074, 148, 185, 259, 296.$$

Pour  $h = 2$ , on aura 6 cycles d'ordre 9 définis respectivement par les nombres

$$012345679, 024691358, 049382716, \\ 061728395, 086419753, 098765432.$$

Pour  $h = 3$ , on aura de même 6 cycles d'ordre 27, et ainsi de suite.

Dans le cas  $a = 12$ ,  $n$  serait une puissance quelconque de 11 et l'on aurait 10 cycles d'ordre 11, 10 cycles d'ordre 121, etc.

Les cycles de la seconde catégorie ne peuvent se présenter si  $a = 2$  ou 3.

Au contraire, les cycles de la première catégorie ne peuvent se présenter si  $a$  est un carré parfait.

**SUR LES COURBES CONTINUES QUI ADMETTENT UNE TANGENTE  
EN CHAQUE POINT ;**

PAR GEORGES VALIRON.

Dans un Mémoire récent <sup>(1)</sup>, M. Fréchet a donné une représentation paramétrique intrinsèque remarquable des courbes continues les plus générales. Cette représentation jouit d'une propriété (que l'on peut rapprocher de cette propriété des courbes rectifiables : l'arc d'une courbe rectifiable est au moins égal à la corde qui le sous-tend) d'où il résulte que, si en un point les coordonnées ont des dérivées par rapport au paramètre, la somme des carrés de ces dérivées ne peut être nulle. Ceci amène M. Fréchet à poser cette question : *une courbe continue qui admet en chaque point une tangente peut-elle être représentée paramétriquement au moyen de fonctions dérivables ?* Je me propose de répondre en partie à cette question ; il résultera en particulier de ce qui suit que la représentation intrinsèque de M. Fréchet ne fournit pas une solution générale du problème posé.

Rappelons que les représentations paramétriques dont il est question ici font correspondre de façon univoque et continue un point  $M(t)$  de la courbe à un point  $t$  d'un segment,  $0 - 1$  par exemple : les coordonnées de  $M$  sont des fonctions continues, non simultanément constantes, de  $t$ .

Si l'on considère une courbe plane possédant un point de rebroussement  $O$  dont la demi-tangente est  $Ox$ , si  $t_0$  est la valeur du paramètre  $t$  en ce point, le quotient

$$\frac{x - x_0}{t - t_0}$$

est positif ou négatif suivant qu'on se place sur l'un ou l'autre des deux arcs déterminés par  $O$  sur la courbe (on suppose  $|t - t_0|$

---

<sup>(1)</sup> *Sur une représentation paramétrique intrinsèque de la courbe continue la plus générale (Journal de Math., t. 4, 1925, p. 281-297). Voir en particulier la troisième Partie du Mémoire et surtout le n° 11.*

suffisamment petit),  $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$  ne peut exister que si sa valeur est 0, mais alors  $\left(\frac{dy}{dt}\right)_0$  existe aussi et est également nul. En un point de rebroussement une représentation paramétrique (de l'espèce indiquée) n'est dérivable que si les dérivées y sont nulles. Il en est de même d'une façon générale lorsque, O étant un point intérieur de la courbe admettant une tangente OT, une droite (un plan dans le cas de l'espace) passant par O laisse la portion de courbe voisine de O d'un seul côté.

Pour écarter ce genre de singularité, on peut, ou bien chercher une relation entre l'existence de la tangente en un point et l'existence des dérivées à droite et à gauche pour les fonctions représentatives, ou bien remplacer l'hypothèse de l'existence de la tangente par celle de l'existence d'une *tangente orientée* (pour les points intérieurs). O étant un point intérieur, dire qu'il y a une tangente orientée en ce point, c'est dire que, M étant un point voisin,  $t_0$  et  $t$  les valeurs du paramètre en O et M, le vecteur OM si  $t > t_0$  et le vecteur MO si  $t < t_0$  ont une direction limite unique lorsque  $t$  tend vers  $t_0$ . Il est équivalent de dire que tout plan passant par O et ne contenant pas la tangente en O coupe la courbe en O : pour  $t > t_0$  et  $t - t_0$  assez petit, on a des points M( $t$ ) situés d'un même côté du plan et pour  $t < t_0$  et  $t_0 - t$  assez petit des points situés de l'autre côté du plan.

Je démontrerai ceci :

I. *Si une courbe continue possède en chaque point une tangente orientée qui varie continûment, cette courbe est rectifiable, les coordonnées d'un point en fonction de l'arc ont des dérivées continues en chaque point, dont la somme des carrés en axes rectangulaires est égale à 1.*

II. Il existe des courbes planes  $\Gamma$  admettant une tangente orientée en chaque point, mais qui ne varie pas continûment en un point O, et telles qu'aucune représentation n'ait ses deux coordonnées dérivables en ce point, à moins que ces deux dérivées ne soient nulles.

III. Il existe des courbes  $\Gamma$  admettant une tangente (non toujours orientée) en chaque point, variant d'une façon continue, et pour lesquelles la singularité précédente de la représentation a encore lieu en un point.

1. Considérons d'abord une courbe plane continue C

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

admettant une tangente orientée variant d'une façon continue :  $f(t)$ ,  $g(t)$ , et l'angle  $A(t)$  de la demi-tangente orientée dans le sens des  $t$  croissants avec une demi-droite fixe, sont des fonctions continues de  $t$  sur le segment  $0 - 1$ .

Nous nous appuierons sur ce lemme : *si P et P' sont deux points de C, il existe un point Q appartenant à l'arc  $\gamma$  ayant pour extrémités ces points en lequel la demi-tangente est parallèle à la corde PP'*. Si l'arc  $\gamma$  est le segment PP', la proposition est évidente. Dans le cas contraire, Q étant l'un des points de  $\gamma$  dont la distance à PP' est maximum, les points voisins de Q sont d'un même côté de la parallèle QT à PP' menée par Q. La demi-tangente en Q est donc portée par QT, sans quoi QT, droite distincte de la demi-tangente, ne couperait pas  $\gamma$  au point Q <sup>(1)</sup>.

$\varepsilon$  étant donné, on peut entourer chaque point  $M(t)$  de C d'un arc correspondant à un intervalle  $t - d(t)$ ,  $t + d(t)$  en chaque point duquel la demi-tangente fait avec la demi-tangente en  $M(t)$  un angle inférieur à  $\varepsilon$ . D'après le théorème de Borel-Lebesgue (ou, si l'on veut, en vertu de la continuité uniforme), on peut recouvrir le segment  $0 - 1$  avec un nombre fini de ces intervalles  $t - d(t)$ ,  $t + d(t)$ . Considérons l'un de ces intervalles et l'arc correspondant  $M'MM''$  (si  $t = 0$  ou  $t = 1$ , M est une extrémité de l'arc que l'on considère). P et P' étant deux points de cet arc, la corde PP' qui est parallèle à la tangente en un point Q de l'arc PP' fait avec la demi-tangente MT en M un angle moindre que  $\varepsilon$ . Si l'on inscrit dans l'arc  $M'MM''$  une ligne polygonale  $\pi$  dont les sommets sont joints dans l'ordre des  $t$  croissants, chaque côté fait avec MT un angle moindre que  $\varepsilon$ , cette ligne se projette biunivoquement sur MT suivant le segment  $m'm''$ , projection de la corde  $M'M''$ , et par suite la longueur de  $\pi$  est au plus égale à

$$\frac{m'm''}{\cos \varepsilon}.$$

La longueur de tout polygone inscrit  $\pi$  est bornée, l'arc  $M'M''$  est

---

(1) Si P et P' sont confondus, la corde PP' peut être prise arbitrairement.

rectifiable (1), et il en est de même de la courbe C complète.

Soit alors  $s$  la valeur de l'arc de C compté à partir de  $t = 0$  dans le sens des  $t$  croissants,  $s$  et  $t$  sont fonctions continues et croissantes l'un de l'autre. Soient  $M(s_0)$  un point de C, MT la demi-tangente et MN la normale faisant avec elle l'angle  $+\frac{\pi}{2}$ , et  $x(s)$  et  $y(s)$  les coordonnées d'un point de C par rapport à ces axes. Si  $s - s_0$  et  $s' - s_0$  sont assez petits, l'angle du vecteur

$$M(s')M(s) \quad (s' < s)$$

avec MT est encore moindre que le nombre arbitrairement petit  $\varepsilon$ . En inscrivant une ligne polygonale et passant à la limite, on a

$$\frac{1}{\cos \varepsilon} \leq \frac{x(s)}{s - s_0} \leq 1,$$

ce qui montre que  $x'(s_0)$  existe et est égal à 1. D'autre part

$$\frac{y(s)}{s - s_0} = \frac{y(s)}{x(s)} \frac{x(s)}{s - s_0};$$

donc  $y'(s_0)$  existe et est égal à 0. Une transformation de coordonnées immédiate montre que si l'on prend des axes fixes OXY, et si A est l'angle de la demi-tangente au point  $M(s)$  avec OX,  $X(s)$  et  $Y(s)$  les coordonnées de ce point,  $X'(s)$  et  $Y'(s)$  existent pour chaque valeur de  $s$ , et l'on a

$$X'(s) = \cos A, \quad Y'(s) = \sin A.$$

Comme A est fonction continue de  $t$ , donc de  $s$ , la proposition I est établie pour une courbe plane.

Pour une courbe gauche le lemme utilisé n'est plus valable, mais on peut s'appuyer sur cet autre lemme général : *si en tout point d'un arc M'M la demi-tangente existe et fait un angle moindre que  $\varepsilon$  avec la demi-tangente MT en M, toute corde joignant deux points de l'arc fait aussi avec MT un angle au plus égal à  $\varepsilon$* . Soient PP' une corde et  $\Sigma$  le demi-cône de révolution engendrée par une demi-droite issue de P et faisant l'angle  $\varepsilon$  avec MT (2). Dans le voisinage de P, l'arc PP' est intérieur à  $\Sigma$ . Montrons que

(1) Voir le *Traité d'Analyse* de JORDAN ou le *Cours d'Analyse* de M. GOURSAT, t. 1, 3<sup>e</sup> édition, note de la page 198.

(2) Il est clair que P et P' ne peuvent être confondus si  $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$ .

cet arc ne coupe pas  $\Sigma$ , ce qui démontrera le lemme. Supposons le contraire et soit  $P''$  un point d'intersection de  $PP'$  avec  $\Sigma$ , l'arc  $PP''$  ne peut être confondu avec le segment  $PP''$ ; désignons alors par  $Q$  un point de l'arc  $PP''$  dont la distance au plan tangent  $\tau$  à  $\Sigma$  le long de  $PP''$  est maximum. La demi-tangente en  $Q$  devrait être parallèle au plan  $\tau$ , elle ferait avec  $MT$  un angle au moins égal à  $\varepsilon$ , ce qui est contraire à l'hypothèse.

En utilisant ce lemme, on montre comme pour une courbe plane que la courbe gauche est rectifiable, et la démonstration s'achève sans difficulté.

2. L'exemple fournissant les singularités signalées dans les énoncés II et III est donné par une courbe  $\Gamma$  symétrique par rapport à  $Oy$  et comprise entre l'axe  $Ox$  et la parabole  $y = x^2$ . Définissons-la pour  $x \geq 0$ .

Prenons sur la parabole la suite de points  $A_n$  d'abscisses  $2^{-n}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), et joignons  $A_n$  à  $A_{n+1}$  par un arc de courbe  $C_n$  passant par le point  $B_n$  de coordonnées

$$x'_n = 2^{-n+1}, \quad y'_n = 2,5 \times 4^{-n-1}.$$

Nous prendrons d'abord pour  $C_n$  un arc tel que  $\Gamma$  soit rectifiable et admette en chaque point une tangente orientée qui variera continûment, sauf en  $O$ . Par exemple,  $C_n$  sera formée :

1° par le demi-cercle

$$(x - 2^{-n+1} - 4^{-n-1})^2 + (y - y'_n)^2 = 4^{-2n-2}, \quad x \geq 2^{-n+1} - 4^{-n-1};$$

2° par deux segments tangents à ce demi-cercle, parallèles à  $Ox$  et limités respectivement aux points de contact avec le demi-cercle et aux points de contact avec deux arcs de cercles tangents à ces segments et tangents extérieurement à la parabole en  $A_n$  et  $A_{n+1}$  (ces deux cercles sont ceux qui sont extérieurs à la bande comprise entre les deux segments);

3° par les arcs de ces derniers cercles limités à leurs points de contact avec les segments et la parabole.

La longueur de l'arc  $C_n$  est au plus égale à  $2^{-n}K$ ,  $K$  étant un nombre fixe,  $\Gamma$  est bien rectifiable et la tangente orientée n'est discontinue qu'en  $O$ . Supposons que les coordonnées  $x, y$  d'un point de la courbe soient exprimées au moyen d'un paramètre nul en  $O$

et qui croît lorsqu'on décrit la courbe dans le sens de  $O$  vers  $A_0$ ; ce qui est loisible. Lorsqu'on parcourt l'arc  $B_n A_n$ ,  $t$  croît de  $t'_n$  à  $t_n$  et si  $x_n$  est l'abscisse de  $A_n$ , on a

$$\frac{x'_n}{t'_n} > \frac{x'_n}{t_n} = \frac{2x_n}{t_n}.$$

Donc

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$$

ne peut exister que si sa valeur est 0, et si cette circonstance se présente,

$$\frac{y}{t} = \frac{y}{x} \frac{x}{t}$$

tend vers 0;  $\left(\frac{dy}{dt}\right)_0$  existe aussi et est nul. On est dans le cas de l'énoncé II.

On remarquera que  $s$  étant l'arc de la courbe  $\Gamma$  ici considérée, compté à partir de l'origine,  $\frac{x}{s}$  ne tend pas vers 0; la représentation au moyen de l'arc, comme celle de M. Fréchet, présente la singularité avec non-existence des dérivées (même des dérivées à droite et à gauche) et non pas des dérivées nulles. On obtiendra la singularité avec dérivées nulles (dans la représentation au moyen de l'arc) en remplaçant  $C_n$  par un arc présentant  $n$  sinuosités au lieu d'une seule, la variation de  $x$  sur les diverses sinuosités gardant la même valeur que précédemment; on voit que l'arc existe encore, mais que sa valeur à partir de  $O$  est infiniment grande par rapport à  $x$ .

3. On peut aussi prendre pour  $C_n$  un arc tel que  $\Gamma$  présente en  $A_n$  et  $B_n$  des points de rebroussement avec tangente parallèle à  $Ox$  et tel que entre  $A_n$  et  $B_n$  ou entre  $B_n$  et  $A_{n+1}$ ,  $x$  et  $y$  soient fonctions monotones l'un de l'autre, la pente de la tangente étant moindre que  $2^{-n}K'$ . Par exemple, on prendra deux arcs de cercle égaux tangents en  $A_n$  et  $B_n$  aux tangentes de rebroussement données et se raccordant au milieu du segment  $A_n B_n$  et l'on procédera de même entre  $B_n$  et  $A_{n+1}$ . On aura un exemple de la singularité III. Ici encore la courbe est rectifiable et la représentation au moyen de l'arc n'a pas de dérivées à droite et à gauche à l'origine. On pourra comme ci-dessus construire des courbes pour lesquelles cette représentation donne des dérivées nulles à l'origine.

**SOLUTIONS DE QUESTIONS DE LICENCE.**

**Question C. 65.**

[*Mécanique rationnelle; épreuve théorique; énoncé publié en juin 1926. p. 286.*]

SOLUTION

PAR M. JACQUES DEVISME.

1° On considérait un cube homogène, d'arête  $a$ , et l'on demandait son mouvement en chute libre, pour des conditions initiales arbitraires.

Le centre de gravité  $G$  prendra le mouvement d'un point pesant. D'autre part, comme l'ellipsoïde d'inertie relatif au point  $G$  est une sphère (moments d'inertie  $A = B = C = \frac{M a^2}{6}$ ), le mouvement du disque par rapport à des axes de direction fixe passant par  $G$  sera une rotation uniforme.

2° Un sommet  $O$  du cube étant fixé, on suppose qu'à l'instant initial une arête est verticale, le solide étant animé d'une rotation  $\omega$  autour de la diagonale  $OO'$  du cube.

L'étude du mouvement est tout à fait classique. On prendra des axes fixes  $Ox_1y_1z_1$ ,  $Oz_1$  vertical et des axes mobiles  $Oxyz$ ,  $Oz$  suivant la diagonale  $OO'$ . Les équations du mouvement sont, en introduisant les angles d'Euler,

$$\varphi' + \psi' \cos \theta = \omega \quad (3^{\text{e}} \text{ équation d'Euler}),$$

$$\frac{11}{2} \psi' \sin^2 \theta + \omega \cos \theta = \frac{\omega}{\sqrt{3}} \quad (\text{moment cinétique par rapport à } Oz_1),$$

$$\frac{11}{12} a (\psi'^2 \sin^2 \theta + \theta'^2) = g(1 - \sqrt{3} \cos \theta) \quad (\text{théorème de la force vive}).$$

On en déduit, pour déterminer  $\cos \theta = u$ , l'équation différentielle

$$\left( \frac{du}{dt} \right)^2 = (1 - \sqrt{3}u) \left\{ \frac{12}{11} \frac{g}{a} (1 - u^2) - \frac{4\omega^2}{363} (1 - \sqrt{3}u) \right\}.$$

La discussion est immédiate :  $u$  variera entre  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  et la plus petite racine  $u_1$  de la quantité entre crochets.

Pour que la valeur maximum de l'angle  $\theta$  soit  $\frac{\pi}{2}$ , il faut que  $u_1$  soit nul, c'est-à-dire

$$\omega^2 = 99 \frac{g}{a}.$$



3° A un moment où  $OO'$  est horizontal, on immobilise brusquement le point  $O'$ . Le nouveau mouvement sera un mouvement de rotation uniforme avec la vitesse angulaire  $\omega$ , autour de l'axe fixe  $OO'$ .

**Question C.75.**

[*Mécanique rationnelle; épreuve théorique; énoncé publié en juillet 1926, p. 320.*]

SOLUTION

Par M. R. WEINZAEFFEL.

Une circonférence matérielle, de masse  $m$  et de rayon  $R$ , peut tourner sans frottement autour d'un de ses diamètres, supposé vertical. Une tige pesante de masse  $m'$  de longueur  $2a$  ( $a < R$ ) s'appuie par ses extrémités sur la circonférence, sur laquelle elle peut glisser sans frottement.

1° Nous rapportons le mouvement à un trièdre trirectangle  $Ox_1y_1z_1$ ,  $O$  étant le centre de la circonférence,  $Oz_1$  la verticale descendante. Nous désignons par  $\varphi$  l'angle du diamètre horizontal de la circonférence avec  $Ox_1$ , par  $\theta$  l'angle de la perpendiculaire  $OH$  à la tige avec  $Oz_1$  et posons

$$b = OH = \sqrt{R^2 - a^2}.$$

La forme vive est

$$2T = \dot{\varphi}^2 \left[ \frac{mR^2}{2} + \frac{m'a^2}{3} \cos^2 \theta + m'b^2 \sin^2 \theta \right] + m' \left( \frac{a^2}{3} + b^2 \right) \dot{\theta}^2$$

et la fonction des forces

$$U = m'gb \cos \theta.$$

L'équation de la force vive et l'équation de Lagrange par rapport à  $\varphi$  détermineront le mouvement. Cette dernière équation

$$\dot{\varphi} \left[ \frac{mR^2}{2} + m' \frac{a^2}{3} \cos^2 \theta + m'b^2 \sin^2 \theta \right] = k$$

montre que la circonférence tourne toujours dans le même sens. Le mouvement relatif de la barre est défini par

$$(1) \quad \dot{\theta}^2 = \frac{1}{m' \left( \frac{a^2}{3} + b^2 \right)} \times \left[ 2m'gb \cos \theta + h - \frac{k^2}{\frac{mR^2}{2} + m' \left( \frac{a^2}{3} \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta \right)} \right],$$

que l'on discutera sans peine par rapport aux données initiales.

2° Dans le cas particulier où la tige a pour longueur le côté du triangle

équilatéral, on a

$$a = R \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad b = \frac{R}{2}$$

et l'équation en  $\theta'$  s'écrit

$$\theta'^2 = \frac{I}{m' \frac{R^2}{2}} \left[ m' g R \cos \theta + h - \frac{k^2}{\frac{m R^2}{2} + m' \frac{R^2}{4}} \right]$$

ou

$$\theta'^2 = \theta_0'^2 + \frac{2g}{R} (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

équation d'un mouvement pendulaire, la longueur du pendule synchrone étant  $l = R$ , indépendante de  $m$  et de  $m'$ . Pour  $\varphi$  on a

$$\varphi' = \frac{4k}{R^2(2m + m')} = \varphi_0'$$

de sorte que la rotation de la circonférence est uniforme.

3° Revenant au cas général et désignant par  $f(\theta)$  le crochet au second membre de l'équation (1), les positions d'équilibre relatif de la tige annuleront  $f'(\theta)$  de sorte qu'il est bien évident, comme l'indique l'énoncé, que les positions horizontales de la tige ( $\theta = 0$  ou  $\pi$ ) sont des positions d'équilibre relatif.

Or en développant en série suivant les puissances de  $\theta$  on a,  $\varphi'$  désignant la vitesse angulaire de la circonférence,

$$f(\theta) = \text{const.} - \theta^2 m' \left[ gb - \varphi_0'^2 \left( b^2 - \frac{\alpha^2}{3} \right) \right] + \dots$$

et, posant  $\theta - \pi = \varepsilon$ ,

$$f(\theta) = \text{const.} + \varepsilon^2 m' \left[ gb + \varphi_0'^2 \left( b^2 - \frac{\alpha^2}{3} \right) \right] + \dots,$$

d'où résulte immédiatement que :

a. Si  $a < \frac{R\sqrt{3}}{2}$ ,  $\theta = 0$  sera stable si  $\varphi_0'^2 < \frac{gb}{R^2 - \frac{4\alpha^2}{3}}$  et  $\theta = \pi$  sera instable.

b. Si  $a > \frac{R\sqrt{3}}{2}$ ,  $\theta = 0$  sera stable et  $\theta = \pi$  stable si  $\varphi_0'^2 > \frac{gb}{\frac{4\alpha^2}{3} - R^2}$ .

L'équation (1) donne par dérivation

$$2m^2 \left( \frac{\alpha^2}{3} + b^2 \right) \theta'' = f'(\theta)$$

et, en se bornant au terme principal du second membre il reste, pour les petites oscillations au voisinage de la position d'équilibre  $\theta = 0$  (lorsque

cette position est stable)

$$\theta'' = - \frac{gb - \varphi_0'^2 \left( b^2 - \frac{a^2}{3} \right)}{\frac{a^2}{3} + b^2} \theta$$

dont l'intégration est élémentaire. La période est

$$2\pi \sqrt{\frac{a^2 + 3b^2}{3gb - \varphi_0'^2 (3b^2 - a^2)}}.$$

De même, pour les petites oscillations autour de la position d'équilibre  $\theta = \pi$ , on a

$$\varepsilon'' = - \frac{\varphi_0'^2 \left( \frac{a^2}{3} - b^2 \right) - gb}{\frac{a^2}{3} + b^2} \varepsilon.$$

4° Une position  $\theta = \theta_0$  correspond à l'équilibre relatif si  $f'(\theta_0) = 0$ , ou

$$gb \sin \theta_0 - \frac{k^2 \left( b^2 - \frac{a^2}{3} \right) \cos \theta_0 \sin \theta_0}{\left[ \frac{mR^2}{2} + m' \left( \frac{a^2}{3} \cos^2 \theta_0 + b^2 \sin^2 \theta_0 \right) \right]^2} = 0,$$

ce qui peut s'écrire encore, en faisant intervenir la valeur correspondante de  $\varphi'$ ,

$$gb \sin \theta_0 - \varphi_0'^2 \left( b^2 - \frac{a^2}{3} \right) \cos \theta_0 \sin \theta_0 = 0,$$

d'où ( $\theta_0$  étant différent de 0 ou  $\pi$ )

$$\varphi_0'^2 = \frac{gb}{\left( b^2 - \frac{a^2}{3} \right) \cos \theta_0} = \frac{gb}{\left( R^2 - \frac{4a^2}{3} \right) \cos \theta_0}.$$

Si  $a < \frac{R\sqrt{3}}{2}$ , cela donne une valeur acceptable pour  $\varphi_0'$  lorsque

$$-\frac{\pi}{2} < \theta_0 < +\frac{\pi}{2};$$

si, au contraire  $a > \frac{R\sqrt{3}}{2}$ , il faut que  $\cos \theta_0$  soit négatif :  $\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \frac{3\pi}{2}$ .

La discussion de la stabilité se fera de la façon suivante : en se bornant, ce qui ne restreint rien, au cas où  $\theta$  est compris entre 0 et  $\pi$ ,  $f'(\theta)$  a le signe de

$$-\left( m \frac{R^2}{2} + m' b^2 \right) - m' \left( \frac{a^2}{3} - b^2 \right) u^2 + \frac{u}{u_0} \left[ \left( m \frac{R^2}{2} + m' b^2 \right) + m' \left( \frac{a^2}{3} - b^2 \right) u_0^2 \right]$$

(où l'on pose  $\cos \theta = u$ ) dont la dérivée prend, pour  $u = u_0$ , la valeur

$$- m' \left( \frac{4 \alpha^2}{3} - R^2 \right) u_0 + \frac{1}{u_0} \left( m \frac{R^2}{2} + m' b^2 \right).$$

Pour  $a < \frac{R\sqrt{3}}{2}$ ,  $u_0$  étant positif, cette expression est positive et cela implique que  $f(\theta)$  soit maximum pour  $\theta = \theta_0$ ; la position d'équilibre correspondante est donc stable parce que, pour des conditions initiales voisines, il apparaît, de part et d'autre de  $\theta_0$ , deux racines de  $\theta_0$  qui donnent les limites du mouvement en  $\theta$ .

Pour  $a > \frac{R\sqrt{3}}{2}$ , l'équilibre peut devenir instable.

### Question C.78.

[*Calcul différentiel et intégral; épreuve pratique; énoncé publié en novembre 1926, p. 379.*]

#### SOLUTION

Par M. E. LAINÉ.

Il s'agit de calculer l'intégrale réelle

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(x-a)\sqrt{x^2(1-x^2)^3}}.$$

L'énoncé du problème indique, sans doute à titre impératif, d'employer la méthode des résidus : c'est un calcul classique. La solution suivante, qui s'applique à toutes les intégrales du même type, montrera que l'emploi des intégrales eulériennes conduit au résultat d'une manière beaucoup plus rapide et beaucoup plus sûre.

Posons

$$x = a \frac{1-t}{a-t};$$

quand  $x$  croît de 0 à 1,  $t$  décroît de 1 à 0; on a alors

$$\begin{aligned} I &= a^{-\frac{2}{5}}(1-a)^{-\frac{3}{5}} \int_0^1 t^{-\frac{3}{5}}(1-t)^{-\frac{2}{5}} dt \\ &= a^{-\frac{2}{5}}(1-a)^{-\frac{3}{5}} \Gamma \frac{2}{5} \Gamma \frac{3}{5} = a^{-\frac{2}{5}}(1-a)^{-\frac{3}{5}} \frac{\pi}{\sin \frac{2\pi}{5}}. \end{aligned}$$

Autre solution par M. R. ODILE.

---

---

**QUESTION PROPOSÉE.**

---

**2495.**

Le point A étant pris de façon quelconque entre B et C sur le segment de droite BC, soient (BC), (CA) et (AB) les demi-cercles décrits sur BC, CA et AB comme diamètres, d'un même côté de BC, dont les rayons seront désignés par  $a$ ,  $b$  et  $c$ . On forme ainsi le triangle à côtés circulaires (ABC) [dit parfois *tranchet* ( $\alpha\rho\beta\gamma\lambda\sigma$ ) d'Archimède]. Soient maintenant tracés : 1° la perpendiculaire AA' à BC; 2°, si B<sub>0</sub> et C<sub>0</sub> sont les milieux de AC et AB, les demi-cercles (BB<sub>0</sub>) et (CC<sub>0</sub>), ces trois lignes concourant d'ailleurs manifestement en un même point. Chacune d'elles divise le triangle (ABC) en deux triangles partiels ayant même rayon de cercle inscrit (1), savoir  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  pour les triangles respectivement formés par AA', (BB<sub>0</sub>) et (CC<sub>0</sub>), et l'on a

$$a^2\alpha = (a^2 + c^2)\beta = (a^2 + b^2)\gamma = abc.$$

M. D'OCAGNE.

---

---

**CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.**

---

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Équation linéaire différentielle du premier ordre : 1° intégration; 2° connaissant deux intégrales particulières, écrire la solution générale; interprétation géométrique; 3° intégrer, comme exemple :  $(x^2 - x)y' - (2x - 1)y + x^2 = 0$ .*

II. *On donne la parabole  $y^2 = 4x$  et le point P( $\lambda$ , 0). De P on abaisse les perpendiculaires sur les diverses tangentes à la parabole.*

1° *Lieu  $\Gamma$  du pied de ces perpendiculaires. Asymptote et point double de  $\Gamma$ . Construire  $\Gamma$  pour  $\lambda = 0$  et  $\lambda = -1$ .*

2° *Enveloppe des  $\Gamma$  quand  $\lambda$  varie. Étudier la réalité des points de contact de  $\Gamma$  avec son enveloppe.*

3° *De O, on mène les tangentes aux  $\Gamma$ . Déterminer les coordonnées du point de contact; construire le lieu de ces points.*

---

---

(1) L'auteur de la question n'ignore pas que la propriété ici énoncée est connue en ce qui concerne les triangles formés dans (ABC) par AA', mais il a estimé qu'il convenait de ne pas la séparer de celle qui regarde les triangles formés par (BB<sub>0</sub>) et (CC<sub>0</sub>).

ÉPREUVE PRATIQUE. — C. 85. — Calculer les longueurs des pendules simples synchrones des pendules composés suivants, constitués de ligne, aires et volume homogène, les axes de rotation étant horizontaux.

1° La courbe plane  $x = \frac{t^2}{2}$ ,  $y = \frac{t^3}{6} - \frac{t}{2}$  limitée aux valeurs de  $t$  comprises entre 0 et  $+\sqrt{3}$ ; l'axe de rotation est  $Ox$ .

2° L'aire comprise entre la parabole  $y^2 = 2x$  et la corde focale perpendiculaire à l'axe; l'axe de rotation étant cette corde.

3° La surface latérale d'un cône droit de révolution de hauteur  $h$ , demi-angle au sommet  $\alpha$ ; l'axe de rotation étant une génératrice.

4° Le volume du tétraèdre trirectangle  $OABC$ , où  $OA = \alpha$ ,  $OB = \beta$ ,  $OC = \gamma$ ; l'axe de rotation étant  $OC$ .

(Bordeaux, novembre 1925.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. — On considère la surface (S) représentée par  $z\sqrt{x^2+y^2} = xy$  et le cylindre (C) d'équation

$$x^2 + y^2 + 2ax = 0 \quad (a > 0).$$

1° Indiquer la nature et ensuite la disposition de (S).

2° Trouver les courbes tracées sur (S) qui coupent à angle droit les sections de (S) par des plans variables  $z = h$ . Construire leurs projections sur  $xOy$ .

3° Aire de la portion de (C) située au-dessus de  $z = 0$ , limitée par  $z = 0$ ,  $y = 0$  et (S).

4° Volume intérieur à (C) situé au-dessus de  $z = 0$ , limité par  $z = 0$ ,  $y = 0$  et (S).

5° Trouver et construire la projection sur le plan  $yOz$  de l'intersection de (S) et de (C).

6° Aire de l'une des boucles de cette courbe.

II. Étudier la variation de la fonction

$$y = L \frac{1+x^2}{x^2} - 3x \operatorname{arc} \operatorname{tang} x.$$

Asymptotes de la courbe représentative.

(On cherchera si l'équation  $y' = 0$  admet des racines. On suppose

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc} \operatorname{tang} x < \frac{\pi}{2},$$

Lu = logarithme népérien.)

INDICATION SUR LA SOLUTION. — I. 1° Cône dont on construit aisément la section par  $z = h$ .

2° On a pour les sections  $z = h$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2},$$

d'où

$$\frac{dx}{x^3} + \frac{dy}{y^2} = 0,$$

et les trajectoires orthogonales sont

$$y^4 - x^4 = \text{const.} = \pm c^4, \quad \rho^4 \cos 2\theta = \pm c^4.$$

3°  $\rho, \theta, z$  étant les coordonnées semi-polaires d'un point de l'intersection de (S) et (C), on a

$$\rho = 2a \cos \theta, \quad ds = 2a d\theta, \quad z = 2a \cos^2 \theta \sin \theta,$$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} z ds = \frac{4a^2}{3}.$$

4° V étant le volume demandé et  $\Gamma$  le demi-cercle de la base du cylindre situé du côté des  $y$  positifs, on a

$$\begin{aligned} V &= \int \int_{\Gamma} z dx dy = \int \int_{\Gamma} \rho^2 \sin \theta \cos \theta d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2a \cos \theta} \rho^2 d\rho = \frac{8a^3}{15}. \end{aligned}$$

5° La courbe cherchée a pour équation

$$y^6 + 4a^2 z^2 (z^2 - y^2) = 0.$$

ou, en coordonnées polaires,

$$\rho^2 \cos^6 \omega = 4a^2 \sin^2 \omega (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega).$$

La courbe se déduit par deux symétries de la bouclé obtenue en faisant varier  $\omega$  de 0 à  $\frac{\pi}{4}$ .

6°  $S = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 \omega}{\cos^6 \omega} (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega) d\omega = \frac{4a^2}{15}$  (en posant  $\text{tang } \omega = t$ ).

I.  $y' = -\left(\frac{x}{1+x^2} + \frac{2}{x} + 3 \text{ arc tang } x\right), \quad y'' = \frac{2}{x^2(1+x^2)^2};$

la courbe représentative admet  $Oy$  pour axe de symétrie.

Les asymptotes sont

$$x = 0 \quad \text{et} \quad y \pm \frac{3\pi x}{2} = 3.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — I.  $x$  étant exprimé en radians, montrer que l'équation

$$2x - \sin 2x - 3 \cos x = 0$$

n'a qu'une racine. Calculer cette racine.

II. Mécanique. — Un point M de masse  $m$  mobile dans un plan vertical est soumis à l'action de son poids et à une force constante  $\lambda mg$  dirigée de M vers un point fixe O. 1° Montrer que la résultante de ces forces dérive d'une fonction de forces, indiquer la nature des courbes de niveau. 2° Trouver les lignes de force ainsi que leur forme générale. 3° On suppose M mobile sans frottement sur un cercle de diamètre OA; OA =  $2a$  est vertical et situé au-dessous de O. Positions d'équilibre du point. Stabilité de l'équilibre. 4° Équation différentielle du premier ordre donnant le mouvement du point sur le cercle. 5° Montrer comment on peut intégrer cette équation, si l'on suppose que le point possède en A une vitesse  $v_0$  donnée par  $v_0^2 = ag(\lambda - 2)^2$ .

On prendra Ox vertical dirigé vers le bas. Si l'on détermine la position de M par un angle, on prendra  $\widehat{xOM} = \theta$ .

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. On trouve  $x = 62^{\circ}40'$ .

II. On pose  $\widehat{xOM} = \theta$ , OM =  $\rho$ .

$$1^{\circ} \quad d\mathcal{E} = -mg(\lambda \rho - dx),$$

la fonction des forces est  $-mg(\lambda \rho - x)$  et les courbes de niveau

$$\lambda \rho = x + b$$

(avec  $\rho > 0$ ) sont des coniques de foyer O dont la directrice  $x + b = 0$  est au-dessus de M. Dans le cas d'hyperboles ( $\lambda < 1$ ), la branche inférieure convient donc seule.

2° Les lignes de forces sont données par

$$\frac{dx}{\lambda x - \rho} = \frac{dy}{\lambda y};$$

d'où

$$\rho = c \frac{\left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{\lambda-1}}{\left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{\lambda+1}};$$

elles ont trois formes différentes suivant que  $\lambda > 1$ , = 1, < 1.

3° Équilibre :

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\theta} = -2mga \sin \theta (2 \cos \theta - \lambda).$$

a.  $\lambda > 2$ , pour  $\theta = 0$ , équilibre instable;

b.  $\lambda < 2$ , pour  $\theta = 0$ , équilibre stable; pour  $\theta = \alpha$  ( $\cos \alpha = \frac{\lambda}{2}$ ), équilibre instable.

$$4^{\circ} \quad v^2 = 4ga(\cos^2 \theta - \lambda \cos \theta) + h,$$

d'où

$$a \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = g(\cos^2 \theta - \lambda \cos \theta) + h.$$



5° Pour  $\rho_0^2 = ag(\lambda - 2)^2$ , on a

$$\rho^2 = ga(2 \cos \theta - \lambda)^2,$$

$$\frac{2 d\theta}{2 \cos \theta - \lambda} = \varepsilon \sqrt{\frac{g}{a}} dt \quad [\text{avec } \varepsilon(2 - \lambda) > 0, \varepsilon = \pm 1].$$

On intègre facilement en posant  $\tan \frac{\theta}{2} = u$ .

(Lyon; juillet 1926.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° Construire les courbes représentées par l'équation

$$(1) \quad y^2 = \frac{x^3 - a^3}{3x},$$

$a$  étant une constante. Asymptotes. Lieu des points de ces courbes où la tangente est parallèle aux axes. 2° Trouver les trajectoires orthogonales des courbes (1) et traiter pour ces trajectoires les questions posées dans 1° pour les courbes (1).

II. 1° Nature et forme de la surface représentée par l'équation  $z = \frac{\sqrt{2}}{3}(x + y)^3$ . 2° Volume compris entre cette surface, les plans  $z = 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 3$ . 3° Aire de la portion de cette surface qui se projette sur le plan  $xOy$  à l'intérieur du triangle dont les côtés sont  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 3$ .

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — 1° Construction immédiate en considérant  $y$  comme fonction de  $x$  ou en passant en coordonnées polaires.

2° Les trajectoires orthogonales sont

$$y(y^2 - 3x^2) = c^3 \quad \text{ou} \quad \rho^3 \sin 3\theta = -c^3$$

et se déduisent des courbes (1) par une symétrie d'axe  $y = x$ .

II. 1° La surface est un cylindre dont la section droite a pour équation dans son plan

$$z^2 = \frac{4}{9} \sqrt{2} x^3.$$

$$2^\circ \quad V = \frac{\sqrt{2}}{3} \int_0^3 dy \int_0^{3-y} (x + y)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{18\sqrt{6}}{7}.$$

$$3^\circ \quad S = \int_0^3 dy \int_0^{3-y} \sqrt{1 + x + y} dx = \frac{116}{15}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. 1° Intégrer l'équation

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \sin x.$$

2° Indiquer la forme dans le voisinage du point  $O$  de la courbe intégrale tangente en ce point à  $Ox$ .

II. Un point  $M$  de masse égale à l'unité situé dans le plan  $xOy$  et dont on désigne les coordonnées par  $x$  et  $y$  est soumis à l'action d'une force dont les projections sur les axes sont

$$X = y^2 - x^2, \quad Y = 2xy.$$

1° Calculer le travail de cette force lorsque le point passe d'une position  $M_0$  de coordonnées  $x_0, y_0$  à une position  $M_1$  de coordonnées  $x_1, y_1$ .

2° Le point  $M$  est mobile sans frottement sur la droite d'équation

$$y\sqrt{3} = x - 4.$$

Y a-t-il une position d'équilibre stable? Déterminer le mouvement du point, en supposant qu'on le lance avec une vitesse  $v_0$  du point  $A$  de la droite qui est sur  $Oy$ . Trouver les valeurs de  $v_0$  pour que dans ce mouvement le point  $M$  reste toujours au-dessous de  $Ox$ .

(Lyon, 6 novembre 1926.)

---

## CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

---

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Première question. — C. 86. — Une surface réglée  $(S)$ , non développable, est engendrée par la droite  $(D)$  donnée par les équations suivantes en coordonnées rectangulaires :

$$(D) \quad \begin{cases} x = az + \lambda, \\ y = bz + \mu, \end{cases}$$

où  $a, b, \lambda, \mu$  sont des fonctions données d'un paramètre variable.

• Soit  $(L)$  la ligne de striction de  $(S)$ . Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que  $(L)$  soit la courbe de contact d'un cylindre circonscrit à  $(S)$  parallèle à  $Oz$ , est que  $(D)$  fasse un angle constant avec  $Oz$ . Montrer que l'on pouvait prévoir géométriquement ce résultat.

La condition précédente étant supposée remplie, les équations de  $(S)$  peuvent être écrites sous la forme

$$\begin{aligned} x &= cz \cos \theta + \lambda(\theta), \\ y &= cz \sin \theta + \mu(\theta), \end{aligned}$$

$c$  étant une constante,  $\lambda(\theta)$  et  $\mu(\theta)$  des fonctions du paramètre  $\theta$  convenablement choisis. A quelle condition doivent satisfaire  $\lambda(\theta)$  et  $\mu(\theta)$  pour que  $(L)$  soit une ligne de courbure de  $(S)$ . La ligne  $(L)$  peut-elle être dans ce cas une ligne quelconque en choisissant convenablement  $\lambda(\theta)$  et  $\mu(\theta)$ ?

Deuxième question. — C. 87. — Étant donnés trois axes de coordon-

nées rectangulaires, déterminer les surfaces qui ont la propriété suivante : la normale en un point M de la surface rencontre en N le plan des  $xy$  de telle sorte que la distance de N à l'origine des coordonnées est une fonction donnée de la distance de M à l'axe  $Oz$ . On développera les calculs dans le cas où la relation entre ces deux distances est la constance de leur produit; on déterminera la surface particulière répondant à la question et contenant le cercle donné :

$$x = 0, \quad y^2 + z^2 = R^2.$$

Nota. — On pourra prendre pour fonction inconnue

$$u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer, en utilisant la théorie des intégrales de variable complexe, l'intégrale réelle

$$\int_0^\infty \frac{x^{\sqrt{3}}}{(1+x)(1+x^2)} dx.$$

(Bordeaux, juin 1926.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Première question. — C.88. — On donne une courbe gauche (C). En un point M, variable sur cette courbe, on mène la tangente MT et la normale principale MN à la courbe. On prend sur MN un point P tel que  $MP = l$  ( $l$  longueur constante donnée). Par le point P on mène la parallèle (D) à MT. Déterminer la ligne de striction de la surface réglée engendrée par (D). On pourra expliquer géométriquement le résultat obtenu.

Deuxième question. — C.87. — Trouver l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles

$$px + qy = \frac{z^2 - x^2 - y^2}{2z}.$$

Montrer que les courbes caractéristiques de cette équation sont les trajectoires orthogonales d'une famille de surfaces à un paramètre. Montrer que sur une surface intégrale quelconque les courbes caractéristiques sont des lignes de courbure de cette surface; déterminer le second système de lignes de courbure.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(z+a)z(z-b)}}$$

prise le long d'un contour fermé simple entourant les trois points  $z = -a$ ,  $z = 0$ ,  $z = b$ ;  $a$  et  $b$  désignent deux constantes réelles et positives.

Quelle relation peut-on déduire de la considération de ce contour

(convenablement choisi) entre les deux intégrales réelles

$$I = \int_{-a}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+a)x(x-b)}} \quad \text{et} \quad J = \int_0^b \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+a)x(x-b)}}.$$

Dans le cas où  $a = b$ , quelles sont les valeurs de chacune de ces intégrales ?

(Bordeaux, novembre 1926.)

### CERTIFICAT DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — C.89. — I. Une sphère de centre  $O$  et de rayon  $R$  se meut au contact d'un plan horizontal fixe de manière qu'un certain rayon matériel de cette sphère conserve une inclinaison de  $45^\circ$  sur la verticale ascendante et que la vitesse de glissement soit géométriquement égale à  $R\dot{\Omega}$ , en appelant  $\dot{\Omega}$  la rotation instantanée. Trajectoires du centre de la sphère et d'une molécule située sur le rayon précédent. Mouvement de la sphère autour de son centre. Surfaces engendrées par rapport au système fixe ou au système lié à la sphère, par l'axe instantané de rotation et de glissement.

C.90. — II. Une plaque homogène pesante affecte la forme d'un triangle équilatéral  $ABC$  de côté  $a$ . Étudier son mouvement en négligeant le frottement et la rotation terrestre, sachant que  $AB$  est astreint à demeurer dans un plan fixe  $O_1x_1y_1$  et  $C$  sur une verticale fixe  $O_1z_1$  (liaisons bilatérales). On prendra pour origine des axes liés à la plaque son centre  $O$ , l'axe  $Ox$  étant parallèle à  $AB$  et l'axe  $Oy$  étant confondu avec la demi-droite  $OC$ . On prendra pour paramètres les deux angles d'Euler variables  $\psi$  et  $\theta$ , déterminant la direction de la plaque. On donnera la discussion du mouvement en faisant usage de méthodes graphiques.

ÉPREUVE PRATIQUE. — C.91. — Un système matériel comprend trois masses ponctuelles pesantes  $A, B, C$  égales à  $m$ . Les masses  $A$  et  $B$  sont fixées sur un fil attaché en  $O$ ,  $C$  est à l'extrémité d'un second fil attaché en  $O'$  sur l'horizontale de  $O$  tandis qu'un troisième fil relie  $A$  et  $C$ . La figure d'équilibre du système est constituée par un carré  $OO'CA$  dont le côté  $OA$  a été prolongé d'une longueur  $AB = OA$ . Soit  $l$  cette longueur. Tous les fils étant supposés inextensibles et sans masse, on écarte  $O'C$  dans le plan du tableau d'un angle  $\alpha$  sur la verticale et l'on abandonne le système, dans cette configuration, sans vitesse initiale. Quand  $O'C$  redevient vertical, il y a tension brusque de  $AC$ . Vitesses prises par le système après le choc.

(Poitiers, novembre 1926.)

**SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DE L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE  
ET LEURS CONSÉQUENCES;**

PAR J. LEMAIRE.

1. Il s'agit des propriétés suivantes :

I. *La figure inverse d'une hyperbole équilatère (H) par rapport à son centre est une lemniscate de Bernoulli.* Prenons par exemple  $a^2$  pour module d'inversion, en appelant  $a$  le demi-axe transverse; F, F', M désignant les foyers et un point quelconque de l'hyperbole,  $f, f', m$  leurs points inverses, nous avons

$$mf = \frac{MF \cdot Of}{OM}; \quad mf' = \frac{MF' \cdot Of'}{OM};$$

comme

$$MF \cdot MF' = \overline{OM}^2,$$

on en conclut

$$mf \cdot mf' = \overline{Of}^2,$$

ce qui démontre le théorème.

Toutes les lemniscates sont des courbes semblables susceptibles de ce mode de génération.

B et C étant les traces de la tangente en M à (H) sur ses asymptotes, K la projection de O sur cette tangente, OK est symétrique de OM par rapport à l'axe focal et coupe l'hyperbole au point M' symétrique de M, et l'on a

$$OK \cdot OM' = OK \cdot OM = \frac{OK \cdot BC}{2} = \frac{OB \cdot OC}{2} = a^2,$$

le lieu de K est donc la lemniscate précédente : *la podaire d'une hyperbole équilatère par rapport à son centre est la lemniscate qui a les mêmes sommets, réels et imaginaires, que l'hyperbole.*

II. *Par un point A d'une hyperbole équilatère (H) et par son centre O, on peut faire passer quatre cercles tangents à cette courbe, et les points de contact sont sur le cercle ayant*

*pour centre le point A' diamétralement opposé à A sur l'hyperbole et passant par son centre.*

Nous savons que si quatre points d'une hyperbole équilatère appartiennent à un cercle, le point de l'hyperbole diamétralement opposé à l'un d'eux est l'orthocentre du triangle des trois autres. Si donc M est le point de contact d'un cercle passant par O et A, et tangent à l'hyperbole, le point M' de (H) diamétralement opposé à M est l'orthocentre du triangle MAB, B étant le troisième point commun aux deux courbes, et si K est le point de rencontre des droites AB et MM', on peut écrire

$$\overline{KO} \cdot \overline{KM} = \overline{KA} \cdot \overline{KB} = -\overline{KM} \cdot \overline{KM'},$$

d'où

$$\overline{KO} = -\overline{KM'};$$

K est le milieu de OM', A est équidistant de O et de M'; par suite A' est équidistant de O et de M, ce qui démontre la proposition.

2. Transformant par une inversion de pôle O et de module  $\alpha^2$  la propriété précédente de l'hyperbole équilatère, nous obtenons ce théorème : *d'un point A d'une lemniscate on peut mener quatre tangentes à cette courbe, et les points de contact sont sur la perpendiculaire  $\Delta$  à OA' en son milieu, A' étant le point diamétralement opposé à A.* La lemniscate est donc de la sixième classe. La perpendiculaire en A' à OA' enveloppant l'hyperbole équilatère (H) de mêmes sommets que la lemniscate, l'enveloppe de  $\Delta$  est l'hyperbole homothétique de (H), dans le rapport  $\frac{1}{2}$ , avec O pour centre d'homothétie.

Si l'on revient à la figure primitive, on peut dire que l'enveloppe d'un cercle passant en O, dont le centre décrit (H), est la lemniscate homothétique, dans le rapport 2, avec O pour centre d'homothétie, de la lemniscate dont les sommets sont ceux de l'hyperbole.

Il est d'ailleurs aisé d'obtenir directement ce résultat en remarquant que le cercle touche son enveloppe au point symétrique de O par rapport à la tangente menée à l'hyperbole au centre du cercle.

3. Démontrons quelques propriétés de la lemniscate qui nous seront utiles plus loin : il existe deux cercles réels passant par le centre  $O$  de l'hyperbole ( $H$ ), ayant leurs centres sur l'axe non transverse, et bitangents à cette courbe; à ces cercles correspondent *deux tangentes doubles réelles* de la lemniscate. De même, il existe deux cercles imaginaires bitangents à l'hyperbole, passant par son centre, et ayant leurs centres sur l'axe transverse, et à ces cercles correspondent *deux tangentes doubles imaginaires* pour la lemniscate.

La plupart des propriétés de la lemniscate peuvent être déduites de celles de l'hyperbole équilatère. Prouvons par exemple que le centre de la lemniscate et les points cycliques sont des points doubles à tangentes inflexionnelles.

Pour le centre, cela résulte immédiatement de la génération de la lemniscate comme transformée par inversion de l'hyperbole; pour établir la propriété pour les points cycliques, remplaçons la transformation par inversion par la transformation plus générale suivante, dite de *Hirst*: Étant donnés une conique ( $C$ ) et un point fixe  $O$ , dont la polaire coupe la conique en  $I$  et  $J$ , à un point quelconque  $M$  on fait correspondre le point  $M'$  de la droite  $OM$  qui est conjugué de  $M$  par rapport à la conique fondamentale ( $C$ ); il y a réciprocité entre les points  $M$  et  $M'$ .

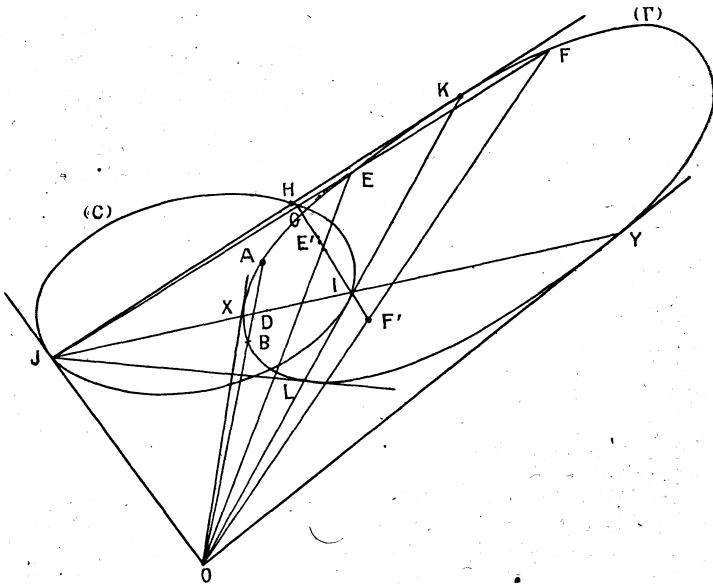
Cherchons la figure obtenue en appliquant ce mode de transformation à une conique ( $\Gamma$ ) pour laquelle le triangle  $OIJ$  est conjugué, de sorte que les tangentes à cette conique issues de  $O$  ont leurs points de contact  $X$  et  $Y$  sur la droite  $IJ$  et conjugués harmoniques par rapport à  $I$  et  $J$ , et que les tangentes issues de  $J$  ont leurs points de contact  $K$  et  $L$  sur  $OI$ . A chacun des points communs à la droite  $IJ$  et à la conique ( $\Gamma$ ) correspond, pour la courbe transformée ( $\Gamma'$ ), le point  $O$  qui est ainsi un point double de cette courbe; toute droite passant par  $O$  coupe ( $\Gamma$ ) en deux points, auxquels correspondent deux points de ( $\Gamma'$ ) qui est par suite une courbe du quatrième ordre.

Considérons une droite passant par  $O$ , très voisine de  $OX$ , et coupant ( $\Gamma$ ) et  $IJ$  en  $A$ ,  $B$  et  $D$ ; au point  $D$  correspond dans la figure transformée le point  $O$ , et aux points  $A$  et  $B$  situés de part et d'autre de  $D$  correspondent deux points  $A'$  et  $B'$  situés de part et d'autre de  $O$ ; si donc la droite  $OAB$  vient coïncider avec la tan-

gente  $OX$  à  $(\Gamma)$ , on voit que cette tangente est pour  $(\Gamma')$  une tangente d'inflexion en  $O$ ; de même  $OY$ .

Soit maintenant une droite, très voisine de la tangente  $JK$  à  $(\Gamma)$ , et coupant cette conique en  $E$  et  $F$ , et la conique fondamentale en  $G$ ; la transformée de cette droite est  $IG$ , de sorte que

Fig. 1.



les points  $E'$  et  $F'$  correspondant à  $E$  et  $F$  sont en ligne droite avec  $I$ ; si donc la droite  $JEF$  vient se confondre avec  $JK$ , qui coupe  $(C)$  en  $H$ , sa transformée  $IE'F'$  tend vers  $IH$ , qui est par conséquent une tangente inflexionnelle en  $I$  pour la transformée  $(\Gamma')$  de  $(\Gamma)$ . A la seconde tangente menée de  $J$  à  $(\Gamma)$  correspond de même une seconde tangente inflexionnelle en  $I$ . Le point  $J$  est, lui aussi, un point double à tangentes inflexionnelles. Il suffit de supposer que  $(C)$  est un cercle de centre  $O$ , et par suite  $(\Gamma)$  une hyperbole équilatère de même centre, pour voir que la lemniscate a bien les points cycliques pour points doubles à tangentes inflexionnelles.

4. Voici encore une propriété de l'hyperbole équilatère qui nous sera utile : par deux points  $A$  et  $A'$  diamétralement opposés

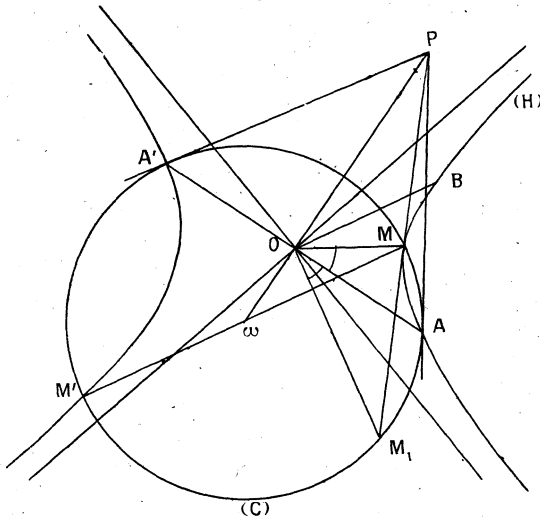


d'une telle hyperbole (H) faisons passer un cercle (C), les deux autres points M et M' communs aux deux courbes sont diamétralement opposés sur (C); O et ω désignant les centres de l'hyperbole et du cercle, on a pour le pôle de AA' par rapport au cercle le point P de la droite Oω déterminé par la relation

$$\overline{OP} \cdot \overline{O\omega} = -\overline{OA}^2;$$

OB, demi-diamètre de (H) parallèle à MM', est symétrique de OA

Fig. 2.



par rapport à un axe de cette conique; Oω étant conjugué de MM' par rapport à l'hyperbole, le pôle de MM' par rapport à cette courbe est le point Q de Oω déterminé par la relation

$$\overline{OQ} \cdot \overline{O\omega} = -\overline{OB}^2 = -\overline{OA}^2;$$

par suite P et Q coïncident : le pôle de AA' par rapport au cercle et le pôle de MM' par rapport à l'hyperbole sont confondus. Si donc la tangente PM à (H) coupe le cercle en M<sub>1</sub>, les points M et M<sub>1</sub>, A et A', sont les sommets d'un quadrilatère harmonique; donc OM et OM<sub>1</sub> sont symétriques par rapport à AA', et l'on a

$$OM \cdot OM_1 = \overline{OA}^2;$$

on peut dire que : si par deux points  $A$  et  $A'$  diamétralement opposés d'une hyperbole équilatère et par un autre point arbitraire  $M$  de cette courbe, on fait passer un cercle qui coupe en  $M_1$  la tangente en  $M$  à l'hyperbole,  $AMA'M_1$  est un quadrilatère harmonique,  $OM$  et  $OM_1$  sont symétriques par rapport à  $OA$ , et  $OM \cdot OM_1 = \overline{OA}^2$ .

Soit  $N$  le point de  $OM$  tel que  $OM \cdot ON = \overline{OA}^2$ ; si,  $A$  et  $A'$  restant fixes,  $M$  décrit  $(H)$ , le lieu de  $N$  est une lemniscate ayant les mêmes axes que  $(H)$  et passant par  $A$ ; le lieu de  $M_1$  est la lemniscate symétrique de la précédente par rapport à  $OA$ , laquelle touche l'hyperbole en  $A$  et  $A'$  et a pour tangentes en  $O$  les droites symétriques, par rapport à  $OA$ , des asymptotes de  $(H)$ ; nous verrons plus loin que cette lemniscate a aussi avec  $(H)$  un double contact imaginaire sur le diamètre perpendiculaire à  $AA'$ .

5. Dans un faisceau ponctuel de coniques déterminé par deux couples de points  $A$  et  $A'$ ,  $B$  et  $B'$ , chaque conique est déterminée par la valeur du rapport anharmonique  $(P, AA'BB')$ , en désignant par  $P$  un point quelconque de cette conique; nous appellerons *conique harmonique du faisceau* la conique pour laquelle ce rapport est harmonique, autrement dit pour laquelle chacune des droites  $AA'$  et  $BB'$  a son pôle sur l'autre.

De même dans un faisceau tangentiel de coniques déterminé par deux couples de tangentes  $(A)$  et  $(A')$ ,  $(B)$  et  $(B')$ , chaque conique est déterminée par la valeur du rapport anharmonique  $(aa'bb')$ ,  $a$  et  $a'$ ,  $b$  et  $b'$  désignant les traces des droites données sur une tangente quelconque de cette conique; nous appellerons *conique harmonique du faisceau* la conique pour laquelle ce rapport est harmonique; pour cette conique le point commun aux droites  $(A)$  et  $(A')$  et le point commun aux droites  $(B)$  et  $(B')$  sont conjugués.

Dans un faisceau ponctuel de cercles, dont  $A$  et  $A'$  sont les points communs, la conique harmonique est le cercle de diamètre  $AA'$ .

Dans un faisceau tangentiel de coniques homofocales, la conique harmonique est l'hyperbole équilatère du faisceau.

Étant donnés deux points réels  $A$  et  $A'$ , les droites isotropes  $AI$

et  $AJ$  issues de l'un coupent les droites isotropes  $A'J$  et  $A'I$  issues de l'autre en deux points imaginaires conjugués  $B$  et  $B'$  qui forment avec les deux premiers deux groupes de *points associés* (Darboux) : les points communs aux cercles d'un faisceau et les cercles de rayon nul de ce faisceau forment deux couples de points associés; de même les foyers d'une conique à centre; de même encore les extrémités de deux diamètres rectangulaires, et en particulier les sommets, d'une hyperbole équilatère, d'une lemniscate.

Toute conique passant par quatre points qui forment deux couples de points associés est conjuguée par rapport aux points cycliques, est par suite une hyperbole équilatère; les quatre points sont les extrémités de deux diamètres rectangulaires. Chacun d'eux peut d'ailleurs être considéré comme l'orthocentre du triangle des trois autres.

La conique harmonique du faisceau déterminé par deux couples de points associés est l'hyperbole équilatère qui a ces points pour sommets.

6. Appelons  $A$  et  $A'$ ,  $B$  et  $B'$  les sommets d'une hyperbole équilatère ( $H$ ) et de la lemniscate ( $L$ ), podaire de ( $H$ ) par rapport à son centre  $O$ , et soit ( $T$ ) la tangente en un point  $M$  de l'hyperbole, de sorte que ( $L$ ) passe par la projection  $K$  de  $O$  sur cette droite;  $OM$  et  $OK$  étant symétriques par rapport aux axes,  $K$  et  $M$  sont conjugués par rapport à  $AA'$  et  $BB'$ , d'où il suit, d'après le théorème de Desargues, que  $K$  est le point où ( $T$ ) est touchée par la conique ( $H'$ ), autre que ( $H$ ), qui lui est tangente parmi les coniques du faisceau déterminé par les points  $A$  et  $A'$ ,  $B$  et  $B'$ , coniques qui sont les hyperboles équilatères ayant  $A$  et  $A'$  pour points diamétralement opposés. Comme  $O$  est le centre de cette conique ( $H'$ ),  $K$  en est un sommet, et l'on a ce théorème : *la lemniscate ( $L$ ) est le lieu des sommets des hyperboles équilatères qui admettent  $A$  et  $A'$  comme points diamétralement opposés.*

En transformant homographiquement ce résultat, on peut dire que : *Étant donnés quatre points  $A$  et  $A'$ ,  $B$  et  $B'$ , et la conique harmonique du faisceau déterminé par ces points, si une tangente ( $T$ ) roule sur cette conique ( $H$ ), la seconde conique ( $H'$ )*

*du faisceau qui touche (T) la touche en un point K dont le lieu est une courbe (L) du quatrième ordre, de la sixième classe, tangente à (H) aux quatre points donnés, et ayant pour points doubles à tangentes inflexionnelles les points (AA', BB'), (AB, A'B'), (AB', A'B); les tangentes au premier de ces points sont les tangentes issues de ce même point à la conique harmonique; (L) possède deux couples de tangentes doubles.*

On peut encore dire que (L) est le lieu des points de contact K, avec une conique variable du faisceau, des tangentes communes à cette conique et à la conique harmonique.

O étant le point commun aux droites AA' et BB', OK et la tangente KT à la conique qui passe en K sont conjuguées par rapport aux points I(AB, A'B') et J(AB', A'B), et l'on peut dire : *Il existe sur chaque conique du faisceau quatre points K tels que OK et la tangente KT à cette conique sont conjuguées par rapport à I et J, et l'enveloppe de KT est la conique harmonique du faisceau.*

On verra facilement ce que deviennent ces propositions si A et A' sont deux points réels, et les deux autres B et B' les points cycliques du plan; on a alors affaire à un faisceau de cercles passant par A et A', et la conique harmonique est le cercle de diamètre AA'.

7. Une transformation corrélative nous donne le théorème suivant : *Étant données quatre droites (A) et (A'), (B) et (B'), et la conique harmonique (H) du faisceau tangentiel qu'elles déterminent, si un point T décrit cette conique, la tangente en ce point à la seconde conique (H') du faisceau qui y passe enveloppe une courbe (L) du sixième ordre, de la quatrième classe, tangente à (H) aux points où les droites données touchent cette conique; cette courbe possède quatre points doubles et six points de rebroussement appartenant deux à deux aux trois diagonales du quadrilatère formé par les quatre droites; ceux de ces points de rebroussement qui sont situés sur la troisième diagonale, celle qui joint les points (A)(A') et (B)(B'), sont les points communs à cette droite et à la conique harmonique.*

On peut encore dire que (L) est l'enveloppe de la tangente, en

chaque point de la conique harmonique, à l'autre conique du faisceau tangentiel qui passe en ce point.

(O) étant la troisième diagonale du quadrilatère, (K) la tangente à la conique (H') au point T de la conique harmonique, le point commun aux droites (O) et (K) et le point T sont conjugués par rapport aux deux premières diagonales, et l'on peut dire : *Chaque conique du faisceau tangentiel admet quatre tangentes (K) dont le point de contact et le point de rencontre avec la troisième diagonale sont conjugués par rapport aux deux premières diagonales, c'est-à-dire celles qui joignent d'une part les points (A)(B) et (A')(B'), et d'autre part les points (A)(B') et (A')(B). Le lieu du point de contact d'une tangente (K) avec la conique correspondante est la conique harmonique du faisceau.*

8. Dans le cas où les points (A)(A') et (B)(B') sont les points cycliques I et J du plan, le faisceau tangentiel est l'ensemble des coniques homofocales admettant pour foyers les points F(A)(B), F'(A')(B'),  $\Phi(A)(B')$ ,  $\Phi'(A')(B)$  et les théorèmes ci-dessus prennent la forme suivante :

*Si un point décrit une hyperbole équilatère, la tangente en ce point à la conique homofocale qui y passe enveloppe une courbe du sixième ordre et de la quatrième classe tangente à l'hyperbole aux points où elle est coupée par ses quatre directrices (points de contact des tangentes issues des points cycliques); cette courbe, qui n'est autre que la développée de l'hyperbole, possède quatre points doubles et six points de rebroussement : deux de ces points de rebroussement sont réels, sur l'axe focal, avec cet axe pour tangente commune; deux autres, imaginaires, sont de même sur l'autre axe; et les deux derniers sont les points à l'infini de l'hyperbole, avec la droite de l'infini pour tangente.*

Chaque conique d'un faisceau de coniques homofocales possède quatre tangentes dont le point de contact est le milieu du segment déterminé sur chacune d'elles par les axes, et le lieu de ces points de contact est l'hyperbole équilatère du faisceau.

9. Considérons une hyperbole équilatère (H) ayant deux points donnés A et A' diamétralement opposés, passant par suite par les points associés B et B'; M étant un point quelconque de (H), (T) la tangente en ce point, M<sub>1</sub> le point de cette tangente tel que OA soit une bissectrice de  $\widehat{MOM_1}$ , O désignant le centre de (H), les points M et M<sub>1</sub> sont conjugués par rapport aux droites AA' et BB'; par conséquent, M<sub>1</sub> est le point de contact avec (T) de la conique du faisceau autre que (H) qui touche cette droite : nous avons vu que le lieu de M<sub>1</sub>, quand M parcourt (H), est une lemniscate tangente à (H) en A et A' (4).

Une transformation homographique nous donne le théorème suivant :

*Le lieu des points de contact d'une conique variable d'un faisceau ponctuel avec les tangentes communes à cette conique et à une conique fixe (H) du même faisceau est une courbe (L) du quatrième degré, de la sixième classe; si A et A', B et B' sont les points communs aux coniques, (L), tangente à (H) en A et A', l'est aussi en B et B', d'où il résulte, en remontant au théorème initial, que la lemniscate a, outre le double contact réel avec l'hyperbole équilatère, un double contact imaginaire (4).*

Revenant au cas général, nous pouvons dire que (L) possède quatre tangentes doubles, trois points doubles à tangentes inflexionnelles, etc.

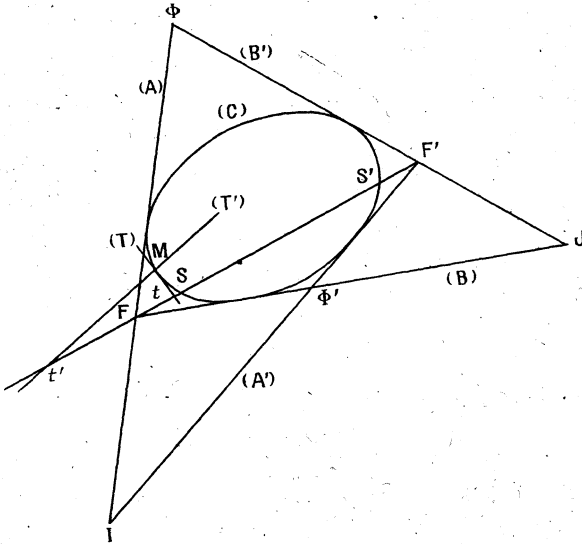
Par corrélation nous en déduisons que : *l'enveloppe des tangentes à une conique variable d'un faisceau tangentiel, aux points communs à cette conique et à une conique fixe (H) du même faisceau, est une courbe de la quatrième classe, et du sixième degré, tangente à (H) aux mêmes points que les quatre tangentes fixes qui déterminent le faisceau; cette courbe admet quatre points doubles, trois tangentes doubles à contacts de rebroussement.*

La méthode qui nous a conduit à ce théorème nous donnerait les positions de ces points remarquables; indiquons un moyen simple d'obtenir les points de rebroussement :

Employant toujours les mêmes notations, appelons (A) et (A'),

(B) et (B') les tangentes fondamentales du faisceau de coniques, (C) la conique fixe, M un point de cette courbe, (T) la tangente en ce point à (C), (T') la tangente à la seconde conique du faisceau

Fig. 3.



qui passe en M; appelons encore F et F' les points (A)(B) et (A')(B'),  $\Phi$  et  $\Phi'$  les points (A)(B') et (A')(B), I et J les points (A)(A') et (B)(B'), S et S' les points communs à (C) et à la droite FF'; les traces  $t$  et  $t'$  de (T) et (T') sur FF' sont conjuguées par rapport à F et F'; supposons que M tende vers S sur la conique (C),  $t$  tend vers S et la position limite de  $t'$  est l'un des points de rebroussement R qui se trouvent sur FF' : ces points de rebroussement sont, comme on voit, les points conjugués harmoniques de S et S' par rapport à F et F'; les deux autres couples de points de rebroussement ont des positions analogues sur les droites  $\Phi\Phi'$  et IJ.

10. Si les points I et J considérés ci-dessus deviennent les points cycliques du plan, les coniques forment un système homofocal de foyers F et F',  $\Phi$  et  $\Phi'$ , les droites (T) et (T'), conjuguées par rapport à I et J, sont rectangulaires, (T') est la normale à (C) en M, et quand ce point parcourt cette conique, (T') enveloppe

la développée de la conique. On trouve ainsi, pour la développée d'une conique à centre, *une courbe de quatrième classe et du sixième degré, qui est tangente à la conique aux quatre points où celle-ci est coupée par ses quatre directrices* (points de contact des tangentes issues des points cycliques); cette développée admet, outre *quatre points doubles, six points de rebroussement, deux sur chaque axe avec cet axe pour tangente, deux sur la droite de l'infini avec cette droite pour tangente*; si  $S$  et  $S'$  sont les sommets situés sur  $FF'$ , les points de rebroussement appartenant à cet axe sont conjugués harmoniques de ces sommets par rapport aux foyers; de même pour  $\Phi\Phi'$ ; les points de rebroussement à l'infini sont conjugués harmoniques des points à l'infini de la conique par rapport aux points cycliques, de sorte que les directions asymptotiques de la développée sont perpendiculaires à celles de la conique.

11. Reprenons la propriété de la lemniscate obtenue au début (2) : par une transformation homographique suivie d'une transformation corrélatrice, nous avons vu comment on peut rattacher à la lemniscate la développée d'une conique à centre. De la proposition rappelée ci-dessus, on peut donc déduire la suivante due à Laguerre (*Œuvres*, t. II, p. 471) : *Si l'on considère une tangente quelconque à la développée d'une conique à centre, et les quatre points où cette tangente coupe la courbe, les tangentes menées en ces points passent par un même point  $\Delta$ .*

Cherchons le lieu de ce point : appelons  $O$  le centre de la lemniscate,  $A$  et  $A'$  deux points diamétralement opposés,  $E$  le point de  $AA'$  situé sur la droite de l'infini ( $D$ ),  $P$  le milieu de  $OA'$ , ( $\Delta$ ) la perpendiculaire à  $OA'$  en son milieu; les points de contact des tangentes à la lemniscate issues de  $A$  sont sur ( $\Delta$ ) et l'enveloppe de cette droite ( $\Delta$ ) est l'hyperbole équilatère ( $H$ ) qui a pour sommets les milieux de  $OS$  et  $OS'$ , en appelant  $S$  et  $S'$  les sommets réels de la lemniscate.

Les deux transformations, homographique, puis corrélatrice, qui permettent de passer de la lemniscate à la développée d'une conique à centre, ellipse par exemple, conduisent aux résultats suivants :  $D$  étant le centre de l'ellipse, ( $A'$ ) une tangente à la déve-



loppée, la parallèle (E) menée à (A') par D et la parallèle menée par le point qui nous occupe, point  $\Delta$  correspondant à la droite ( $\Delta$ ), forment avec (A') et la droite de l'infini un faisceau harmonique; autrement dit ce point  $\Delta$  se trouve sur la droite (P) homothétique de (A'), dans le rapport 2, avec D pour centre d'homothétie. Comme d'autre part ( $\Delta$ ) et OA' sont rectangulaires, c'est-à-dire conjugués par rapport aux points cycliques, auxquels points correspondent les axes de l'ellipse, le point  $\Delta$  et le point à l'infini sur (P) sont conjugués par rapport aux traces de (P) sur les axes, autrement dit  $\Delta$  est le point dont les projections sur les axes de l'ellipse coïncident avec les traces de (A') sur ces mêmes axes.

Le lieu du point  $\Delta$ , courbe transformée par homographie, puis par corrélation, de l'hyperbole équilatère (H), est donc une conique qui coïncide avec le lieu du quatrième sommet du rectangle dont deux côtés appartiennent aux axes et une diagonale à une normale variable de l'ellipse.

Il est manifeste que cette conique est une ellipse, qui passe aux points de rebroussement de la développée; ses points à l'infini sont les points de rebroussement à l'infini de la développée. Cela pouvait se conclure du fait que l'hyperbole équilatère (H) est tangente aux tangentes à la lemniscate en son centre, et par suite aux six tangentes inflexionnelles à la lemniscate en ses trois points doubles. Observons que l'ellipse ainsi obtenue et la première, ayant des directions asymptotiques respectivement perpendiculaires, sont semblables, les axes de chacune étant perpendiculaires aux axes homologues de l'autre.

Au point A de la lemniscate, diamétralement opposé à A', où concourent les quatre tangentes dont les points de contact sont sur la droite  $\Delta$ , point conjugué harmonique de A' par rapport à O et à E( $\infty$ ), correspond, dans la figure corrélatrice, la droite (A) conjuguée de la droite (A') par rapport à la droite (E) et à la droite de l'infini, c'est-à-dire la droite symétrique de (A') par rapport au centre (D) de l'ellipse.

Le point  $\Delta$ , dont les projections sur les axes de l'ellipse déterminent la droite (A), symétrique de (A) par rapport au centre de cette courbe, a été appelé par Laguerre le *centre de la droite* (A). Finalement donc, le théorème énoncé plus haut peut être complété comme il suit : *Une normale (A) à une ellipse coupe la déve-*

loppée en quatre points pour lesquels les tangentes concourent au centre de cette normale relativement aux axes de l'ellipse; le lieu de ce point commun est l'ellipse qui a pour sommets les points de rebroussement de la développée.

---

---

## QUELQUES REMARQUES SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ET LES INTÉGRALES SINGULIÈRES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ;

PAR L'ABBÉ POTRON,

Ancien élève de l'École Polytechnique,  
Docteur ès sciences mathématiques.

---

1. On sait <sup>(1)</sup> que la détermination des surfaces intégrales d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre contenant une courbe donnée (C) se fait par des procédés essentiellement différents suivant que l'équation est, ou non, linéaire. Dans le premier cas, la surface demandée est le lieu des caractéristiques rencontrant (C). Dans le second cas, si l'on emploie la méthode de Lagrange, on a préalablement déterminé une intégrale complète. On cherche alors à former une famille simplement infinie de surfaces de l'intégrale complète tangentes à la courbe (C). L'enveloppe de cette famille est une surface intégrale répondant à la question.

2. On pourrait chercher à appliquer, dans le second cas, le procédé utilisé dans le premier. Si  $V(x, y, z, \lambda, \mu) = 0$  représente une intégrale complète de l'équation  $F(x, y, z, p, q) = 0$ , les caractéristiques sont <sup>(2)</sup> représentées par

$$(1) \quad V(x, y, z, \lambda, \mu) = 0,$$

$$(2) \quad V'_\lambda + \mu' V'_\mu = 0,$$

---

<sup>(1)</sup> Voir, par exemple, mon ouvrage : *Exercices de Calcul différentiel et intégral*, t. I, IV<sup>e</sup> Partie, n<sup>o</sup> 3, p. 220, et n<sup>o</sup> 17, p. 243; Paris, Hermann, 1926. Au cours de ce travail, cet ouvrage sera simplement désigné par « *Exercices* ». Le chiffre romain qui suit ce titre désigne l'une des six Parties en lesquelles est divisé le tome I de cet ouvrage.

<sup>(2)</sup> *Exercices*, IV, 15, p. 242.

$\mu$  étant considéré comme fonction de  $\lambda$ .

Sur la courbe (C), on a, par exemple,

$$(3) \quad x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t).$$

Substituant dans (1) et (2), puis éliminant  $t$ , on obtient une relation

$$(4) \quad G(\lambda, \mu, \mu') = 0.$$

Il faut et suffit que la fonction  $\mu$  de  $\lambda$  vérifie (4) pour que chaque caractéristique rencontre (C) en un point dont le  $t$  est solution commune des équations (1') et (2'), déduites de (1) et (2) en y remplaçant  $x, y, z$  par leurs valeurs (3).

Mais, de la manière même dont on a formé (4), il résulte que son intégrale générale (1) est représentée par (1') où  $t$  joue le rôle de constante arbitraire. D'ailleurs la solution commune de (1') et (2'), compatibles en vertu de (4), est une fonction  $\theta$  de  $\lambda$  dont la dérivée vérifie l'équation obtenue en dérivant (1') et tenant compte de (2'), soit

$$\left( x' \frac{\partial V}{\partial x} + y' \frac{\partial V}{\partial y} + z' \frac{\partial V}{\partial z} \right) \theta' = 0.$$

On a donc, en général  $\theta' = 0$ . Il y a exception si la (...) est nulle, ce qui signifie que  $\theta$  est racine double de (1'), donc que la surface de l'intégrale complète est tangente à la courbe (C). En dehors de ce cas d'exception, à toute solution ordinaire de l'équation (4) correspond une famille simplement infinie de caractéristiques (1)-(2) qui toutes rencontrent la courbe (C) au même point  $M_0$ . Leur lieu  $[\Sigma_0]$ , en général, ne contient donc pas la courbe (C).

### 3. Mais si l'on détermine $\mu$ par l'équation

$$(5) \quad \varphi(\lambda, \mu) = 0$$

obtenue en exprimant que (1') a une racine double, on obtient une famille simplement infinie de surfaces (1) tangentes à la courbe (C) en ses divers points. L'enveloppe  $[\Sigma]$  de ces surfaces, lieu des caractéristiques (1)-(2), contient bien la courbe (C).

---

(1) *Exercices*, III, 2, p. 168.

On peut remarquer que cette surface  $[\Sigma]$  est aussi enveloppe des surfaces  $[\Sigma_0]$  obtenues au n° 2. En effet, au point  $M_0$  de  $(C)$ , la surface  $[\Sigma_0]$  a pour cône de tangentes le cône  $[T]$  de ce point <sup>(1)</sup>. La bande caractéristique, ayant pour éléments initiaux  $M_0$  et un plan tangent au cône  $[T]$  mené par la tangente à  $(C)$ , est, comme ses éléments initiaux <sup>(2)</sup>, commune à  $[\Sigma]$  et  $[\Sigma_0]$ .

De la manière dont on a formé l'équation (5) il résulte que, si l'on considère  $\lambda$  et  $\mu$  comme coordonnées cartésiennes d'un point, l'équation (5) représente l'enveloppe des courbes intégrales de l'équation (4). C'est donc <sup>(3)</sup> la courbe intégrale singulière de cette équation.

4. Ces considérations pouvaient s'appliquer à la solution d'un problème posé, cette année, à Paris, pour le Certificat de Calcul différentiel et intégral <sup>(4)</sup>. On demandait les développables de la congruence des tangentes à une surface  $[S]$ ,  $z = f(x, y)$ , rencontrant la parabole  $(P)$ ,  $z = 2x - y^2 = 0$ . Une des familles se compose d'enveloppes des plans tangents à  $[S]$ , nappe de la surface focale <sup>(5)</sup>. On voit immédiatement que ce sont les cônes  $[\mathcal{C}]$  circonscrits à  $[S]$  ayant pour sommets les points  $P$  de  $(P)$ . Il existe d'ailleurs une développable singulière  $[\mathcal{O}]$ , enveloppe des plans  $[\Pi]$  tangents à  $[S]$  et  $(P)$ . Cette développable  $[\mathcal{O}]$  touche chaque cône  $(\mathcal{C})$  suivant les génératrices de contact des plans tangents qui lui sont menés par la tangente  $PQ$  à la parabole  $(P)$ .

Or la famille doublement infinie des plans tangents à  $[S]$  constitue une intégrale complète <sup>(6)</sup> de l'équation aux dérivées partielles obtenue en éliminant  $\alpha$  et  $\beta$  entre les trois équations

$$(6) \quad z - f(\alpha, \beta) = (x - \alpha) \frac{\partial f}{\partial \alpha} + (y - \beta) \frac{\partial f}{\partial \beta},$$

$$(7) \quad p = \frac{\partial f}{\partial \alpha}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial \beta},$$

<sup>(1)</sup> *Exercices*, IV, 6, p. 233, et 7, p. 234.

<sup>(2)</sup> *Exercices*, IV, p. 235.

<sup>(3)</sup> *Exercices*, III, 3, p. 169.

<sup>(4)</sup> On en trouvera la solution complète dans le tome II de mes « *Exercices* », actuellement sous presse.

<sup>(5)</sup> *Exercices*, I, 25, p. 45.

<sup>(6)</sup> *Exercices*, IV, 14, p. 241.

ou entre (7) et

$$(8) \quad z - px - qy = f(\alpha, \beta) - p\alpha - q\beta.$$

On obtient ainsi une équation de Clairault (1)

$$(9) \quad z - px - qy = F(p, q).$$

Les caractéristiques sont définies par (6) et

$$(10) \quad (x - \alpha) \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} + \beta' \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} \right) + (y - \beta) \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} + \beta' \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} \right) = 0,$$

$\beta$  étant considéré comme fonction de  $\alpha$ . La surface intégrale de (9) contenant la parabole (P) est précisément la développable singulière [O]. La projection  $(\alpha, \beta)$  du contact avec [S] d'un plan [II] décrit la ligne dont l'équation s'obtient en écrivant que l'équation

$$(11) \quad (t^2 - 2\alpha) \frac{df}{d\alpha} + 2(t - \beta) \frac{df}{d\beta} + 2f(\alpha, \beta) = 0$$

a une racine double, soit

$$(12) \quad \left( \frac{df}{d\beta} \right)^2 - 2 \frac{df}{d\alpha} \left[ f(\alpha, \beta) - \alpha \frac{df}{d\alpha} - \beta \frac{df}{d\beta} \right] = 0.$$

Pour exprimer que les caractéristiques (6)-(10) rencontrent la parabole (P), on doit éliminer  $t$  entre (11) et

$$(t^2 - 2\alpha) \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} + \beta' \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} \right) + 2(t - \beta) \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} + \beta' \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} \right) = 0.$$

On obtient ainsi l'équation différentielle

$$(13) \quad G(\alpha, \beta, \beta') = 0,$$

dont (11), où  $t$  joue le rôle de constante arbitraire, représente l'intégrale générale.

Or cette équation (11), qui exprime que le plan tangent à [S] au point projeté en  $(\alpha, \beta)$  passe au point P  $\left( \frac{t^2}{2}, t \right)$ , représente la projection ( $c$ ) de la courbe de contact (C) du cône ( $\oslash$ ) circonscrit à [S] de sommet P. Ces courbes ( $c$ ) sont courbes intégrales ordinaires de l'équation (13). L'équation (12), qui exprime que le plan

(1) *Exercices*, IV, 22, p. 246.

tangent à (S) au point projeté où  $(\alpha, \beta)$  est tangent à la parabole (P), représente la projection ( $d$ ) de la courbe (D) le long de laquelle la développable singulière  $[\omega]$  touche [S]. La courbe ( $d$ ) est bien enveloppe des courbes ( $c$ ), donc courbe intégrale singulière de l'équation (13). Car si M est le contact, sur [S], d'une génératrice PM commune à  $[\omega]$  et au cône  $[\varrho]$  de sommet P, les tangentes en M aux courbes (C) et (D) sont toutes deux conjuguées <sup>(1)</sup> de MP, donc confondues.

---

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES  
(SESSION DE 1926).

---

Mécanique rationnelle.

Étude de certains mouvements d'une toupie. — *La toupie est constituée par un disque circulaire plan homogène, de rayon  $2a$  et de masse  $m$ , d'épaisseur négligeable, fixé à une aiguille perpendiculaire, de masse et d'épaisseur négligeables, de longueur  $a$  en dessous du disque jusqu'à la pointe et  $2a$  au-dessus. L'action de la pesanteur est supposée assimilable à celle d'un champ uniforme, vertical, d'intensité  $g$  par unité de masse; on ne tiendra pas compte de la résistance de l'air. Les candidats pourront traiter les diverses parties dans l'ordre qui leur conviendra.*

I. *La toupie étant animée d'un mouvement de rotation de grande vitesse angulaire autour de son axe repose par sa pointe sur un plan horizontal. On supposera que le frottement maintient cette pointe immobile et que la résistance du plan peut se traduire par une réaction unique appliquée à la pointe.*

a. *Étudier et décrire succinctement le mouvement de la toupie dans le cas où, à certains instants de ce mouvement, l'aiguille a une vitesse nulle, la vitesse angulaire de la toupie*

---

<sup>(1)</sup> Exercices, I, 77, p. 91.

étant alors  $\omega$ . En se limitant à une période de temps qui sépare deux repos successifs de l'aiguille, étudier le mouvement d'une façon plus précise en développant les éléments qui le déterminent suivant les puissances de  $\lambda = \frac{g}{a\omega^2}$  supposé petit et en se bornant aux termes du premier degré en  $\lambda$ .

b. Étudier et décrire succinctement le mouvement dans le cas où, à un certain instant de ce mouvement, l'aiguille passe par la verticale avec une vitesse angulaire  $\varepsilon$ . En supposant  $\varepsilon$  petit, donner des valeurs approchées de la variation du temps et de la précession entre deux passages successifs par la verticale. Que devient le mouvement si l'on fait abstraction de l'action de la pesanteur ?

c. Déterminer les conditions d'un mouvement où l'aiguille garde une inclinaison constante sur la verticale; chercher le système des forces d'inertie et la réaction du plan horizontal. Ce mouvement étant réalisé, on suppose qu'on applique au centre de gravité de la toupie une force horizontale perpendiculaire à l'axe, d'intensité  $f$ ; comment tendent à varier les vitesses? Quel serait de même l'effet d'une percussion qui aurait même point d'application, même direction, et pour intensité  $P$  ?

II. La pointe de la toupie est engagée dans une rainure circulaire horizontale, de rayon  $\rho a$ , qui permet tout déplacement angulaire de l'aiguille et tout déplacement de la pointe dans la rainure; la résistance de cette rainure peut ainsi se traduire par une réaction normale, appliquée à la pointe. Chercher des équations différentielles définissant le mouvement, en prenant pour variables l'abscisse angulaire de la pointe dans la rainure et les angles d'Euler qui définissent la position de la toupie. Chercher s'il existe un mouvement tel que l'aiguille ou son prolongement rencontre l'axe de la rainure en un point fixe.

SOLUTION par MM. CABANTOUS et COHEN BACRIE.

I. Nous prenons les axes habituels, fixes  $Ox_1, y_1, z_1$ , mobiles  $Oxyz$  liés à la toupie. Le point  $O$  est la pointe de la toupie et l'axe  $Oz$

est dirigé suivant son axe, l'axe  $Oz_1$  est vertical (sens positif vers le haut). Nous déterminons la position de la toupie par les trois angles d'Euler  $\theta, \psi, \varphi$ .

L'ellipsoïde d'inertie au point  $O$  est une sphère

$$(A = B = C = 2 ma^2)$$

et l'on a immédiatement les trois intégrales premières classiques du mouvement

$$(e) \quad \begin{cases} \theta'^2 + \psi'^2 \sin^2 \theta = h - \frac{g}{a} \cos \theta, \\ \psi' \sin^2 \theta + r_0 \cos \theta = k, \\ \varphi' + \psi' \cos \theta = r_0; \end{cases}$$

données par le théorème de la force vive, celui du moment cinétique par rapport à  $Oz_1$ , et la troisième équation d'Euler; les constantes  $r_0$  (vitesse angulaire autour de l'axe),  $k$  et  $h$  dépendent des données initiales.

$a$ . Soit  $\theta_0$  une valeur de  $\theta$  pour laquelle l'aiguille a une vitesse nulle ( $\theta'$  et  $\psi'$  sont nuls); les valeurs de  $h$  et  $k$  sont immédiates et un calcul connu conduit, pour déterminer  $\cos \theta = u$ , à l'équation

$$u'^2 = (u_0 - u) \left[ \frac{g}{a} (1 - u^2) - \omega^2 (u_0 - u) \right] \quad (u_0 = \cos \theta_0),$$

dont la discussion est classique.

$A$  étant le point où l'axe de la toupie perce la sphère de centre  $O$  et de rayon unité, la courbe décrite par ce point est festonnée. Elle est comprise entre les deux parallèles limites  $u_0$  et  $u_1$ ,  $u_1$  étant la racine, inférieure à  $u_0$ , du trinôme entre crochets, et comporte des points de rebroussement sur le parallèle supérieur  $u_0$ . Comme  $\omega$  est très grand par hypothèse,  $u_0$  est très peu différent de  $u$ , et  $\theta$  reste sensiblement constant.

Pour étudier le mouvement d'une façon plus précise, nous écrirons l'équation différentielle précédente en  $y$  introduisant  $\lambda = \frac{g}{a\omega^2}$ :

$$(i) \quad u'^2 = \omega^2 (u_0 - u) \{ \lambda (1 - u^2) - (u_0 - u) \}.$$

Pour  $\lambda = 0$  il vient  $u = u_0$ ; on doit donc poser, conformément aux indications de l'énoncé,

$$u(t) = u_0 + \lambda w(t) + \dots$$



avec

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0$$

et l'équation (1) où l'on se borne aux termes de plus bas degré en  $\lambda$  donne

$$w'^2 = \omega^2(-w)(1 - u_0^2 + w),$$

qui s'intègre immédiatement en donnant

$$w = -\frac{1 - u_0^2}{2}(1 - \cos \omega t),$$

d'où

$$u = u_0 - \lambda \frac{1 - u_0^2}{2}(1 - \cos \omega t)$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} \theta &= \arccos u = \arccos u_0 - \frac{\lambda w}{\sqrt{1 - u_0^2}} \\ &= \theta_0 + \frac{\lambda}{2} \sin \theta_0 (1 - \cos \omega t), \end{aligned}$$

On a ensuite

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega \frac{u_0 - u}{1 - u^2}$$

ou, en se bornant au terme du premier degré en  $\lambda$ ,

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega\lambda}{2}(1 - \cos \omega t), \quad \text{d'où} \quad \psi = \frac{\omega\lambda}{2}t - \frac{\lambda}{2}\sin \omega t.$$

Enfin  $\varphi$  se détermine aisément par l'équation

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega - \frac{\omega\lambda}{2} \cos \theta_0 (1 - \cos \omega t),$$

d'où

$$\varphi = \omega t - \psi \cos \theta_0.$$

*b.* En choisissant comme instant initial celui du passage par la verticale, les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{aligned} \varphi' + \psi' \cos \theta &= r_0, \\ \psi' \sin^2 \theta + r_0 \cos \theta &= r_0, \\ \theta'^2 + r_0^2 \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} &= \varepsilon^2 + \frac{g}{a}(1 - \cos \theta). \end{aligned}$$

Posons  $\cos \theta = u$ , la dernière équation devient

$$u'^2 = \left[ \frac{g}{a}(1 - u) + \varepsilon^2 \right] (1 - u^2) - r_0^2(1 - u)^2.$$

Considérons le deuxième membre de cette équation

$$F(u) = (1-u)f(u)$$

- avec

$$f(u) = (1+u) \left[ \frac{g}{a}(1-u) + \varepsilon^2 \right] - r_0^2(1-u).$$

Ce dernier trinôme a ses racines réelles, l'un  $u_1$  étant comprise dans l'intervalle  $-1+1$ , l'autre  $u_2$  supérieure à  $+1$ . Pour  $\varepsilon = 0$  il se réduit à

$$(1-u) \left\{ \frac{g}{a}(1+u) - r_0^2 \right\}$$

qui a les racines  $+1$  et  $-1 + \frac{r_0^2}{g}a$ . Si  $r_0$  est grand (ce que suppose l'énoncé) cette dernière quantité est supérieure à l'unité de sorte que, pour les petites valeurs de  $\varepsilon$ ,  $u_2$  sera voisin de  $-1 + \frac{r_0^2}{g}a$  et  $u_1$  voisin de l'unité; on aura

$$u_1 = 1 - \frac{2\varepsilon^2}{r_0^2 - \frac{2g}{a}} + \dots$$

L'équation différentielle en  $u$ , qui peut s'écrire

$$u'^2 = \frac{g}{a}(1-u)(u_2-u)(u-u_1),$$

montre que  $u$  va varier entre les deux quantités très voisines  $1$  et  $u_1$ .

Il est commode de poser

$$u = \frac{1+u_1}{2} + \frac{1-u_1}{2} \cos \alpha,$$

d'où pour  $\alpha$  l'équation différentielle

$$\left( \frac{d\alpha}{dt} \right)^2 = \frac{g}{a}(u_2-u),$$

et, par suite

$$\sqrt{\frac{g}{a}(u_2-u_1)} > \frac{dz}{dt} > \sqrt{\frac{g}{a}(u_2-1)} \quad (1).$$

---

(4)  $u_2 - u$  ne s'annule jamais, et l'on peut toujours choisir la détermination de  $\alpha$  de façon que  $\frac{d\alpha}{dt}$ , qui ne change pas de signe, soit positif.

Deux passages consécutifs par la verticale correspondent à  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 2\pi$  (en général  $\alpha = 2k\pi$ ), l'intervalle de temps correspondant est compris entre

$$2\pi\sqrt{\frac{a}{g(u_2-1)}}, \quad 2\pi\sqrt{\frac{a}{g(u_2-u_1)}},$$

limités très rapprochés;  $r_0$  étant très grand, il est sensiblement

$$\frac{2\pi}{r_0}.$$

Pour l'angle de précession  $\psi$  on a

$$\frac{d\psi}{d\alpha} = \frac{r_0}{1+u} \sqrt{\frac{a}{g(u_2-u)}},$$

et la variation de précession, entre deux passages, sera comprise entre

$$2\pi \frac{r_0}{2} \sqrt{\frac{a}{g(u_2-u_1)}}, \quad 2\pi \frac{r_0}{(1+u_1)} \sqrt{\frac{a}{g(u_2-1)}},$$

ainsi déterminée avec une erreur relative petite. Pour  $\varepsilon$  tendant vers zéro ( $r_0$  restant fixe, grand), on a, à la limite,

$$\frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{2g}{ar_0^2}}} \sim \pi.$$

Si l'on fait abstraction de l'action de la pesanteur, les équations se réduisent à

$$u'^2 = \varepsilon^2(1-u^2) - r_0^2(1-u)^2,$$

$$\psi' = \frac{r_0}{1+u}$$

dont l'intégration est élémentaire. On sait d'ailleurs que, dans ce cas, l'ellipsoïde d'inertie en O étant une sphère, le mouvement de la toupie est une rotation uniforme autour d'un axe fixe de sorte que le point A décrit une circonférence. Si l'on tient compte de la pesanteur, la trajectoire de A est une petite courbe fermée, sensiblement circonférence si  $r_0$  est très grand.

c. De l'équation de la force vive

$$\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2 \theta = -\frac{g}{a} \cos \theta + h$$

et de la relation

$$\psi' \sin^2 \theta + r_0 \cos \theta = k,$$

on déduit

$$\theta'^2 \sin^2 \theta = \left( h - \frac{g}{\alpha} \cos \theta \right) \sin^2 \theta - (k - r_0 \cos \theta)^2.$$

En écrivant que  $\theta = \theta_0$  est racine double du deuxième membre de cette équation, on obtient la relation

$$2\varphi'_0 \psi'_0 = \frac{g}{\alpha}.$$

Les conditions du mouvement stationnaire de la toupie ( $\theta$  constant) sont donc

$$\theta'_0 = 0, \quad 2\varphi'_0 \psi'_0 = \frac{g}{\alpha}.$$

Le système des forces d'inertie est déterminé :

1° par sa résultante ou force d'inertie de la masse concentrée au centre de gravité, de composantes  $m\xi''$ ,  $m\eta''$ , 0, avec

$$\xi = a \sin \theta \sin \psi, \quad \eta = -a \sin \theta \cos \psi,$$

on en déduit la réaction normale  $mg$  et la réaction tangentielle  $ma\psi'^2 \sin \theta$  mesurée algébriquement sur la direction  $Ov_1$  qui fait l'angle  $\psi + \frac{\pi}{2}$  avec  $Ox_1$  dans le plan  $x_1y_1$ .

2° Par son moment à l'origine égal et de signe contraire au moment en O de la pesanteur.

L'angle  $\theta$  restant constant, le moment cinétique en O a pour composantes sur les axes  $Ouvz$  (notations classiques :  $Ou$  détermine l'angle  $\psi$ ,  $Ov$  lui est directement perpendiculaire dans le plan  $xy$ ) :

$$0, \quad 2ma^2\psi' \sin \theta, \quad 2ma^2(\varphi' + \psi' \cos \theta)$$

et la vitesse de son extrémité, mesurée sur  $Ou$ , sera

$$2ma^2\varphi'\psi' \sin \theta$$

qui doit être égale au moment en O de la pesanteur, soit  $mg a \sin \theta$ , mesuré algébriquement sur le même axe. On retrouve ainsi la condition

$$2\varphi'\psi' = \frac{g}{\alpha}.$$

Si l'on ajoute la force  $f$  que nous mesurons algébriquement sur l'axe  $Ou$ , cela ajoute à l'extrémité du moment cinétique la vitesse  $fa$  portée par  $Ov$ .

D'où, puisqu'à l'instant considéré  $\theta'$  est nul,

$$\begin{aligned} 2ma^2\theta'' &= 0, \\ 2ma^2(\varphi'' + \psi'' \cos \theta) &= 0, \\ 2ma^2\psi'' \sin \theta &= fa, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\psi'' = \frac{f}{2ma \sin \theta}, \quad \varphi'' = -\frac{f \cos \theta}{2ma \sin \theta}.$$

En supposant  $f$  négatif (l'angle  $\theta$  étant aigu), on a  $\psi'' < 0$  au moment où intervient la force horizontale supplémentaire, donc  $\psi'$  décroît, au contraire  $\varphi'' > 0$  donc  $\varphi'$  croît. Résultats opposés pour  $f > 0$ .

Dans le cas où l'on remplace la force  $f$  par une percussion  $P$  les équations restent les mêmes,  $\theta''$ ,  $\varphi''$ ,  $\psi''$  étant remplacés par les accroissements des dérivées  $\Delta\theta'$ ,  $\Delta\varphi'$ ,  $\Delta\psi'$ , soit

$$\Delta\theta' = 0, \quad \Delta\varphi' = -\frac{P \cos \theta}{2ma \sin \theta}, \quad \Delta\psi' = \frac{P}{2ma \sin \theta}.$$

II. Nous prenons des axes fixes  $O, x, y, z$ , analogues à ceux de la première partie, mais ayant pour origine  $O_1$  centre de la rainure circulaire,  $\lambda$  désignera l'abscisse angulaire de la pointe dans la rainure.

Dans ces conditions les coordonnées du centre de gravité par rapport aux axes fixes sont données par les formules

$$\begin{aligned} \xi &= \rho a \cos \lambda + a \sin \theta \sin \psi, \\ \eta &= \rho a \sin \lambda - a \sin \theta \cos \psi, \\ \zeta &= a \cos \theta; \end{aligned}$$

d'où la vitesse de ce point déterminé par la relation :

$$\begin{aligned} v^2 &= a^2[\rho^2\lambda'^2 + \theta'^2 + \psi'^2 \sin^2 \theta + 2\rho\lambda'\psi' \sin \theta \sin(\psi - \lambda) \\ &\quad - 2\rho\lambda'\theta' \cos \theta \cos(\psi - \lambda)], \end{aligned}$$

on en déduit la force vive de la toupie

$$2T = ma^2[\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2 \theta + 2(\varphi' + \psi' \cos \theta)^2] + mv^2.$$

La fonction des forces étant  $U = -mga \cos \theta$ , les équations

de Lagrange s'en déduisent et déterminent le mouvement. On peut substituer à l'une d'elles le théorème de la force vive, soit  $T = U + h$ , et il y a deux autres intégrales premières qui sont linéaires :

$$\begin{aligned} \varphi' + \psi' \cos \theta &= \text{const.}, \\ \frac{\partial T}{\partial \lambda'} + \frac{\partial T}{\partial \psi'} &= \text{const.} \end{aligned}$$

(cette dernière parce que  $T$  ne dépend que de  $\lambda - \psi$ ).

Écrivons l'équation de Lagrange en  $\theta$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [2\theta' - \rho\lambda' \cos \theta \cos(\lambda - \psi)] \\ - [-2\varphi'\psi' \sin \theta + \rho\lambda'\psi' \cos \theta \sin(\psi - \lambda) \\ + \rho\lambda'\theta' \sin \theta \cos(\psi - \lambda)] = \frac{\mathcal{G}}{\alpha} \sin \theta. \end{aligned}$$

Cherchons s'il existe des mouvements pour lesquels l'aiguille rencontre l'axe des  $z$  en un point fixe. Il faut pour cela que l'équation précédente soit identiquement vérifiée pour  $\theta = \text{const.}$ , donc  $\theta'' = \theta' = 0$  et  $\lambda - \psi = \frac{\pi}{2}$  soit  $\lambda' = \psi'$ . On obtient ainsi la relation cherchée

$$2\varphi'\psi' = \frac{\mathcal{G}}{\alpha} - \rho\alpha\psi'^2 \cot \theta$$

qui pour  $\rho = 0$  se réduit à celle déjà obtenue (I, c). Cette dernière question peut se traiter d'une façon plus élémentaire.

L'angle  $\theta$  étant constant, le point S où l'axe  $Oz$  de la toupie rencontre l'axe  $O_1z_1$  du cercle est fixe et la position de la toupie dépend seulement des paramètres  $\varphi$  et  $\psi$ . Prenons les axes suivants :  $O_1u_1$  perpendiculaire au plan des axes  $z_1$  et faisant l'angle  $\psi$  avec  $O_1x_1$ ,  $O_1v_1$  perpendiculaire au plan  $u_1O_1z_1$ , le trièdre  $O_1u_1v_1z_1$  étant supposé direct. Les vitesses angulaires  $\varphi'$  et  $\psi'$  sont constantes. On a en effet, d'une part

$$\varphi + \psi' \cos \theta = \text{const.}$$

(équation d'Euler par rapport à  $Oz$ ) et, d'autre part,

$$2ma^2(\varphi' + \psi' \cos \theta) \cos \theta + A_1\psi' \sin^2 \theta = \text{const.},$$

équation qui traduit le théorème du moment cinétique par rapport à  $Sz_1$  ( $A_1$  est le moment d'inertie par rapport à une perpendiculaire à l'axe en S).

La distance de G à l'axe  $Sz_1$  étant  $\rho a - a \sin \theta$ , son accélération est portée par une parallèle à  $O_1 v_1$  et a pour projection sur  $O_1 v_1$ ,

$$-(\rho a - a \sin \theta) \psi'^2.$$

On en déduit les composantes de la réaction en O (théorème du mouvement du centre de gravité) sur les axes  $O_1 u_1 v_1 z_1$  :

$$0, \quad -m \psi'^2 (\rho a - a \sin \theta), \quad mg.$$

Le moment cinétique en G a pour composantes sur  $O v_1$

$$m a^2 \psi' \sin \theta \cos \theta - 2 m a^2 (\varphi' + \psi' \cos \theta) \sin \theta;$$

sa vitesse (dans le mouvement autour de G) mesurée sur  $O_1 u_1$  est

$$2 m a^2 (\varphi' + \psi' \cos \theta) \psi' \sin \theta - m a^2 \psi' \sin \theta \cos \theta,$$

et le moment des forces étant :

$$m g a \sin \theta - m \psi'^2 (\rho a - a \sin \theta) a \cos \theta,$$

on en déduit la relation entre  $\theta$  et  $\varphi' \psi'$

$$2 \varphi' \psi' \sin \theta = \frac{g}{a} \sin \theta - \rho a \psi'^2 \cos \theta$$

ou encore

$$2 \varphi' \psi' = \frac{g}{a} - \rho a \psi'^2 \cot \theta.$$

### QUESTION PROPOSÉE.

2496.

Étant données deux droites  $D_1, D_2$ , il existe un nombre fini de congruences de droites  $D_3$ , telles qu'à chaque droite  $D_3$  correspond une droite G dont tous les points sont équidistants des droites  $D_1, D_2, D_3$  et un nombre fini de droites  $D_3$ , telles que à chaque  $D_3$  correspond deux droites G dont tous les points sont équidistants des droites  $D_1, D_2, D_3$ . Le lieu des droites équidistantes G est un paraboloïde hyperbolique. Étudier la configuration formée par les points d'intersection d'un plan avec les droites  $D_1, D_2, D_3$  et leurs équidistantes (1).

N. ABRAMESCO.

(1) Pour le cas où les droites  $D_1, D_2, D_3$  sont concourantes, voir la Note de M. APPELL, *Bul. Soc. math.*, t. L, 1922, p. 219.

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. C.92. — *Un système matériel composé de deux barres AB, AC articulées en A, de même longueur  $2l$ , homogènes et de même masse, se meut sans frottement dans un plan fixe, sans aucune force donnée.*

1° *Former les intégrales premières du mouvement.*

2° *On supposera, qu'au début, les deux barres sont dans le prolongement l'une de l'autre, que la vitesse de rotation de la barre AB est  $\omega_1$  et celle de AC,  $\omega_2$ . Discuter suivant la valeur du rapport  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$  comment varie l'angle des deux barres.*

3° *On supposera  $\omega_1 = +5\omega$ ,  $\omega_2 = -3\omega$ ,  $\omega$  rotation positive donnée. On suppose en outre qu'au début du mouvement la vitesse de A est nulle. Au moment où l'angle  $\widehat{BAC}$  prend la valeur zéro, on introduit la liaison persistante  $\widehat{BAC} = 0$ . Calculer quelles sont, après le choc, la vitesse de rotation du système, la trajectoire et la vitesse du milieu des barres. On prendra la direction de AB au début du mouvement pour axe des  $x$  positifs, la position initiale de A pour origine.*

II. C.93. — *Soient S un solide, G son centre de gravité. L'ellipsoïde d'inertie de S, en G, est de révolution autour de Gz et a pour équation par rapport à trois axes rectangulaires Gxyz*

$$A(X^2 + Y^2) + CZ^2 = 1.$$

*Ce solide présente une arête vive qui a pour équations, par rapport aux axes Gxyz,*

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = -b,$$

*a et b positifs. Cette arête est assujettie à rester en contact sans frottement avec un plan horizontal fixe. Le solide est pesant, de masse M.*

1° *Écrire les intégrales premières du mouvement du solide, sans le discuter. On prendra pour axe fixe Oz, la verticale dirigée vers le haut.*

2°  $\theta, \varphi, \psi$  étant les angles d'Euler, il existe une infinité de mouvements où  $\theta, \varphi', \psi'$  sont constants. Quelle relation y a-t-il alors entre  $\theta, \varphi', \psi'$  ?

*Étant données les conditions initiales  $\theta = \theta_0; \theta'_0 = 0; \varphi' = \varphi'_0; \psi' = \psi'_0$ , dans quel sens  $\theta$  variera-t-il au début du mouvement ?*

ÉPREUVE PRATIQUE. — C.94. — 1° *Une circonférence homogène, de centre C, de rayon a, de masse  $m\lambda$ , est mobile autour d'un de ses*



points O qui est fixe. Sur cette circonférence se meut librement et sans frottement une masse ponctuelle  $m$ .

Étudier les petits mouvements dans un plan vertical : décomposer le mouvement en deux mouvements pendulaires. Interprétation géométrique. Pour quelle valeur de  $\lambda$  les petits mouvements sont-ils périodiques ?

Écrire, en supposant  $\lambda = 1$ , la solution particulière pour laquelle la position de départ est la position d'équilibre, le cercle étant immobile.

2° On ajoute une surcharge fixe  $m(1 + \lambda)$  en un point A de la circonférence et tel que  $OA = a$ . Étudier les petits mouvements.

On posera  $\frac{g}{a} = k^2$ .

(Bordeaux, juin 1926.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — Une toupie est constituée par un cône homogène circulaire droit de rayon  $R$  et de hauteur  $4R$ . On imprime à cette toupie une vitesse angulaire initiale  $r_0$  autour de son axe, puis on l'abandonne à elle-même en la posant par sa pointe sur un plan horizontal parfaitement poli, de sorte que son axe fasse avec la verticale ascendante un angle  $\theta_0$ .

1.  $m$  désignant la masse de la toupie, calculer ses moments d'inertie relatifs aux axes centraux d'inertie ;

2. Former les équations différentielles du mouvement de la toupie et montrer qu'elles s'intègrent par quadratures ;

3. Déterminer les limites entre lesquelles varie l'angle de nutation  $\theta$ , sachant que

$$\theta_0 = 30^\circ, \quad R = 5\text{cm}, \quad r_0 = 300 \text{ rad./sec}, \quad g = 981 \text{ cm/sec}^2;$$

4. Déterminer la loi approchée de variation de  $\theta$  en fonction du temps avec les données précédentes ; en déduire la période  $T$  des oscillations.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — Cas particulier d'un problème classique :

$$1. \quad A = B = \frac{3}{4} m R^2, \quad C = \frac{3}{10} m R^2.$$

2.  $N$  étant la réaction du plan, les équations du mouvement sont, avec des notations évidentes :

$$\begin{aligned} m \xi'' &= 0, & m \eta'' &= 0, & m(3R \cos \theta)'' &= N - mg, \\ A \sin^2 \theta \psi' &= C r_0 (\cos \theta_0 - \cos \theta), \\ A(\theta'^2 + \sin^2 \theta \psi'^2) + 9 m R^2 \sin \theta \theta'^2 &= 6 m g R (\cos \theta_0 - \cos \theta), \\ \varphi' + \psi' \cos \theta &= r_0. \end{aligned}$$

Elles s'intègrent manifestement par quadratures,  $\theta$  étant d'abord déterminé par

$$(1) \quad \sin^2 \theta (1 + 12 \sin^2 \theta) \theta'^2 = 8 \frac{g}{R} (\cos \theta_0 - \cos \theta) \left[ \sin^2 \theta - \frac{1}{50} \frac{R}{g} r_0^2 (\cos \theta_0 - \cos \theta) \right].$$

3. On a

$$\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$$

avec

$$\sin^2 \theta_1 - \frac{1}{50} \frac{R}{g} r_0^2 (\cos \theta_0 - \cos \theta_1) = 0;$$

d'où

$$\theta_1 = 34^\circ.$$

4. En posant  $\theta = \theta_0 + \varepsilon$ , (1) devient

$$(1 + 12 \sin^2 \theta_0) \varepsilon'^2 = 8 \frac{g}{R} \varepsilon \left[ \sin \theta_0 - \left( \frac{R r_0^2}{50 g} - 2 \cos \theta_0 \right) \varepsilon \right],$$

soit avec les données numériques

$$4 \varepsilon'^2 = 787 \varepsilon - 12680 \varepsilon^2;$$

d'où

$$\varepsilon = 0,031(1 - \cos 56,4t), \quad T = \frac{2\pi}{56,4} = 0,112 \text{ sec.}$$

(Toulouse, juin 1926.)

## CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Surfaces telles que le triangle déterminé dans le plan tangent en M, par les plans coordonnés, ait une aire dont le centre de gravité soit précisément le point M.

Sur l'une quelconque de ces surfaces S, on considère une cloison quelconque et les volumes  $U_x, U_y, U_z, V_0$  attachés à cette cloison. Différences de ces volumes considérés deux à deux.

Lignes asymptotiques des surfaces S.

SOLUTION. — La première phrase de l'énoncé se traduit par les trois équations

$$x = \frac{px + qy - z}{3p}, \quad y = \frac{px + qy - z}{3q}, \quad z = \frac{z - px - qy}{3}$$

qui se réduisent à deux :

$$px + z = 0, \quad qy + z = 0.$$

Les surfaces S ont pour équation générale

$$xyz = C.$$

Pour plus de détails, voir E. FABRY, *Problèmes d'Analyse*, 1913, problème 247.

On a ensuite

$$U_x - U_y = \int_L xy \, dz,$$

$$U_y - U_z = \int_L yz \, dx,$$

$$U_z - U_x = \int_L xz \, dy,$$

$$U_z - V_0 = \frac{1}{3} \int_L z(x \, dy - y \, dx).$$

Toutes ces intégrales sont nulles pour un contour fermé  $L$  tracé sur une  $S$ .

[Cf. A. BUHL, *Géométrie et Analyse des intégrales doubles* (Collection Scientia, p. 15 et 18).]

Pour les lignes asymptotiques voir dans FABRY (*loc cit.*, problème 459) le cas le plus général de la surface

$$z = x^\alpha y^\beta.$$

(Toulouse, juin 1926.)

**ÉPREUVE THÉORIQUE.** — Surfaces  $S$  telles que  $TP = \text{const.} = a$ , si  $P$  est la projection sur le plan  $Oxy$  d'un point quelconque  $M$  de  $S$  et si  $T$  est le point où le plan tangent en  $M$  coupe  $Oz$ .

Section  $C$  d'une surface  $S$  par un plan passant par  $Oz$ .

On construira, en particulier, la courbe  $C$  qui rencontre  $Oz$  normalement en un point  $A$  de cote  $a$ .

**SOLUTION.** — En coordonnées semi-polaires les surfaces  $S$  ont pour équation aux dérivées partielles

$$z - r \frac{\partial z}{\partial r} = \sqrt{a^2 - r^2},$$

ce qui peut être considéré comme une équation différentielle ordinaire dans le plan  $zOr$ .

La courbe  $C$ , à construire, est représentable par les équations paramétriques

$$r = a \sin \lambda, \quad z = a(\lambda \sin \lambda + \cos \lambda)$$

Marquons le point  $A$  et le point  $A'$  symétrique par rapport à  $O$ ; traçons les droites  $r = \pm a$ . Sur ces droites, la courbe admet une infinité de points de rebroussement à tangentes passant toutes par  $O$ ; elle oscille ainsi d'une droite à l'autre par branches passant toutes par  $A$  ou par  $A'$ . Aucun point d'inflexion réel.

(Toulouse, novembre 1926.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. C. 95. — 1° Trouver les surfaces intégrales de l'équation aux dérivées partielles

$$(E) \quad p(px + qy - 2z) = xy$$

qui passent par la parabole  $x^2 - 2y = 0 = z$ .

2° Déterminer les surfaces intégrales (S) de (E) telles que les courbes caractéristiques de (E) situées sur l'une quelconque des surfaces (S) se projettent sur le plan des  $xy$  suivant des cercles (les axes sont supposés rectangulaires).

3° Les surfaces (S) dépendent d'une constante arbitraire; l'une d'elles ( $S_0$ ), qui passe d'ailleurs par le point  $x = 0, y = -2, z = 4$ , a une équation de la forme

$$(S) \quad z = x^m f\left(\frac{y}{x}\right),$$

où  $m$  est une certaine constante. Écrire l'équation différentielle des lignes asymptotiques de ( $\Sigma$ ) en prenant pour paramètres  $x = u, \frac{y}{x} = v$ , et appliquer le résultat à la détermination des asymptotiques de  $S_0$ .

II. Étant donnée la surface

$$x = u + uv^2 - \frac{u^3}{3}, \quad y = v + u^2v - \frac{v^3}{3}, \quad z = u^2 - v^2,$$

exprimer que les directions  $(du, dv)$  et  $(\delta u, \delta v)$  sont conjuguées et qu'elles se coupent sous l'angle  $\omega$  (les axes sont supposés rectangulaires). En s'appuyant sur le résultat obtenu, déterminer deux familles conjuguées ( $C_1$ ) et ( $C_2$ ) telles que deux courbes  $C_1$  et  $C_2$  se coupent toujours sous un angle constant,  $\omega$ .

ÉPREUVE PRATIQUE — Calculer par la méthode des résidus l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{x^6 + 1}{\sqrt[6]{1 - x^6}} dx,$$

la détermination initiale du radical se réduisant à 1 et le chemin d'intégration étant un segment de l'axe réel.

$$\text{Réponse : } I = \frac{7\pi}{18}.$$

(Poitiers, novembre 1926.)

---

### ERRATA.

Dans le numéro de janvier, page 28, exercice 82, après les valeurs données de  $x$  et  $y$ , ajouter

$$z = 6uv.$$

---

**FORMULE DE L'ACCELERATION EN COORDONNEES QUELCONQUES,  
EQUATIONS DE LAGRANGE, LIGNES GEODESIQUES,  
SYMBOLES DE CHRISTOFFEL, TENSEURS, EN NOTATION VECTORIELLE ;**

PAR A. VÉRONNET.

Considérons un point matériel mobile M, dont la position est déterminée par l'extrémité de son *rayon vecteur*  $\mathbf{r}(x, y, z, \dots)$ , on peut écrire

$$(1) \quad \mathbf{r} = x\mathbf{x} + y\mathbf{y} + z\mathbf{z} + \dots,$$

où  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$  sont les directions des axes (vecteurs unités). Algébriquement on considérera  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$  comme des *unités* dans lesquelles sont mesurées les coordonnées ou les nombres  $x, y, z$ . Le rayon vecteur est une fonction linéaire des variables et des unités. On lui appliquera toutes les notations et les opérations algébriques.

Supposons que le point soit assujéti à certaines liaisons, ou que les coordonnées  $x, y, z$  dépendent de  $n$  paramètres quelconques  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . On peut supposer le rayon vecteur exprimé dans les nouvelles variables  $\mathbf{r}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , *transformation invariante*.

Si le point se déplace en M', désignons par  $d\mathbf{r}$  le vecteur MM', on pourra écrire

$$(2) \quad d\mathbf{r} = \sum \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} dx_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_n} dx_n.$$

ou

$$(2)' \quad d\mathbf{r} = \sum \mathbf{x}_i dx_i, \quad \mathbf{x}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i}.$$

Cette relation définit, en direction et grandeur, les nouveaux axes, ou les *nouvelles unités*  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ . Si tous les  $dx_i$  sont nuls sauf  $dx_i = 1$  on voit que  $\mathbf{x}_i$  mesure la vitesse de variation de  $\mathbf{r}$  quand  $x_i$  seul varie.

Soit  $t$  une variable indépendante, comme le temps, dont dépendent tous les  $x_i$ , en divisant l'équation (2) par  $dt$  on pourra

écrire pour la vitesse  $\mathbf{v}$  du point

$$(3) \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \sum \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \Sigma \mathbf{x}_i x'_i = \mathbf{x}_1 x'_1 + \mathbf{x}_2 x'_2 + \dots$$

On voit immédiatement sur cette formule que l'on a

$$(4) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x'_i} = \mathbf{x}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i}$$

Élevons (3) au carré, on aura

$$(5) \quad \mathbf{v}^2 = 2\mathbf{T} = \Sigma_{ij} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j x'_i x'_j;$$

d'où l'on tire, d'après (4),

$$(6) \quad \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x'_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{v}^2}{\partial x'_i} = \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x'_i} = \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i}$$

Dérivons cette expression par rapport à  $t$ ,

$$(7) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x'_i} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} + \mathbf{v} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} = \mathbf{x}_i \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x_i};$$

car on peut intervertir les dérivations dans le second terme, et l'on a

$$\mathbf{v} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} = \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2}.$$

L'équation (7) peut alors s'écrire

$$(8) \quad \mathbf{x}_i \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x'_i} - \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x_i}$$

Le premier membre, produit de l'accélération par  $\mathbf{x}_i$ , est la composante de l'accélération dans cette direction, ou quand  $x_i$  seul varie. On a autant d'équations que de variables  $x_i$ .

*Équations de Lagrange.* — Multiplions l'équation (8) par  $m$ , et faisons la somme s'il s'agit d'un système.  $\mathbf{T}$  représente alors la force vive totale et  $m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}$  donne la force.

On obtient les équations de Lagrange,

$$(9) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x'_i} - \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x_i} = \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} = \mathbf{X} \frac{\partial x}{\partial x_i} + \mathbf{Y} \frac{\partial y}{\partial x_i} + \dots$$

Si la force  $\mathbf{F}(X, Y, Z)$  dérive d'une fonction de force  $U$  on a

$$(10) \quad \mathbf{F} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i},$$

où la dérivée de  $U$  par rapport à  $\mathbf{r}$  donne la dérivée géométrique, ou le gradient de  $U$ .

*Composantes de l'accélération en coordonnées polaires.* — Dans (1) remplaçons  $x, y, z$  en fonction de  $r, \theta, \varphi$ ,

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

On obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} &= \mathbf{x} \frac{\partial x}{\partial r} + \mathbf{y} \frac{\partial y}{\partial r} + \mathbf{z} \frac{\partial z}{\partial r} = \dots = \mathbf{r}_1 = \mathbf{x}_1, \\ \mathbf{x}_2 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{x}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = r \sin \theta \mathbf{v}_1. \end{aligned}$$

On vérifie que  $\mathbf{x}_1$  est la direction  $\mathbf{r}_1$  du rayon vecteur, que  $r$  est en facteur commun dans  $\mathbf{x}_2$  et que  $\mathbf{u}_1$  est une direction, vecteur unité, dont le carré est égal à 1, de même  $r \sin \theta$  est en facteur dans  $\mathbf{x}_3$ , direction  $\mathbf{v}_1$ .

On obtient alors, comme  $\mathbf{r}_1^2 = \mathbf{u}_1^2 = \mathbf{v}_1^2 = 1$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= r' \mathbf{r}_1 + r \theta' \mathbf{u}_1 + r \sin \theta \varphi' \mathbf{v}_1, \\ \mathbf{v}^2 &= 2T = r'^2 + r^2 \theta'^2 + r^2 \sin^2 \theta \varphi'^2. \end{aligned}$$

Les expressions relatives à  $\theta$  seront

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \theta'} &= r^2 \theta', \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \theta'} = 2r r' \theta' + r^2 \theta'', \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = r^2 \sin \theta \cos \theta \varphi'^2, \\ \alpha_2 &= \mathbf{u}_1 \frac{d^2 T}{dt^2} = 2r' \theta' + r \theta'' - r \sin \theta \cos \theta \varphi'^2; \end{aligned}$$

où  $\alpha_2$  désigne la composante de l'accélération, si l'on suppose que  $\theta$  seul varie, c'est-à-dire dans la direction du méridien. On obtiendra de même  $\alpha_1$  et  $\alpha_3$  dans la direction du rayon vecteur et dans la direction normale aux deux premières.

*Lignes géodésiques.* — La nature de l'espace autour d'un point  $M$  sera caractérisée par le système d'axes, ou d'unités,  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  en ce point. Le déplacement élémentaire autour de

ce point, sur une courbe ou dans l'espace, sera caractérisé par la valeur de  $d\mathbf{r}$  formule (1). Or le carré d'un vecteur donne le carré de sa longueur. En désignant par  $ds$  la longueur du déplacement élémentaire  $d\mathbf{r}$ , caractérisé par les accroissements  $dx_1, dx_2, \dots$ , on a, d'après (2)',

$$(11) \quad ds^2 = d\mathbf{r}^2 = \Sigma \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j dx_i dx_j.$$

La variation de cette grandeur sera déterminée par

$$(12) \quad \frac{1}{2} d(ds^2) = \frac{1}{2} d(d\mathbf{r}^2) = d^2\mathbf{r} d\mathbf{r} = d^2\mathbf{r} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_1} dx_1 + \dots \right).$$

Pour que ce déplacement soit minimum, pour un accroissement  $dx_i$ , il faut donc que l'on ait pour chaque variable  $x_i$

$$d^2\mathbf{r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} = d^2\mathbf{r} \mathbf{x}_i = 0.$$

C'est précisément l'expression (8), égalée à zéro, qui définit ainsi les lignes géodésiques d'un espace ou d'une surface.

On peut transformer cette expression en prenant les dérivées par rapport à  $s$  au lieu de  $t$ . En désignant par  $\Phi$  la nouvelle valeur de  $T$  on aura

$$(13) \quad \frac{d}{ds} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0, \quad 2\Phi = \Sigma_{ij} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds}.$$

C'est l'expression (9) du *Traité de mécanique rationnelle* de P. Appell, t. 5, p. 42. On peut remplacer  $\Phi$  par sa valeur en fonction des  $\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j = g_{ij}$ , qui ne sont pas autre chose que les éléments de la quadrique fondamentale. Après quelques transformations, on obtiendra l'expression (9''),

$$(14) \quad \frac{d^2 x_k}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} r s \\ k \end{matrix} \right\} \frac{dx_r}{ds} \frac{dx_s}{ds} = 0.$$

*Symboles de Christoffel.* — La parenthèse est le symbole de Christoffel de seconde espèce dans la théorie des tenseurs. Or on peut obtenir cette expression (14) beaucoup plus directement, ainsi que la signification explicite des symboles de Christoffel.

En effet prenons la différentielle seconde du rayon vecteur  $\mathbf{r}$ ,





d'après (2) on a

$$(15) \quad d^2 \mathbf{r} = \sum_{ij} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j + \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} d^2 x_i,$$

Considérons le système d'axes, ou d'unités, *inverse* ou réciproque du système  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  ci-dessus, et défini par les relations

$$(16) \quad \mathbf{x}^i = \frac{\partial x_i}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathbf{x}^i \mathbf{x}_i = 1, \quad \mathbf{x}^i \mathbf{x}_j = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j.$$

Multiplicons (15) par  $\mathbf{x}^k$ , on obtient, en divisant par  $ds^2$ ,

$$(17) \quad \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} \frac{\partial x_k}{\partial \mathbf{r}} = \frac{d^2 x_k}{ds^2} + \sum_{ij} \frac{\partial x_k}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_i \partial x_j} \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_j}{ds}.$$

Or cette expression en  $d^2 \mathbf{r}$  doit être nulle pour les lignes géodésiques. On obtient l'expression (14), ce qui définit le symbole, en modifiant les indices arbitraires,

$$\left\{ \begin{matrix} i & j \\ & k \end{matrix} \right\} = \frac{\partial x_k}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_i \partial x_j} = \mathbf{x}^k \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial x_j}.$$

En multipliant au contraire la formule (15) par  $\mathbf{x}_k$  et égalant à zéro, on obtient

$$\sum_i \mathbf{x}_k \mathbf{x}_i \frac{d^2 x_i}{ds^2} + \sum_{ij} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j = 0$$

qui est la formule (9) du Traité indiqué et qui définit le symbole de première espèce de Christoffel

$$\left[ \begin{matrix} i & j \\ & k \end{matrix} \right] = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_i \partial x_j} = \mathbf{x}_k \frac{\partial \mathbf{x}_j}{\partial x_i}.$$

On a d'ailleurs les relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j}{\partial x_k} &= \mathbf{x}_i \frac{\partial \mathbf{x}_j}{\partial x_k} + \mathbf{x}_j \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_i \partial x_k}, \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{x}_k \mathbf{x}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{x}_k \mathbf{x}_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j}{\partial x_k} \right) \end{aligned}$$

qui définissent les symboles en fonction des *unités du second ordre*  $\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j = g_{ij}$  produits de deux unités du premier ordre.

Les quantités définies par ces symboles de Christoffel ne sont pas autre chose que les composantes et projections des *dérivées*

secondes du rayon vecteur  $\mathbf{r}$ , dans le système d'unités attaché au point considéré et dans le système inverse.

*Le tenseur et sa dérivée.* — Soit  $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$  une fonction algébrique des variables attachées à un point  $M$ . Prenons sa dérivée par rapport à  $\mathbf{r}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , on aura

$$(18) \quad \frac{\partial X}{\partial \mathbf{r}} \equiv \sum_i \frac{\partial X}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \mathbf{r}} = \Sigma_i \mathbf{x}^i \frac{\partial X}{\partial x_i} = \Sigma_i \mathbf{x}^i X_i.$$

Les  $\mathbf{x}^i$  définissent le système inverse d'unités (16). La dérivée vectorielle (18) est un vecteur, ou tenseur du premier ordre. Les éléments algébriques  $X_i$  du tenseur sont covariants s'ils sont exprimés dans les unités inverses  $\mathbf{x}^i$ . Ils sont contravariants dans le cas contraire. On aura pour la différentielle

$$(19) \quad dX = \frac{\partial X}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{r} = \sum \frac{\partial X}{\partial x_i} dx_i, \quad d = d\mathbf{r} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \Sigma dx_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

expression qui montre que les  $\mathbf{x}_i$  sont bien définis par les relations (16). On a la différentielle pour des coordonnées ou des unités quelconques. On aura  $d^2$  en élevant  $d$  au carré.

Désignons par  $\mathbf{X}$  le vecteur de (18), et prenons de nouveau sa dérivée, on aura

$$(20) \quad \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{r}} = \Sigma_j \mathbf{x}^j \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x_j} = \Sigma_{ij} \mathbf{x}^i \mathbf{x}^j \frac{\partial X_i}{\partial x_j} + \Sigma_{ij} \mathbf{x}^j X_i \frac{\partial \mathbf{x}^i}{\partial x_j}.$$

Or les formules (16) nous donnent

$$(21) \quad \frac{\partial \mathbf{x}^i \mathbf{x}_k}{\partial x_j} = \mathbf{x}_k \frac{\partial \mathbf{x}^i}{\partial x_j} + \mathbf{x}^i \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial x_j} = 0.$$

D'où en multipliant par  $\mathbf{x}^k$  et sommant, on a

$$(22) \quad \frac{\partial \mathbf{x}^i}{\partial x_j} = - \Sigma_k \mathbf{x}^k \mathbf{x}^i \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial x_j} = - \Sigma_k \mathbf{x}^i \mathbf{x}^k \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_k \partial x_j}.$$

Le second terme de (20) devient

$$- \Sigma_{ijk} \mathbf{x}^j \mathbf{x}^k \mathbf{x}^i X_i \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_k \partial x_j} = - \Sigma_{jk} \mathbf{x}^j x^k \mathbf{X} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_k \partial x_j},$$

On peut remplacer l'indice arbitraire  $k$  par  $i$  et la dérivée vectorielle du vecteur  $\mathbf{X}$ , ou tenseur du premier ordre, devient, en

portant dans (20),

$$(23) \quad \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{r}} = \Sigma_{ij} \mathbf{x}^i \mathbf{x}^j \left( \frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \mathbf{x} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial x_j} \right), \quad \mathbf{X} = \Sigma_i \mathbf{x}^i X_i.$$

C'est un tenseur du second ordre, défini par les unités du second ordre  $\mathbf{x}^i \mathbf{x}^j$ . Chaque parenthèse représente un élément  $a_{ij}$  du tenseur. En prenant de nouveau sa dérivée, on aura un vecteur ou tenseur du troisième ordre en  $\mathbf{x}^i \mathbf{x}^j \mathbf{x}^k$ , avec trois termes dans la parenthèse, et ainsi de suite. On peut écrire

$$\mathbf{x} \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial x_j} = \Sigma_k \mathbf{x}^k \frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial x_j} X_k = \Sigma_k \frac{\partial x_k}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_k \partial x_j} X_k = \left\{ \begin{matrix} i & j \\ & k \end{matrix} \right\} X_k.$$

On retrouve l'expression du symbole de Christoffel, qui sert à traduire en tensoriel la dérivée covariante de Ricci. L'expression (23) est beaucoup plus claire et compréhensive, car elle conserve et met en évidence tous les éléments sur lesquels on opère. Elle se prête beaucoup mieux aux recherches théoriques.

En mécanique la connaissance de l'accélération, ou  $d^2 \mathbf{r}$ , permet d'étudier et de définir complètement le mouvement d'un point matériel. En calcul différentiel absolu, la connaissance de  $d\mathbf{r}$  et de  $d^2 \mathbf{r}$  ou des  $\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_i \partial x_j}$ , c'est-à-dire des unités du premier ordre et du second ordre, les  $\mathbf{x}_i$  et les  $\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j = g_{ij}$ , permettra de définir la position d'un point géométrique quelconque, dans un espace ou une multiplicité quelconque, permettra de définir cet espace. Les espaces les plus simples, les espaces euclidiens, seront les espaces uniformes, où le système d'unités, ou d'axes, reste partout le même, les  $\mathbf{x}_i$  ou les  $g_{ij}$  sont constants.

Dans l'espace de Riemann, et le calcul tensoriel ordinaire, on a

$$\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \mathbf{x}_j}{\partial x_i} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Dans l'espace de Cartan, ces dérivées partielles ne sont plus égales. Les symboles de Christoffel ne peuvent plus être définis de la même façon en fonction des  $g_{ik}$  et des symboles tensoriels. Ils le sont toujours de même avec les unités vectorielles  $\mathbf{x}_i$ .

## RACINES MULTIPLES DES SYSTÈMES DE $m$ ÉQUATIONS A $m$ INCONNUES;

PAR ANDRÉ BLOCH.

Dans le fascicule, d'ailleurs à tous égards très intéressant, qui dans l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* est consacré aux polynômes et aux fractions rationnelles, se trouve la phrase suivante (1) :

« Il semble très difficile d'énoncer des conditions nécessaires et suffisantes pour que  $(z_{10}, z_{20}, \dots, z_{m0})$  soit une racine multiple d'ordre 3, au moins, d'un système d'équations

$$f_1(z_1, z_2, \dots, z_m) = 0, \dots, f_m(z_1, z_2, \dots, z_m) = 0. »$$

Il se trouve, en réalité, que la chose est aisée; voici le résultat que l'on établit facilement :

*Si les premiers mineurs du jacobien (2) de  $f_1, \dots, f_m$  s'annulent pour  $(z_{10}, z_{20}, \dots, z_{m0})$ , la racine est au moins d'ordre 4.*

*Si un premier mineur du jacobien est différent de zéro pour  $(z_{10}, z_{20}, \dots, z_{m0})$ , soit  $\alpha_1^1$  ce mineur; soient  $\alpha_1^1, \alpha_1^2, \dots, \alpha_1^m$  les premiers mineurs affectés de signes alternés, pris dans les mêmes colonnes;  $\alpha_1^1, \alpha_2^1, \dots, \alpha_m^1$  les premiers mineurs affectés de signes alternés, pris dans les mêmes lignes; soient  $f_{12}, \dots, f_{m2}$  les parties quadratiques de  $f_1, \dots, f_m$ . Alors, la condition nécessaire et suffisante pour que  $(z_{10}, z_{20}, \dots, z_{m0})$  supposée racine d'ordre au moins 2 soit racine d'ordre au moins 3 pour le système est que la forme quadratique*

$$\alpha_1^1 f_{12} + \alpha_1^2 f_{22} + \dots + \alpha_1^m f_{m2}$$

*s'annule pour  $(z_1, z_2, \dots, z_m) = (\alpha_1^1, \alpha_2^1, \dots, \alpha_m^1)$ .*

(1) E. NETTO et R. LE VAVASSEUR, t. I, n° 9, p. 145.

(2) Le jacobien est supposé écrit chaque fonction dans une ligne, chaque variable de dérivation dans une colonne.

On pourra sans doute obtenir de même la condition nécessaire et suffisante pour qu'une racine d'ordre  $p - 1$  au moins soit d'ordre  $p$  au moins; on ne changera d'ailleurs rien au fond de la question en supposant qu'il n'y a que deux variables, c'est-à-dire qu'il s'agit de l'intersection de deux courbes (pour ce cas le problème est virtuellement résolu par l'égalisation des dérivées premières, secondes, etc.,  $(p - 1)^{\text{ièmes}}$  de  $y$  par rapport à  $x$ ).

---

---

[O'8]

**SUR UN MOUVEMENT PLAN A DEUX PARAMÈTRES,  
DOUBLEMENT DÉCOMPOSABLE;**

PAR RAOUL BRICARD.

---

1. Soient  $S_0$  un solide fixe,  $S_1$  un solide animé d'un mouvement à un paramètre ou mouvement  $\mathcal{M}_1$  par rapport à  $S_0$ ,  $S_2$  un solide animé d'un mouvement  $\mathcal{M}_1$ , indépendant du premier, par rapport à  $S_1$ . La position de  $S_2$  par rapport à  $S_0$  dépend de deux paramètres, et l'on peut parler du mouvement à deux paramètres ou mouvement  $\mathcal{M}_2 \left( \frac{S_2}{S_0} \right)$ . Ce  $\mathcal{M}_2$ , résultant de deux  $\mathcal{M}_1$ , est dit *décomposable*. Il est clair que le  $\mathcal{M}_2$  le plus général n'est pas décomposable.

M. G. Kœnigs, qui a introduit en Cinématique la notion de mouvement décomposable (elle s'étend naturellement aux mouvements à plus de deux paramètres), a posé la question de *rechercher tous les  $\mathcal{M}_2$  qui sont décomposables de plusieurs manières*.

Le problème est déjà difficile quand tous les mouvements considérés sont des mouvements *plans*, c'est-à-dire des mouvements de plans glissant les uns sur les autres. Dans une Note déjà ancienne (1), j'ai fait connaître un certain nombre de  $\mathcal{M}_2$  plans doublement décomposables, sans d'ailleurs prétendre avoir épuisé la question.

Je parlerai ici d'un  $\mathcal{M}_2$  qui rentre comme cas particulier dans

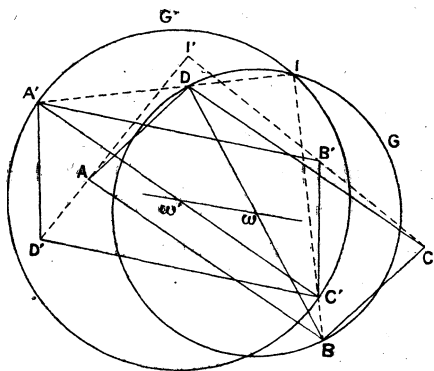
---

(1) *Société mathématique de France, comptes rendus des séances, 1913.*

un de ceux-là. Il m'a semblé qu'il méritait d'être signalé, à cause de sa simplicité et de sa théorie tout à fait élémentaire.

2. Tout repose sur le théorème suivant :

Soient (voir fig.) ABCD et A'B'C'D' deux parallélogrammes



tracés dans un même plan et inversement égaux. Si A'D est perpendiculaire à BC', alors AD' est perpendiculaire à B'C.

Soit en effet I le point de rencontre de A'D et de BC'. Il appartient au cercle G de diamètre BD et au cercle G' de diamètre A'C'. Les centres ω et ω' de ces deux cercles sont aussi les centres des deux parallélogrammes.

Faisons tourner ceux-ci autour de leurs centres respectifs d'un même angle θ (considéré avec son signe). On reconnaît immédiatement que A'D et BC' ne cessent pas de se couper à angle droit au point I.

On peut choisir l'angle θ de telle manière que les deux parallélogrammes, dans leurs nouvelles positions, soient symétriques par rapport à la médiatrice de ωω'. Il suffit pour cela que les nouvelles positions des points A et A' présentent cette symétrie, ce qui se traduit par la condition

$$\widehat{\omega'\omega, \omega A} + \theta + \widehat{\omega'\omega, \omega' A'} + \theta = \pi,$$

d'où

$$\theta = \frac{\pi - \widehat{\omega'\omega, \omega A} - \widehat{\omega'\omega, \omega' A'}}{2}.$$

Les deux parallélogrammes étant amenés dans les positions dont il s'agit, la symétrie rend évident le théorème à démontrer.

Ramenons alors, par des rotations de  $-\theta$ , les deux parallélogrammes dans leurs positions initiales.  $AD'$  et  $B'C$  ne cessent pas de se couper à angle droit, ce qui établit la proposition.

3. On met ainsi en évidence l'existence d'un  $\mathcal{M}_2$  doublement décomposable. Appelons en effet  $P$  un plan lié au parallélogramme  $ABCD$ ,  $P'$  un plan lié au parallélogramme  $A'B'C'D'$ ,  $P_1$  un plan lié à l'angle droit  $BID$ ,  $P'_1$  un plan lié à l'angle droit  $B'I'D'$ ,  $I'$  étant le point de rencontre de  $AD'$  et de  $B'C$ . Si, les deux parallélogrammes restant de grandeurs constantes, on leur donne toutes les positions relatives telles que  $A'D$  et  $BC'$  restent rectangulaires, le mouvement  $\left(\frac{P'}{P}\right)$  est un  $\mathcal{M}_2$  qui résulte des deux  $\mathcal{M}_1$  suivants : 1°  $\left(\frac{P_1}{P}\right)$ , mouvement d'un plan dont deux droites passent chacune par un point fixe ; 2°  $\left(\frac{P'_1}{P_1}\right)$ , mouvement d'un plan dont deux points décrivent chacun une droite fixe.

Or le même  $\mathcal{M}_2$  peut s'obtenir, d'après le théorème du n° 2, si l'on remplace le plan intermédiaire  $P_1$  par le plan  $P'_1$ . Comme les plans  $P_1$  et  $P'_1$  ne sont évidemment pas liés l'un à l'autre, on a bien obtenu un  $\mathcal{M}_2$  doublement décomposable.

On peut encore interpréter le résultat, en remarquant que  $\left(\frac{P'_1}{P_1}\right)$  est un  $\mathcal{M}_2$ , résultant soit de  $\left(\frac{P}{P_1}\right)$  et de  $\left(\frac{P'_1}{P}\right)$ , soit de  $\left(\frac{P'}{P_1}\right)$  et de  $\left(\frac{P'_1}{P'}\right)$ .

4. Cherchons si le théorème du n° 2 s'étend à l'espace. La question se traite rapidement par le calcul vectoriel (1).

Soient dans l'espace  $ABCD$  et  $A'B'C'D'$  deux parallélogrammes ayant des diagonales de mêmes longueurs. Posons,  $\omega$  et  $\omega'$  étant leurs centres,

$$\text{longueur } \omega A = \text{longueur } \omega' A' = a,$$

$$\text{longueur } \omega B = \text{longueur } \omega' B' = b.$$

Soient d'autre part  $u, v, u', v'$  des vecteurs unitaires parallèles

(1) Notations de BURALI-FORTI et MARCOLONGO.

respectivement à  $\omega A$ ,  $\omega B$ ,  $\omega' A'$ ,  $\omega' B'$ . On peut écrire

$$\begin{aligned} A &= \omega + a\mathbf{u}, & B &= \omega + b\mathbf{v}, \\ C &= \omega - a\mathbf{u}, & D &= \omega - b\mathbf{v}, \\ A' &= \omega' + a\mathbf{u}', & B' &= \omega' + b\mathbf{v}', \\ C' &= \omega' - a\mathbf{u}', & D' &= \omega' - b\mathbf{v}'. \end{aligned}$$

La condition que  $A'D$  et  $BC'$  soient rectangulaires s'exprime par

$$(A' - D) \times (C' - B) = 0,$$

ou

$$(\omega' - \omega + a\mathbf{u}' + b\mathbf{v}') \times (\omega' - \omega - a\mathbf{u}' - b\mathbf{v}') = 0,$$

ou

$$(\omega' - \omega)^2 - (a\mathbf{u}' + b\mathbf{v}')^2 = 0,$$

ou enfin

$$(1) \quad (\omega' - \omega)^2 - a^2 - b^2 - 2ab.\mathbf{u}' \times \mathbf{v}' = 0.$$

De même, la condition que  $AD'$  et  $B'C$  soient rectangulaires s'exprime par

$$(2) \quad (\omega' - \omega)^2 - a^2 - b^2 - 2ab.\mathbf{u} \times \mathbf{v}' = 0.$$

Pour que (2) résulte de (1), il faut et il suffit qu'on ait

$$\mathbf{u}' \times \mathbf{v}' = \mathbf{u} \times \mathbf{v},$$

c'est-à-dire

$$(3) \quad \widehat{\omega B, \omega' A'} = \widehat{\omega A, \omega' B'}.$$

Le résultat peut s'énoncer ainsi :

*Soient dans l'espace deux parallélogrammes  $ABCD$ ,  $A'B'C'D'$ , tels que l'on ait*

$$AC = A'C' \quad BD = B'D'.$$

*Des trois conditions :*

*$A'D$  est perpendiculaire à  $BC'$ ,*

*$AD'$  est perpendiculaire à  $B'C$ ,*

$$\widehat{BD, A'C'} = \widehat{AC, B'D'},$$

*l'une entraîne les deux autres.*

Cela comprend le théorème du n° 2.



L'énoncé est particulièrement simple quand les deux parallélogrammes sont aplatis, parce que la condition (3) est alors satisfaite d'elle-même, et l'on a ceci :

*Soient dans l'espace deux ponctuelles égales ABCD, A'B'C'D', telles que les milieux de AC et de BD coïncident, et de même les milieux de A'C' et de B'D'. Si A'D est perpendiculaire à BC', AD' est perpendiculaire à B'C.*

---

---

### SUR UNE FORME VECTORIELLE DE LA PUISSANCE D'UN POINT;

PAR H. MITAULT.

---

1. Soient A, B, C trois points. On a

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (\vec{AO} + \vec{OB}) (\vec{AO} - \vec{OB}) = \overline{AO}^2 - \overline{OB}^2,$$

si O est le milieu de BC.

Il en résulte que si O est le centre d'un cercle dont B et C sont deux points diamétralement opposés et si A est un point quelconque de l'espace, on a

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = d^2 - R^2$$

quels que soient les points B et C.

*Remarque.* — Ceci définit la puissance d'un point quelconque de l'espace. C'est, d'ailleurs, la puissance de ce point par rapport à la sphère ayant pour équateur le cercle considéré.

Nous nous proposons de montrer comment l'emploi des notations vectorielles permet d'utiliser ce résultat pour retrouver simplement des propriétés des cercles, propriétés d'ailleurs classiques et bien élémentaires.

2. Soient deux cercles  $O_1$  et  $O_2$  et soit A un de leurs points communs, réel ou non mais non cyclique.

Soient  $A_1$  et  $A_2$  les points diamétralement opposés à A.

Si un point  $M$  a même puissance par rapport aux deux cercles

$$\vec{MA} \cdot \vec{MA}_1 = \vec{MA} \cdot \vec{MA}_2,$$

d'où

$$\vec{MA} (\vec{MA}_1 - \vec{MA}_2) = \vec{MA} \cdot \vec{A_2A_1} = 0.$$

Le lieu de  $M$  est le plan perpendiculaire à  $A_2A_1$ , mené par  $A$ .

3. Les notations étant les mêmes que précédemment, soient  $P_1$  et  $P_2$  les puissances de  $M$  par rapport aux cercles  $O_1$  et  $O_2$ .

Considérons la quantité

$$\mu = \frac{P_1 + \lambda P_2}{1 + \lambda} = \frac{\vec{MA} (\vec{MA}_1 + \lambda \vec{MA}_2)}{1 + \lambda} = \vec{MA} \cdot \vec{M\alpha},$$

si  $\alpha$  est le point qui partage  $A_1A_2$  dans le rapport

$$-\lambda.$$

Il en résulte que  $\mu$  est la puissance du point  $M$  par rapport au cercle de diamètre  $A\alpha$ .

*Conséquences.* — Le lieu des points pour lesquels  $P_1 + \lambda P_2$  est constant est une sphère ayant son centre au point  $\omega$ , partageant  $O_1O_2$  dans le rapport  $-\lambda$ .

Le lieu des points pour lesquels

$$P_1 = k P_2$$

est la sphère passant par  $A$  et dont le centre partage  $O_1O_2$  dans le rapport  $k$ .

La demi-somme des puissances d'un point par rapport à deux cercles orthogonaux  $O_1, O_2$  est égale à la puissance de ce point par rapport au cercle de diamètre  $O_1O_2$ .

### QUESTIONS PROPOSÉES.

2497.

Soit  $ABCD$  un quadrilatère inscritible, démontrer que le centre  $\omega$  du cercle circonscrit, le point de concours  $O$  des diagonales et le foyer  $F$  de la parabole inscrite sont sur une droite  $\Delta$ . Cette droite est symétrique par

rapport aux bissectrices des angles des diagonales du quadrilatère, de la droite joignant O au centre de l'hyperbole équilatère circonscrite.

G. ROY.

2498.

Soient ABC un triangle et I le centre du cercle inscrit; l'axe radical du cercle inscrit et du cercle circonscrit coupe BC, CA, AB en  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

Les perpendiculaires  $\alpha K$ ,  $\beta K'$ ,  $\gamma K''$  abaissées de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sur AI, BI et CI sont telles que

$$\frac{\overline{IK}}{\overline{IA}} = \frac{\overline{IK'}}{\overline{IB}} = \frac{\overline{IK''}}{\overline{IC}} = -\frac{r}{4R}.$$

G. ROY.

### SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2392.

(1910, p. 40.)

On considère les paraboles tangentes à une hypocycloïde à trois rebroussements  $H_3$  et à la tangente et la normale en un sommet S de cette courbe. Démontrer que les polaires de S par rapport à ces paraboles enveloppent le cercle décrit sur SA comme diamètre, A étant le point de rebroussement de  $H_3$  correspondant à S.

F. BALITRAND.

#### SOLUTION

Par M. R. BOUVAIST.

Soient  $Sx$  et  $Sy$  la tangente et la normale en S à  $H_3$ . M un point quelconque du cercle de diamètre SA,  $\alpha$  et  $\beta$  les projections de M sur  $Sx$  et  $Sy$ ,  $\gamma$  le milieu de  $\alpha$  et  $\beta$ , MT la tangente au cercle SA en M. On sait que  $\alpha\beta$  touche  $H_3$  au point K intersection de  $\alpha\beta$  avec MK symétrique de MT par rapport à Mz.

Envisageons maintenant la parabole qui touche  $Sx$ ,  $Sy$  et  $\alpha\beta$  au point K. Son foyer est quelque part sur le cercle  $S\alpha\beta$ . Le symétrique  $\varphi$  de ce foyer par rapport à  $\alpha\beta$  définit la directrice  $S\varphi$  et la direction de l'axe  $K\varphi$ , comme l'angle en  $\varphi$  est droit  $K\varphi$  va passer par M. MF est symétrique par rapport à Mz, c'est donc la tangente MT; cette dernière droite est donc la polaire de S par rapport à la parabole.

Autres solutions de l'auteur et de MM. LHERMITTE, G. ROY, SAGAZAN.

2397.

(1922, p. 39.)

Soient  $P$  et  $Q$  les intersections d'une conique  $(S)$  avec les tangentes à une conique  $(\Sigma)$  issues d'un point  $M$  de la première. On sait que  $PQ$  enveloppe une conique appartenant au faisceau  $(S, \Sigma)$ . Démontrer que le point de contact de  $PQ$  avec son enveloppe est, par rapport à  $PQ$ , le conjugué harmonique de l'intersection de cette droite avec la polaire de  $(M)$  par rapport à  $(\Sigma)$ .

G. BOULLAUD.

SOLUTION

Par M. H. MC WEENEY.

Prenons  $M'$  près de  $M$  sur  $(S)$ , et soient  $P', Q'$  les points de rencontre de  $(S)$  avec les tangentes à  $(\Sigma)$  issues de  $M'$ . Désignons par  $X, Y, Z$  les points  $(PM, P'M')$ ,  $(QM, Q'M')$ ,  $(PQ, P'Q)$ . Le théorème de Pascal relatif à l'hexagone  $PMQ P'M'Q'$  montre que  $X, Y, Z$  sont sur une même droite.

Faisons tendre  $M'$  vers  $M$ . A la limite,  $XY$  devient la polaire de  $M$  par rapport à  $(\Sigma)$ , et  $Z$  devient l'intersection de cette droite avec  $PQ$ ; enfin, le point  $(PQ, P'Q)$  devient en même temps le point de contact de  $PQ$  avec son enveloppe et le conjugué harmonique de  $Z$  par rapport à  $PQ$ .

Autres solutions de l'auteur et de MM. FAUCHEUX, ÉGAN, PARROD, ROY, SERBAN A. GHEORGHIN.

2424.

(1919, p. 399.)

Dans un plan deux courbes de grandeurs invariables roulent respectivement sur deux courbes fixes, et cela de manière à se couper sous un angle constant.

Démontrer que la normale à la courbe décrite par leur point d'intersection concourt avec les droites joignant leurs centres de courbure en ce point respectivement à leurs points de contact avec les courbes fixes.

R. B.

SOLUTION

Par JOSEPH DENAUX.

Nous désignons par  $G$  et  $G'$  les deux courbes roulantes, par  $P$  et  $P'$  deux plans qui leur sont respectivement liés et qui glissent sur le plan de référence  $P_0$ . Soient enfin  $I$  et  $I'$  les centres instantanés de rotation dans les mouvements  $\left(\frac{P}{P_0}\right)$  et  $\left(\frac{P'}{P_0}\right)$  (ce sont les points de contact avec les

courbes fixes). Puisque les courbes C et C' se coupent en un point M sous un angle constant on peut considérer les tangentes et normales à ces courbes en M comme étant quatre droites fixes d'un quatrième plan Q qui glisse par rapport à P, P' et P<sub>0</sub> et dont un point bien déterminé se trouve constamment en M, point d'intersection de C et C'.

Dans le mouvement  $\left(\frac{Q}{P}\right)$  le centre instantané est en  $\omega$ , centre de courbure de C au point M, dans le mouvement  $\frac{P}{P_0}$  il est en I, donc dans le mouvement  $\left(\frac{Q}{P_0}\right)$  il sera sur la droite I $\omega$ ; il est de même sur la droite I' $\omega'$ , donc à leur intersection et la normale à la trajectoire de M dans P<sub>0</sub> sera par suite concourante avec I $\omega$  et I' $\omega'$ .

Autre solution de M. A. VANLOT.

2454.

(1923, p. 189.)

*Si l'on choisit un point arbitrairement sur chaque arête d'un tétraèdre, les quatre sphères O<sub>a</sub>, O<sub>b</sub>, O<sub>c</sub>, O<sub>d</sub>, passant respectivement par chaque sommet A, B, C, D, et par les points situés sur les arêtes adjacentes, ont un point commun K (S. Roberts 1880).*

*Montrer que ce point K est l'inverse (conjugué isogonal), par rapport au tétraèdre O<sub>a</sub>O<sub>b</sub>O<sub>c</sub>O<sub>d</sub>, du centre de la sphère circonscrite au tétraèdre dont les sommets sont les points communs à trois des sphères sur les faces du tétraèdre ABCD.*

V. THEBAULT.

SOLUTION

Par E. BALLY.

Par définition, deux points isogonaux relativement à un tétraèdre sont tels que les deux plans qui les unissent à chaque arête soient symétriques relativement aux plans bissecteurs des faces unies à cette arête.

Cette définition se ramène immédiatement à la suivante <sup>(1)</sup>: Chacun de deux points isogonaux est le centre de la sphère qui contient les symétriques de l'autre relatifs aux faces du tétraèdre.

Or, dans le problème actuel, les seconds points de concours X<sub>a</sub>, X<sub>b</sub>, X<sub>c</sub>, X<sub>d</sub> des quatre sphères trois à trois sont évidemment les symétriques du point K, commun aux quatre sphères, relativement aux plans que forment trois à trois leurs quatre centres (O).

<sup>(1)</sup> Car si X<sub>1</sub> et X<sub>2</sub> sont les symétriques d'un même point X relatifs à deux plans p<sub>1</sub> et p<sub>2</sub>, le plan de symétrie du couple de points (X<sub>1</sub>, X<sub>2</sub>) et le plan qui unit X à l'intersection des plans (p<sub>1</sub>, p<sub>2</sub>) sont symétriques relativement aux plans bissecteurs de ces plans p<sub>1</sub> et p<sub>2</sub>.

Le point  $K$  et le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre des points  $(X)$  sont donc isogonaux relativement au tétraèdre des centres  $(O)$ .

Autre solution de MM. BOUVAIST, HARMEGNIES, ROY.

2446.

(1920, p. 79; 1923, p. 188).

*Si MN est une corde d'une conique tangente en P et Q à deux cercles bitangents à la courbe et ayant leurs centres sur le même axe, les deux segments MN et PQ ont même milieu.* G. FONTENÉ.

SOLUTION

Par G. ROY.

Si l'on fait tourner la conique et les deux cercles autour de l'axe des centres on obtient une quadrique de révolution et deux sphères inscrites. Un plan tangent aux deux sphères coupe la quadrique suivant une conique ayant pour foyers les deux points de contact de ce plan avec les sphères et pour directrices l'intersection de ce plan et des deux plans des contacts. Si le plan tangent est choisi perpendiculairement au plan méridien initial, la conique d'intersection a pour foyers P et Q, et MN est l'axe de cette conique, ce qui démontre la propriété énoncée. On peut même ajouter que si  $M'$  et  $N'$  sont les intersections de MN avec les cordes de contact, MN et  $M'N'$  ont mêmes milieux. G. ROY.

Autres solutions de MM. BOUVAIST, FAUCHEUX, HARMEGNIES, PIEDVACHE.

---

---

## SOLUTIONS DE QUESTIONS DE LICENCE.

### Question C. 31.

[Calcul différentiel et intégral; épreuve théorique; énoncé publié en janvier 1926, p. 117.]

SOLUTION

Par BERNARD PARIS.

A tout point  $M(x, y, z)$  de l'espace on fait correspondre le plan P

$$x(X - x) + y(Y - y) + e^{\lambda(x,y)}(Z - z) = 0$$

et l'on désigne par  $\Gamma$  une courbe gauche telle que le plan osculateur en un quelconque de ses points  $M$ , soit le plan  $P$  correspondant à ce point.

1°  $\lambda(x, y)$  étant donnée on demandait de prouver qu'il existe en général deux familles de courbes  $\Gamma$ , de telle sorte qu'il passe une courbe de chaque famille et une seule par un point  $M$  quelconque de l'espace.

En effet, les accents désignant des dérivées par rapport au paramètre dont dépend le point courant de  $\Gamma$ , on doit avoir

$$\begin{aligned} xx' + yy' + e^\lambda z' &= 0, \\ xx'' + yy'' + e^\lambda z'' &= 0; \end{aligned}$$

la seconde de ces équations peut être remplacée par

$$x'^2 + y'^2 + e^\lambda z'(\lambda'_x x' + \lambda'_y y') = 0.$$

comme on le voit immédiatement en dérivant la première. On en déduit, en éliminant  $z'$ ,

$$(x'^2 + y'^2) - (xx' + yy')(\lambda'_x x' + \lambda'_y y') = 0$$

ou

$$(1) \quad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \left(x + y \frac{dy}{dx}\right) \left(\lambda'_x + \lambda'_y \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

C'est l'équation différentielle des courbes  $\gamma$ , projections des  $\Gamma$  sur le plan  $xOy$ ; l'existence (en général) des deux familles de courbes  $\Gamma$ , résulte immédiatement du fait que cette équation est du second degré en  $\frac{dy}{dx}$ .

2° Existe-t-il des surfaces dont toutes les lignes asymptotiques sont des courbes  $\Gamma$ ?

Le plan  $P$  doit être tangent, donc

$$p = -e^{-\lambda} x, \quad q = -e^{-\lambda} y$$

et la condition  $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$  conduit à

$$x \frac{\partial \lambda}{\partial y} - y \frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lambda = \Phi(x^2 + y^2),$$

où  $\Phi$  désigne une fonction arbitraire. Il en résulte immédiatement que les surfaces cherchées sont les surfaces de révolution autour de  $Oz$ .

3° On demande de déterminer  $\lambda$  pour que les deux familles de courbes  $\Gamma$  soient confondues.

L'équation différentielle précédente (1) conduit immédiatement à

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} y + \frac{\partial \lambda}{\partial y} x\right)^2 - 4 \left(1 - y \frac{\partial \lambda}{\partial y}\right) \left(1 - x \frac{\partial \lambda}{\partial x}\right) = 0$$

ou, en désignant par  $p$  et  $q$  les dérivées partielles de  $\lambda$ , à

$$(2) \quad (py - qx)^2 - 4(1 - px - qy) = 0.$$

Le système différentiel associé conduit à l'intégrale première

$$\begin{aligned} py - qx &= 2a, \\ px + qy &= (1 - a^2) \end{aligned}$$

et enfin, après avoir résolu en  $p$  et  $q$ ,

$$\begin{aligned} d\lambda &= p dx + q dy = 2a \frac{(y dx - x dy)}{x^2 + y^2} + (1 - a^2) \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}, \\ \lambda &= -2a \operatorname{arctang} \frac{y}{x} + (1 - a^2) \operatorname{Log} \sqrt{x^2 + y^2} + b; \end{aligned}$$

c'est une intégrale complète de l'équation (2).

4° Pour que les courbes  $\Gamma$  se projettent sur le plan  $xOy$  suivant deux familles de courbes orthogonales, il faut que le produit des racines en  $\frac{dy}{dx}$  de l'équation (1) soit égal à  $-1$ , d'où la condition

$$x \frac{\partial \lambda}{\partial x} + y \frac{\partial \lambda}{\partial y} = 2,$$

équation linéaire qui admet les deux intégrales premières

$$\frac{y}{x} = a, \quad \lambda = \operatorname{Log}(x^2 + y^2) + b,$$

et l'intégrale générale

$$\lambda = \operatorname{Log}(x^2 + y^2) + \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Inversement soit donné un réseau de courbes orthogonales dans le plan, il sera défini par une équation différentielle de forme

$$y'^2 - 2u(x, y)y' - 1 = 0$$

et cette équation sera identique à (1) si l'on a

$$x \frac{\partial \lambda}{\partial x} + y \frac{\partial \lambda}{\partial y} = 2$$

et

$$y \frac{\partial \lambda}{\partial x} + x \frac{\partial \lambda}{\partial y} = u(x\lambda_x - y\lambda_y).$$

La formule précédemment trouvée pour  $\lambda$  montre que  $u$  ne doit dépendre que de  $\frac{y}{x}$  et la réciproque est immédiate; l'équation différentielle sera donc



homogène en  $\frac{y}{x}$  et ces courbes seront homothétiques par rapport à l'origine.

*Exemple.* — Il en est ainsi des courbes  $y^2 = 2Cx$  qui vérifient l'équation différentielle

$$y' = \frac{y}{2x},$$

leurs trajectoires orthogonales vérifient

$$y' = -\frac{2x}{y},$$

d'où

$$u = \frac{y^2 - 4x^2}{4xy};$$

on obtient  $\varphi$ , et par suite  $\lambda$ , par une quadrature.

Autre solution de M. A. MONJALLON.

#### Question C. 46.

[*Mathématiques générales; épreuve théorique; énoncé publié en février 1926, p. 146.*]

#### SOLUTION

Par A. MONJALLON.

On considère dans le plan  $xOy$  une courbe passant par l'origine et telle que le cosinus de l'angle que fait  $Ox$  avec la normale soit

$$\frac{1-x}{1+x}$$

et l'on demande d'abord d'évaluer en fonction de  $x$  l'arc  $OM$  de cette courbe. On aura

$$\pm \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1-x}{1+x}, \quad y' = \frac{1-x}{2\sqrt{x}},$$

d'où

$$ds^2 = (1+y'^2) dx^2 = \frac{(1+x)^2}{4x} dx^2,$$

et, pour l'arc  $OM$ ,

$$S = \int_0^x \frac{1+x}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} \left( 1 + \frac{1}{3}x \right).$$

D'autre part

$$y'' = -\frac{1}{4} \frac{x+1}{x^{\frac{3}{2}}},$$

d'où le rayon de courbure

$$\frac{(1+x)^2}{2}.$$

Enfin

$$y = \int_0^x \frac{1-x}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} \left( 1 - \frac{1}{3}x \right)$$

ou

$$y^2 = \frac{x}{9}(3-x)^2;$$

la courbe est une cubique ayant le point double  $x = 3$  et passant par l'origine.

Autres solutions de MM. BERNARD PARIS et J. DEVISME.

### Question C. 48.

[*Mathématiques générales; épreuve pratique (Mécanique); énoncé publié en février 1926, p. 151.*]

#### SOLUTION

Par BERNARD PARIS.

1° L'axe  $Oy$  étant vertical et dirigé vers le bas on considère un point  $m$  de masse  $m$ , de poids  $mg$ , mobile sans frottement sur la courbe

$$x = au^3, \quad y = au^2.$$

Il part du point le plus haut de la courbe ( $u = 0$ ) avec la vitesse initiale  $v_0$  telle que

$$v_0^2 = 2\lambda ga.$$

Le théorème de la force vive donne immédiatement

$$v^2 = 2ag(u^2 + \lambda),$$

c'est-à-dire, en remplaçant  $v$  par sa valeur,

$$a(4 + 9u^2)u^2 \left( \frac{du}{dt} \right)^2 = 2g(u^2 + \lambda).$$

2° Dans le cas où  $\lambda = 0$  l'intégration donne

$$\sqrt{\frac{2g}{a}} t = \frac{u}{2} \sqrt{9u^2 + 4} + \frac{2}{3} \text{Log} \frac{3u + \sqrt{9u^2 + 4}}{2}.$$

3° Dans le cas où  $\lambda$  est quelconque (différent de  $\frac{4}{9}$ ) on obtient (en

posant  $\frac{9u^2+4}{u^2+\lambda} = z^2$ )

$$\sqrt{\frac{2g}{a}} t = (9\lambda - 4) \int_{\frac{2}{\sqrt{\lambda}}}^z \frac{z^2 dz}{(9-z^2)^2}.$$

Or

$$\frac{z}{9-z^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3-z} - \frac{1}{3+z} \right),$$

l'intégrale indéfinie est donc

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left\{ \int \frac{dz}{(3-z)^2} + \int \frac{dz}{(3+z)^2} + 2 \int \frac{dz}{z^2-9} \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{2z}{9-z^2} + \frac{1}{3} L \frac{z-3}{z+3} \right] \end{aligned}$$

et l'on revient à la variable  $u$  sans difficultés.

4° Dans le cas particulier où  $\lambda = \frac{4}{9}$  l'équation différentielle se simplifie, on a

$$u^2 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2g}{a}} t,$$

c'est-à-dire les coordonnées du mobile

$$y = \frac{2}{3} \sqrt{2ga} t, \quad x = a \left( \frac{y}{a} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

La force qui, appliquée au mobile supposé libre et non pesant, produirait ce mouvement aurait les composantes

$$X = \frac{2}{3} mg \sqrt{\frac{a}{y}}, \quad Y = 0.$$

### Question C. 83.

[Calcul différentiel et intégral; épreuve théorique; énoncé publié en janvier 1927, p. 28.]

#### SOLUTION

Par J. LAUREAU.

1° L'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = e^z \sin(x+y)$$

s'intègre au moyen du système

$$dx = dy = \frac{dz}{e^z \sin(x+y)},$$

d'où les intégrales premières

$$x - y = c, \quad \frac{1}{2} \cos(x+y) - e^{-z} = c_1$$

et la solution générale

$$e^{-z} = \frac{1}{2} \cos(x+y) - f(x-y).$$

2° La surface intégrale qui passe par la courbe

$$x + y = 0, \quad e^z \cos^2 x = 1$$

est

$$z = -\text{Log} \cos x - \text{Log} \cos y.$$

3° On a, pour cette surface,

$$p = \text{tang} x, \quad q = \text{tang} y, \quad r = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad s = 0, \quad t = \frac{1}{\cos^2 y},$$

et l'équation différentielle des lignes de courbure

$$\left(\frac{dy}{\cos y}\right)^2 = \left(\frac{dx}{\cos x}\right)^2,$$

d'où les deux systèmes de lignes de courbure

$$\text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2}\right) \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \text{const.},$$

$$\frac{\text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{y}{2}\right)}{\text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} = \text{const.}$$

4° L'équation différentielle des lignes asymptotiques

$$\left(\frac{dx}{\cos x}\right)^2 + \left(\frac{dy}{\cos y}\right)^2 = 0$$

montre qu'elles sont imaginaires.

Autre solution de M.M. BERNARD PARIS, R. ODILE, J. DEVISME.

**CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.**

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Un point matériel pesant de masse  $m$  est mobile sans frottement sur une circonférence de rayon  $l$  tournant à la vitesse angulaire constante  $\omega$  autour d'un diamètre vertical.*

1. *Le mobile étant lancé du point le plus bas à la vitesse initiale  $V_0$ , déterminer son mouvement et calculer les composantes de la réaction suivant le rayon et la normale au plan du cercle en fonction de la seule position du mobile;*

2. *Discuter le problème suivant la valeur de  $V_0$ ; en particulier, déterminer les valeurs de  $V_0$  pour lesquelles la liaison dans le plan du cercle peut être réalisée par un simple fil;*

3. *Étudier la stabilité autour de chaque position d'équilibre relatif suivant la valeur de  $\omega$ ; former l'équation différentielle des petits mouvements autour de chaque position d'équilibre stable et en déduire la période  $T$  des oscillations;*

4. *Retrouver la loi du mouvement par la méthode de Jacobi appliquée au mouvement absolu;*

5. *Calculer les deux composantes de la réaction au point le plus bas pour*

$$m = 1 \text{ kg}, \quad l = 1 \text{ m}, \quad V_0 = 3 \text{ m/sec}, \\ \omega = 10 \text{ rad/sec}, \quad g = 9,81 \text{ m/sec}^2.$$

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — 1. Les axes  $xOy$  étant pris dans le plan du cercle et  $Oy$  étant le rayon vertical descendant, l'intégrale des forces vives donne

$$V^2 = \omega^2 x^2 + 2gy + V_0^2 - 2gl,$$

d'où

$$t = l \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\omega^2 l^2 \sin^2 \theta + 2gl \cos \theta + V_0^2 - 2gl}},$$

$\theta$  étant l'angle de position du mobile compté à partir de  $Oy$ ; les composants  $N$  et  $Z$  de la réaction suivant le rayon et la normale  $Oz$  au plan du cercle sont

$$\frac{N}{m} = 2 \frac{\omega^2}{l} x^2 + 3 \frac{g}{l} y + \frac{V_0^2}{l} - 2g, \quad Z = -2m\omega V \cos \theta.$$

2.  $V^2$  est positif au-dessous de la parabole

$$y = l - \frac{V_0^2}{2g} - \frac{\omega^2}{2g} x^2,$$

N est positif au-dessous de la parabole

$$y = \frac{2}{3} \left( l - \frac{V_0^2}{2g} \right) - \frac{2\omega^2}{3g} x^2.$$

On est donc ramené à une discussion analogue à celle du pendule simple, sauf que les plans horizontaux sont ici remplacés par des paraboles. En particulier, la liaison dans le plan du cercle peut être réalisée par un fil pour

$$V_0^2 \leq 2gl + \frac{g}{2} \left[ -\frac{g}{\omega^2} + \sqrt{\left(\frac{g}{\omega^2}\right)^2 + l^2} \right] \quad \text{ou} \quad V_0^2 \geq 5gl.$$

3. Pour  $\omega^2 < \frac{g}{l}$ , la seule position d'équilibre stable est  $\theta = 0$ ; l'équation correspondante des petits mouvements est

$$\theta'' + \left( \frac{g}{l} - \omega^2 \right) \theta = 0, \quad \text{d'où} \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l} - \omega^2}}.$$

Pour  $\omega^2 > \frac{g}{l}$ , la seule position d'équilibre stable est  $\cos\theta = \frac{g}{l\omega^2}$ ; l'équation correspondante des petits mouvements est

$$\varepsilon'' + \left[ \omega^2 - \left( \frac{g}{l\omega} \right)^2 \right] \varepsilon = 0, \quad \text{d'où} \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \left( \frac{g}{l\omega} \right)^2}}.$$

4. Dans le mouvement absolu

$$2T = ml^2(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2\theta), \quad U = mgl \cos\theta$$

et l'équation de Jacobi est

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{l^2} \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)^2 - \omega^2 l^2 \sin^2\theta \right] - gl \cos\theta = 0.$$

En posant  $V = \alpha t + \theta(\theta, \alpha)$ , on a  $\theta$  par une quadrature et, d'après les conditions initiales, on reconnaît que l'équation du mouvement

$$t + \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = \beta$$

coïncide avec le résultat du n° 1.

5. Au point le plus bas,

$$N = mg \left( 1 + \frac{V_0^2}{gl} \right), \quad Z = -2m\omega \dot{V}_0;$$

d'où

$$N = 1 + \frac{9}{9,81} = 1,92 \text{ kg-f}, \quad Z = -2 \frac{1}{9,81} 10,3 = -6,12 \text{ kg-f}.$$

(Toulouse, novembre 1926.)

**ÉPREUVE THÉORIQUE.** —  $Ox, Oy, Oz$  étant trois axes rectangulaires fixes,  $Oz$  vertical ascendant, un tube rectiligne homogène  $OA$  de section négligeable, de longueur  $a$ , de masse  $m$ , peut tourner librement sans frottement autour de l'axe  $Oz$ , avec lequel il fait un angle de  $45^\circ$ .

Un corps solide  $S$  pesant est formé d'une petite sphère de masse négligeable et d'une aiguille homogène  $BC$  de longueur  $2l$ , de masse  $m$ . Cette aiguille peut se mouvoir sans frottement dans le tube  $OA$ . La sphère est seulement destinée à empêcher  $S$  de pénétrer entièrement dans le tube  $OA$ .

1° Calculer la force vive du système en fonction des paramètres  $r$  et  $\psi$  qui définissent sa position et de leurs dérivées ( $\psi$  désignera l'angle du plan  $zOA$  avec le plan  $zOx$ ;  $r$  désignera la distance du point  $O$  au centre de gravité de l'aiguille).

2° Écrire les équations du mouvement, et discuter, en supposant  $\frac{dr}{dt}$  nul à l'instant initial, et  $\frac{d\psi}{dt} = \omega$ , constante donnée.

3° Il peut arriver que l'aiguille quitte le tube. Étudier le mouvement ultérieur.

4° Il peut arriver que la sphère vienne heurter l'extrémité  $A$  du tube; étudier ultérieur des vitesses, en supposant que la force vive se conserve.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — Les équations du mouvement sont :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi' = \omega \frac{r_0^2 + k^2}{r^2 + k^2} \\ r'^2 = -gr\sqrt{2} + h - \frac{1}{2} \frac{\omega^2 (r_0^2 + k^2)}{r^2 + k^2} \end{array} \right. \quad \left( k^2 = \frac{l^2 + a^2}{3} \right).$$

Les zéros de  $r'^2$  s'obtiennent en coupant la courbe

$$(\gamma) \quad y = \frac{1}{2} \frac{\omega^2 (r_0^2 + k^2)}{r^2 + k^2}$$

par la droite

$$(\delta) \quad y = -gr\sqrt{2} + h,$$

et remarquant que l'un de ces zéros est  $r_0$ .

Si  $\omega$  est suffisamment petit pour que l'on ait

$$(2) \quad \frac{3\sqrt{3}}{16k^3} \omega^2 (r_0^2 + k^2) < g\sqrt{2},$$

la droite  $(\delta)$  coupe  $(\gamma)$  en un seul point  $r = r_0$ ;  $r$  décroît constamment : le choc survient nécessairement. Si la condition (2) n'est pas remplie, la courbe  $(\gamma)$  admet deux tangentes parallèles à  $(\delta)$  dont les points de contact  $M_1 M_2$  ont pour abscisses  $r_1$  et  $r_2$  ( $r_1 < r_2$ ). La tangente en  $M_1$  coupe  $(\gamma)$  en un autre point  $M_3$  d'abscisse  $r_3$ .

Si  $r_0$  est inférieur à  $r_1$  ou supérieur à  $r_3$ , le mouvement a lieu comme ci-dessus; si  $r_0$  est entre  $r_1$  et  $r_3$  le mouvement est oscillatoire.

Le solide S quitte le tube si  $r$  atteint la valeur  $a + l$ ; son centre de gravité décrit ensuite la parabole définie par la vitesse qu'il possède à cet instant. L'épingle tourne autour de son centre de gravité dans un plan fixe perpendiculaire à la position du plan  $zOA$  au moment où l'épingle quitte le tube.

Si l'y a un choc, avec conservation de la force vive,  $\psi'$  se conserve,  $r'$  change de signe sans changer de valeur absolue.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Une boîte cubique pesante est formée de six carrés homogènes identiques de côté  $2a$ , de même masse  $m$ ; l'un d'eux  $ABA'B'$  formant couvercle est articulé sans frottement suivant le côté  $AA'$  à la boîte proprement dite.

La boîte repose par son fond sur une table horizontale fixe P parfaitement polie.

On abandonne la boîte sans vitesses dans la position où le couvercle fait avec la verticale un angle  $\theta_0$  infiniment petit.

1° Calculer, pour chaque inclinaison  $\theta$  du couvercle sur la verticale, la vitesse angulaire  $\frac{d\theta}{dt}$  du couvercle et la vitesse de translation de la boîte. [On négligera bien entendu  $\theta_0$ ; on supposera que la boîte ne peut se renverser (liaison bilatérale), et que le couvercle se rabat en arrière dans son mouvement.]

On indiquera en particulier les valeurs de ces vitesses pour  $\theta = 90^\circ$ , et  $\theta = 180^\circ$ .

2° Déterminer, en grandeur et position, pour chaque valeur de  $\theta$ , la réaction de la table P sur la boîte, en particulier pour  $\theta = 0^\circ$ ,  $\theta = 90^\circ$  et  $\theta = 180^\circ$ .

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — Si  $x$  désigne l'abscisse du centre de gravité de la boîte, comptée parallèlement au plan de la figure, on a les équations

$$6x = -a \sin \theta, \\ a\theta'^2 (7 \cos^2 \theta + 8 \sin^2 \theta) = 12g (1 - \cos \theta).$$

La réaction de la table P est verticale, soient Z sa valeur,  $h$  sa distance à l'arête  $AA'$ .

J'applique le théorème du centre de gravité en projetant sur la verticale, j'obtiens

$$Z = 6mg - m(a\theta'^2 \cos \theta + a\theta'' \sin \theta).$$

Pour avoir  $h$ , je remarque que les forces d'inertie, la force Z et le poids  $5mg$  de la boîte proprement dite ont un moment nul par rapport à  $AA'$  :

$$hZ - 5mga - 5max'' = 0.$$

(Lille, novembre 1926.)



---

---

**CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.**

---

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. C.97. — On considère la fonction  $F(z)$  définie par l'égalité  $F(z) = \int_{-1}^{+1} \frac{f(t) dt}{z-t}$ , où  $t$  et  $f(t)$  sont réelles,  $f(t)$  continue pour  $-1 \leq t \leq 1$ .

1° Montrer que  $F(z)$  est holomorphe dans le plan des  $z$  dont on a supprimé la portion d'axe réel comprise entre les points  $-1$ ,  $+1$  (on montrera que  $F(z)$  a une dérivée en chaque point.)

2° Donner sous forme d'intégrales les expressions des coefficients du développement de Laurent de  $F(z)$  pour  $|z| > 1$ .

3° En supposant  $f(t)$  comprise entre deux nombres positifs  $A$  et  $B$ , que peut-on dire du produit  $(n+1) \int_{-1}^{+1} t^n f(t) dt$ ?

Montrer que dans ces conditions le développement de Laurent de  $F(z)$  ne converge plus pour  $|z| < 1$  et que l'un des points  $-1$  ou  $+1$  est point singulier de  $F(z)$ .

II. C.98. — Les axes de coordonnées  $Oxyz$  étant rectangulaires, on considère une surface et l'on appelle  $N$  le point où la normale en  $M$  à la surface perce le plan des  $xy$ .

1° Former l'équation aux dérivées partielles des surfaces telles que  $OM = MN$ .

2° Déterminer les surfaces intégrales qui sont de révolution autour de  $Oz$ .

3° Déterminer une intégrale complète et les caractéristiques. (Il sera commode d'employer les coordonnées semi-polaires.)

ÉPREUVE PRATIQUE. — C.99. — On donne l'équation aux dérivées partielles

$$q^2x - py = 0.$$

1° Trouver une intégrale complète.

2° Trouver la surface intégrale passant par la courbe  $x = 0$ ,  $b^2z = y^3$ .

3° Montrer que la surface intégrale  $S$  passant par la parabole  $y = 0$ ,  $az - x^2 = 0$  a pour équation

$$9(az - x^2)^2 - 8ay^3 = 0.$$

4° Calculer l'aire de la portion de  $S$  qui est à l'intérieur du prisme

dont les arêtes sont parallèles à  $Oz$  et dont la base est le carré de côtés

$$y = 0, \quad y = a; \quad x = 0, \quad x = a$$

(les axes sont rectangulaires). (Strasbourg, novembre 1926.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — C. 100. — Soit  $Oxyz$  un trièdre rectangulaire. Former l'équation aux dérivées partielles des surfaces telles que le plan tangent en un quelconque de leurs points forme avec  $OM$  un angle constant donné  $V$ .

Montrer qu'il y a une caractéristique formée des points d'une courbe du plan  $xOz$  et des plans tangents à cette courbe parallèles à  $Oy$ .

Trouver toutes les caractéristiques.

Exprimer en fonction de deux paramètres les coordonnées des points de celle des surfaces cherchées qui passe par la droite

$$z = 0, \quad x = a,$$

où  $a$  est donné.

ÉPREUVE PRATIQUE. — C. 101. — On considère l'intégrale

$$\int \frac{\operatorname{th}^2 z \, dz}{(\pi^2 + z^2)^4} \quad (z = x + iy).$$

Soit  $ABCD$  un rectangle de côtés parallèles aux axes, le côté  $AB$  étant porté par l'axe réel. Montrer qu'on peut trouver une suite de tels rectangles, grandissant indéfiniment, de manière à contenir, à partir d'un certain rang, à leur intérieur, n'importe quelle région du demi-plan  $y > 0$  et tels que les intégrales prises le long des côtés autres que  $AB$  tendent vers zéro.

Calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{th}^2 x \, dx}{(\pi^2 + x^2)^4}.$$

(Clermont-Ferrand, novembre 1926.)

## CERTIFICAT DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. C. 102. — Que devient l'équation différentielle

$$xy'' + 2(1-x)y' + (x-2)y = -e^{x-1},$$

quand on y fait le changement de fonction  $y = \frac{u}{x}$ ,  $u$  étant la nouvelle fonction inconnue.

En déduire l'intégrale générale de l'équation donnée et déterminer celle des solutions qui satisfait aux conditions initiales suivantes :

$$y = 1, \quad y' = C \quad \text{pour} \quad x = 1.$$

Construire la courbe représentative de cette solution particulière. Combien cette courbe présente-t-elle de points d'inflexion. En déterminer les abscisses avec 2 décimales.

Donner des développements limités du troisième ordre de cette fonction au voisinage de  $x = 1$  et de  $x = -1$ . En déduire la valeur du rayon de courbure en ce dernier point.

L'aire comprise, dans le premier quadrant, entre l'axe  $Ox$ , l'axe  $Oy$  et la courbe et celle comprise, dans le deuxième quadrant, entre  $Ox$  et la courbe sont-elles des aires finies ?

On suppose la deuxième des aires ainsi définies recouverte d'une couche de matière dont la densité superficielle est égale à l'unité. Déterminer le moment d'inertie de la plaque ainsi constituée par rapport à  $Oy$ .

II. C. 403. — On considère la parabole d'équations paramétriques

$$x = 2pt^2, \quad y = 2pt \quad (\text{en axes rectangulaires}).$$

1° Soit  $M$  un point de coordonnées  $x_0, y_0$ . On mène les tangentes  $MP$  et  $MP'$  à la parabole. Former, en fonction de  $x_0, y_0$ , l'équation donnant les valeurs  $t_1$  et  $t_2$  des paramètres des points  $P$  et  $P'$ .

2° On pose

$$\left( \widehat{Ox, MP} \right) + \left( \widehat{Ox, MP'} \right) = \alpha.$$

Calculer  $\tan \alpha$  en fonction :

- a. Des coefficients angulaires de  $MP$  et  $MP'$ .
- b. Des coordonnées de  $M$ .

Déduire de la dernière formule le lieu de  $M$  lorsque  $\alpha$  est constant. Examiner le cas  $\alpha = 0$  et justifier le résultat obtenu.

3° Le lieu précédent est une droite  $(\Delta)$ . Séparer sur cette droite les parties correspondant à des tangentes  $MP$  et  $MP'$  réelles. (On suppose  $\alpha$  différent de zéro.)

La droite  $(\Delta)$  coupe la parabole en deux points  $A$  et  $B$ . Démontrer que les tangentes en ces points à la parabole sont rectangulaires.

Lorsque  $\alpha$  varie la droite  $(\Delta)$  passe par un point fixe que l'on caractérisera.

4° On achève le parallélogramme dont  $MP$  et  $MP'$  sont deux côtés. Lorsque  $\alpha$  est constant démontrer que le lieu du quatrième sommet  $N$  du parallélogramme est une parabole. Cette parabole passe par un point fixe lorsque  $\alpha$  varie.

MÉCANIQUE. — C.104. — Un point matériel pesant  $M$ , de masse  $m$ , mobile dans un plan vertical, est soumis, en plus de son poids, à l'action d'une force représentée par le vecteur  $mk^2\vec{MO}$ ,  $O$  étant un point fixe du plan et  $k$  un coefficient donné.

1° Montrer que la résultante de ces deux forces dérive d'une fonction de forces. Tracer les lignes de niveau et les lignes de forces.

2° Le point  $M$ , tout en étant soumis au même champ de forces, est assujéti à se déplacer sur une droite  $\Delta$ , située dans le plan vertical donné, passant par le point  $O$  et faisant avec la verticale un angle de  $60^\circ$ . Le coefficient de frottement au contact de la droite et du point a la valeur  $f = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ . Déterminer la partie de la droite où l'on peut placer le point  $M$  sans vitesse initiale pour qu'il y reste en équilibre.

3° Les conditions étant les mêmes qu'au paragraphe précédent, le point  $M$  est posé sur la droite  $\Delta$ , sans vitesse initiale, en une position  $M_0$  située plus haut que le point  $O$  et telle que  $OM_0 = \frac{3}{2}a$  (en appelant  $a$  la quantité  $\frac{g}{k^2}$ ). Étudier complètement le mouvement qui se produira et tracer le diagramme des espaces.

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° Construire la courbe d'équations paramétriques

$$x = \frac{1 + 2t^2 - t^4}{1 - t^4}, \quad y = \frac{3t}{1 - t^4}.$$

(On précisera la position de la courbe par rapport à ses asymptotes.)

2° En supposant l'unité de longueur du dessin égale à  $1^{\text{cm}}$ , évaluer à  $1^{\text{mm}^2}$  près l'aire limitée  $A$  comprise entre la partie de l'axe  $Oy$  située entre les points d'intersection de cet axe et de la courbe, et la portion correspondante de la courbe.

3° Calculer de même à  $1^{\text{mm}^3}$  près le volume engendré par la rotation de l'aire  $A$  autour de  $Ox$ .

(Strasbourg, juin 1926.)



**QUELQUES REMARQUES SUR LES DÉTERMINANTS ET LES MATRICES ;**

PAR ILIOVICI.

Dans la *Revue de Mathématiques spéciales* (numéros d'octobre et de novembre 1923), j'ai montré comment on pourrait établir la théorie des déterminants en partant de la définition suivante :

On appelle déterminant d'ordre  $n$ , un polynome fonction des  $n^2$  lettres du tableau

$$T = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^k & \dots & a_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^k & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^k & \dots & a_n^n \end{vmatrix},$$

qui satisfait aux trois conditions suivantes :

- 1° Il est fonction linéaire et homogène des éléments d'une même ligne ;
- 2° Il change de signe lorsqu'on change entre eux les éléments respectifs de deux lignes consécutives ;
- 3° Il est égal à l'unité, quand tous les éléments de la diagonale principale sont égaux à l'unité, tous les autres étant nuls.

J'ai démontré dans l'article cité l'existence d'un pareil polynome, et son unicité. Il en résulte que chaque fois qu'on peut établir les trois conditions précédentes, on est assuré de se trouver en présence d'un déterminant.

La deuxième condition peut d'ailleurs être remplacée par la suivante, qui lui est équivalente :

Un polynome qui satisfait aux conditions 1° et 3° et qui est nul lorsque deux lignes sont composées des mêmes éléments, satisfait aussi à la condition 2° et est un déterminant.

C'est en partant de cette définition que j'ai démontré le théorème sur le produit de deux déterminants.

On peut aussi essayer de généraliser la notion de déterminant et l'appliquer aux matrices.

Étant donné un tableau rectangulaire :

$$M = \begin{vmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^k & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & \dots & a_2^k & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_p^1 & \dots & a_p^k & \dots & a_p^n \end{vmatrix},$$

on appelle matrice déduite de ce tableau et l'on désigne par

$$\| a_p^n \|$$

tout polynôme fonction des lettres de ce tableau qui satisfait aux deux conditions suivantes :

1° Il est fonction linéaire et homogène des éléments d'une même ligne.

2° Il change de signe lorsqu'on change entre eux les éléments respectifs de deux lignes consécutives.

Il est facile de démontrer que si  $p > n$  la matrice est en général nulle, et pour  $p \leq n$  la matrice est une fonction linéaire et homogène de tous les déterminants d'ordre  $p$  que l'on peut tirer du tableau (1).

Nous allons nous servir de cette remarque pour établir les propositions qui vont suivre :

*Produit de deux matrices.* — Étant données deux matrices

$$\| a_p^n \| \quad \text{et} \quad \| b_p^n \|$$

et le déterminant

$$| C_{\mu}^{\mu} | = \begin{vmatrix} c_1^1 & \dots & c_{\mu}^{\mu} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{\mu}^1 & \dots & c_{\mu}^{\mu} \end{vmatrix},$$

où l'on a posé

$$c_i^k = a_i^1 b_k^1 + \dots + a_i^n b_k^n,$$

on dit que  $| C_{\mu}^{\mu} |$  est le produit des deux matrices et l'on démontre qu'il est la somme des produits de tous les déterminants formés par les colonnes de même rang tirés des deux matrices.

(1) Voir la *Revue de Mathématiques spéciales*, mars et avril 1927.

La démonstration se fait en remarquant que  $|c_p^n|$  est par ses lignes une fonction linéaire des éléments de chaque ligne de  $\|a_p^n\|$  qui change de signe lorsqu'on transpose deux des lignes de cette matrice et qu'il jouit par ses colonnes des mêmes propriétés par rapport aux lignes de  $\|b_p^n\|$ .

Il en résulte que le déterminant est une fonction linéaire des déterminants qui composent la première matrice, et aussi une fonction linéaire de ceux de la deuxième.

Si dans une des matrices on annule tous les éléments autres que ceux qui forment un déterminant de  $\|a_p^n\|$ , on constate que  $|c_p^n|$  est égal au produit de ce déterminant par le déterminant du même rang de  $\|b_p^n\|$ , et ceci démontre la proposition.

*Produit réduit de deux matrices.* — Étant données les deux matrices

$$\|a_p^{n+1}\| \text{ et } \|b_p^{n+1}\|,$$

déduites des deux précédentes par l'adjonction d'une  $(n+1)^{\text{ième}}$  colonne, j'appellerai produit réduit à la  $(n+1)^{\text{ième}}$  colonne de ces deux matrices, la somme des produits de tous les déterminants de même rang tirés de ces deux matrices, chacun de ces déterminants contenant la  $(n+1)^{\text{ième}}$  colonne.

Je désignerai ce produit par

$$\|a_p^{n+1} \times b_p^{n+1}\|_{n+1}.$$

THÉORÈME. — *Si l'on considère le déterminant*

$$\Delta_1 = \left| \begin{array}{ccc|c} & & & a_1^{n+1} \\ & & & \dots \\ & & & \dots \\ & & & \dots \\ & & & a_p^{n+1} \\ \hline b_1^{n+1} & \dots & b_p^{n+1} & 0 \end{array} \right|,$$

on a

$$\Delta_1 = - \|a_p^{n+1} \times b_p^{n+1}\|_{n+1}.$$

La démonstration est la même que dans le cas précédent. Il y a lieu simplement de faire remarquer que  $\Delta_1$  ne peut contenir que des déterminants de  $\|a_p^{n+1}\|$  qui contiennent la dernière colonne, puisqu'il s'annule lorsque les éléments de cette colonne sont nuls.

La vérification du signe peut se faire en attribuant aux éléments

des deux diagonales principales (dans deux déterminants du même rang) des valeurs égales à l'unité, les autres éléments étant nuls.

Cette proposition peut être généralisée.

On désigne par

$$\| a_p^q \times b_p^q \|_{n+1 \dots q}$$

le produit réduit de deux matrices, qui est la somme des produits des déterminants de même rang qui contiennent tous les  $q$  dernières colonnes des deux matrices, et par  $\Delta_p$  le déterminant

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} & & & a_1^{n+1} & \dots & a_1^q \\ & & & \dots & \dots & \dots \\ & & C_p^p & \dots & \dots & \dots \\ & & & a_p^{n+1} & \dots & a_p^q \\ b_1^{n+1} & \dots & b_p^{n+1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1^q & \dots & b_p^q & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

On démontrerait de la même manière la relation

$$\Delta_p = (-1)^q \| a_p^q \times b_p^q \|_{n+1 \dots q}$$

*Formule analogue à celle de Lagrange.* — Étant donnée la matrice

$$\left\| \begin{matrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & \dots & a_2^n \end{matrix} \right\| = \| a_2^n \|$$

et la matrice

$$\| a_1^{n+1} \| = \| a_1^1 \dots a_1^n \ a_1^{n+1} \|$$

où l'on pose

$$a_1^{n+1} = a_1^1 a_2^1 + a_1^2 a_2^2 + \dots + a_1^n a_2^n,$$

la formule de Lagrange

$$\Sigma (a_1^i a_2^k - a_1^k a_2^i)^2 = \Sigma (a_1^i)^2 \cdot \| (a_2^i)^2 \| - \Sigma (a_1^i a_2^i)^2$$

peut s'écrire avec notre notation

$$\| (a_2^n)^2 \| = \Sigma (a_1^i)^2 \cdot \Sigma (a_2^i)^2 - \| (a_1^{n+1})^2 \|_{n+1}$$

C'est cette formule qu'il s'agit de généraliser :

*Si l'on considère les deux matrices*

$$\| a_p^n \| \quad \text{et} \quad \| a_p^{n+1} \|,$$



où l'on a posé pour la dernière colonne de la deuxième matrice

$$a_k^{n+1} = a_k^1 a_p^1 + \dots + a_k^n a_p^n,$$

on a la relation

$$\| (a_p^n)^2 \| = [(a_p^1)^2 + \dots + (a_p^n)^2] \cdot \| (a_{p-1}^n)^2 \| - \| (a_{p-1}^{n+1})^2 \|_{n+1}.$$

En effet, si l'on désigne par  $\Delta$  et  $D$  les déterminants qui représentent les carrés de  $\| a_p^n \|$  et de  $\| a_{p-1}^n \|$ , on peut écrire, en tenant compte de la valeur de  $a_k^{n+1}$ ,

$$\Delta = \left| \begin{array}{c|ccc} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ \hline & & & \\ a_1^{n+1} & \dots & a_{p-1}^{n+1} & (a_p^1)^2 + \dots + (a_p^n)^2 \end{array} \right|,$$

ce que l'on peut encore écrire

$$\Delta = [(a_p^1)^2 + \dots + (a_p^n)^2] D + \left| \begin{array}{c|ccc} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ \hline & & & \\ a_{p-1}^{n+1} & \dots & a_{p-1}^{n+1} & 0 \end{array} \right|.$$

Or, en vertu du théorème précédent, le deuxième terme du deuxième membre est bien égal à  $-\| (a_{p-1}^{n+1})^2 \|_{n+1}$ , et la proposition se trouve ainsi démontrée.

*Théorème de M. Hadamard.* — Étant donnée une matrice  $\| a_p^n \|$ , on a toujours

$$(1) \quad \| (a_p^n)^2 \| \leq \Sigma (a_1^n)^2 \cdot (\Sigma a_2^n)^2 \dots \Sigma (a_p^n)^2,$$

l'égalité ayant lieu lorsque les suivantes sont satisfaites :

$$(2) \quad \sum_{r=1}^{i=n} a_r^i a_s^i = 0 \left( \begin{array}{l} \nu = 1, \dots, p \\ s = 1, \dots, p \end{array} \right) \quad \text{et} \quad r \neq s.$$

Cette relation est évidente dans le cas  $p = 2$ , puisqu'elle est une conséquence de la formule de Lagrange.

En l'admettant dans le cas d'une matrice à  $p - 1$  lignes, on a

$$(3) \quad \| (a_{p-1}^n)^2 \| < \Sigma (a_1^n)^2 \cdot \Sigma (a_2^n)^2 \dots \Sigma (a_{p-1}^n)^2,$$

l'égalité ayant lieu lorsque les relations (2) sont satisfaites pour toutes les valeurs de  $r$  et de  $s$  comprises entre 1 et  $p - 1$ . Mais, en vertu de l'égalité établie, on a

$$\| (a_p^n)^2 \| = \| (a_{p-1}^n)^2 \| \cdot \Sigma (a_p^i)^2 - \| (a_{p-1}^{n+1})^2 \|_{n+1},$$

d'où

$$\| (a_p^n)^2 \| \leq \| (a_{p-1}^n)^2 \| \cdot \Sigma (a_p^i)^2,$$

l'égalité ayant lieu lorsque les relations (2) sont satisfaites pour  $r = 1, 2, \dots, p - 1$  et  $s = p$ .

En remplaçant  $\| (a_{p-1}^n)^2 \|$  par le deuxième membre de l'inégalité (3), on démontre la formule (1) qui, dans le cas où  $n = p$ , c'est-à-dire dans le cas d'un déterminant, n'est autre chose que le théorème de M. Hadamard.

La démonstration précédente suppose des éléments réels, mais on peut facilement étendre le théorème aux quantités complexes. Il suffit de remplacer le carré d'une matrice par le produit de cette matrice par la conjuguée. Tout carré qui intervient dans la formule se trouve alors remplacé par le carré du module.

*Limite du carré d'une matrice.* — Étant donnée une matrice  $\| a_p^n \|$ , on peut supposer que  $n$  croît indéfiniment,  $p$  restant fixe; dans ce cas  $\| (a_p^n)^2 \|$  devient une série multiple d'ordre  $p$  à termes tous positifs.

**THÉORÈME.** — *Si les séries  $\Sigma (a_1^n)^2, \dots, \Sigma (a_p^n)^2$ , à termes tous positifs sont convergentes, il en est de même de la série multiple représentée par  $\| (a_p^n)^2 \|$  lorsque  $n$  croît indéfiniment.*

Ceci est une conséquence de l'inégalité (1).

On peut d'ailleurs ajouter que si les séries  $\Sigma a_p^n a_s^n$  sont convergentes et ont des sommes nulles pour  $r \neq s$  et  $r = 1, \dots, p$ ,  $s = 1, \dots, p$ , on obtient la somme de  $\| (a_p^n)^2 \|$  en faisant le produit des séries  $\Sigma (a_1^n)^2, \dots, \Sigma (a_p^n)^2$ .

Dans le cas où  $p$  croît aussi indéfiniment, le théorème précédent doit être un peu modifié.

Il devient, si nous remplaçons dans la matrice  $a_2^2$  par  $1 + a_2^{(1)}$  :

*Si la série  $\Sigma a_i^i$  est absolument convergente, ainsi que la*

(1) Théorème de Helge von Koch.

série à double entrée  $\Sigma\Sigma(a_h^k)^2$ , il en est de même de la série multiple  $\|(a_p^n)^2\|$  lorsque  $n$  et  $p$  croissent indéfiniment.

Pour la démonstration de ce théorème, on se sert du lemme suivant :

*Si la suite  $a_n$  à termes positifs est bornée supérieurement et si à partir d'une certaine valeur de  $n$   $\frac{a_{n+p}}{a_n}$  a sa plus grande limite, inférieure ou égale à l'unité, la suite  $a_n$  a une limite lorsque  $n$  croît indéfiniment.*

Ceci est évident si la plus grande des limites est inférieure à 1, car alors  $a_n$  tend vers zéro, comme le terme général d'une série convergente.

Dans le cas général, étant donné un nombre  $\varepsilon$ , on aura, à partir d'une certaine valeur de  $n$ ,

$$\frac{a_{n+p}}{a_n} < 1 + \varepsilon,$$

quel que soit le nombre  $p$ .

Si  $a_n$  n'a pas de limite, comme la suite est bornée, soient  $\mu$  et  $\lambda$  la plus petite et la plus grande limite de  $a_n$ ,

$$\mu < \lambda \leq 1.$$

On peut alors choisir  $n$  et  $n + p$  de telle manière que l'on ait

$$\begin{aligned} u_{n+p} &> \lambda - \eta, \\ u_n &< \mu + \tau, \end{aligned}$$

et l'on peut choisir  $\eta$  suffisamment petit de manière que

$$\frac{\lambda - \eta}{\mu + \tau} > 1 + \varepsilon,$$

d'où

$$\frac{u_{n+p}}{u_n} > 1 + \varepsilon,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Revenons à la démonstration du théorème.

Posons

$$A_k = (a_k^1)^2 + (a_k^2)^2 + \dots + (a_k^n)^2 + \dots$$

La série  $A_k$  est convergente, et si l'on désigne par

$$\|(\alpha_p)^2\|^2$$

ce que devient  $\|(\alpha_p^n)^2\|$  lorsque  $n$  croit indéfiniment, on a

$$\|(\alpha_p)^2\| \leq (1 + 2|a_1| + A_1)(1 + 2a_1^2 + A_2) \dots (1 + 2a_p^n + A_p).$$

Or, étant données nos hypothèses, le produit du deuxième membre est convergent et a une limite  $P$ .

On a donc

$$\|(\alpha_p)^2\| \leq P.$$

La suite  $\|(\alpha_p)^2\|$  est donc bornée supérieurement.

D'un autre côté on a

$$\|(\alpha_{p+g})^2\| \leq \|(\alpha_p)^2\| \prod_{k=1}^{k=g} [1 + 2|a_{p+k}^{p+k}| + A_{p+k}],$$

d'où

$$\frac{\|(\alpha_{p+k})^2\|}{\|(\alpha_p)^2\|} \leq \prod_{k=1}^{k=g} (1 + 2|a_{p+k}^{p+k}| + A_{p+k})$$

et l'on peut choisir  $p$  suffisamment grand de manière à avoir

$$\prod_{k=1}^{k=g} (1 + 2|a_{p+k}^{p+k}| + A_{p+k}) < 1 + \varepsilon.$$

On en déduit, comme conséquence du lemme précédent, que la suite  $\|(\alpha_p)^2\|$  a une limite.

*Remarque.* — Il est facile d'étendre ce qui précède au domaine imaginaire.

**SURFACES SE DÉFORMANT DE SORTE QUE LES LIGNES DE NIVEAU  
RESTENT LIGNES DE NIVEAU ;**

PAR M. BERTRAND GAMBIER.

1. M. Goursat a déterminé les *surfaces telles qu'au cours d'une déformation continue au sens de Gauss les lignes de niveau restent lignes de niveau* (*American Journal of Mathematics*, t. 14, 1892, p. 1-8). Je vais indiquer brièvement le principe de la recherche analytique, puis montrer comment de simples réflexions géométriques permettent d'obtenir, sans calculs, tous les résultats (1).

2. Si l'on prend les lignes de niveau dans les plans  $z = \text{const.}$ , on a pour deux surfaces applicables de cette espèce

$$(1) \quad \begin{cases} dx^2 + dy^2 + dz^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2, \\ Z = \text{fonction de } z. \end{cases}$$

On peut donc obtenir, quand le couple  $(x, y, z)$ ,  $(X, Y, Z)$  est connu, la quantité nouvelle  $z_1$ , fonction de  $z$ , par une quadrature,

$$(2) \quad dz_1^2 = dz^2 - dZ^2,$$

et la première égalité (1) revient à écrire

$$(3) \quad dx^2 + dy^2 + dz_1^2 = dX^2 + dY^2.$$

Cela prouve que la surface  $(x, y, z_1)$  est développable : si donc on pose

$$(4) \quad p_1 = \frac{\partial z_1}{\partial x}, \quad q_1 = \frac{\partial z_1}{\partial y}, \quad r_1 = \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}, \quad s_1 = \frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y}, \quad t_1 = \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2};$$

on aura l'équation

$$(5) \quad r_1 t_1 - s_1^2 = 0,$$

---

(1) Cette question a fait le sujet du certificat de Géométrie supérieure, juillet 1926, de Lille.

ou, en posant

$$(6) \quad Z' = \frac{dZ}{dz}, \quad Z'' = \frac{d^2Z}{dz^2},$$

$$(7) \quad p_1 = p \sqrt{1-Z'^2}, \quad q_1 = q \sqrt{1-Z'^2},$$

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_1 = r \sqrt{1-Z'^2} - p^2 \frac{Z'Z''}{\sqrt{1-Z'^2}}, \\ s_1 = s \sqrt{1-Z'^2} - pq \frac{Z'Z''}{\sqrt{1-Z'^2}}, \\ t_1 = t \sqrt{1-Z'^2} - q^2 \frac{Z'Z''}{\sqrt{1-Z'^2}}, \end{array} \right.$$

l'équation de Monge-Ampère,

$$(9) \quad rt - s^2 - \frac{Z'Z''}{1-Z'^2} (q^2r + p^2t - 2pqs) = 0.$$

Cette équation s'intègre aisément par la méthode classique : les deux systèmes de caractéristiques sont confondus et les équations différentielles de ces caractéristiques admettent trois combinaisons intégrables; en continuant les calculs, il y a lieu d'introduire la notation  $\zeta$  pour représenter la fonction de  $z$ ,  $\frac{Z'Z''}{1-Z'^2}$ ; quand  $\zeta$  est choisie, d'ailleurs arbitrairement, l'intégration complète de (9) s'achève aisément en termes finis avec deux nouvelles fonctions arbitraires d'une variable; on a ainsi les expressions  $(x, y, z)$  des coordonnées d'un point de la première surface. On voit alors qu'il y a une déformation *continue*, car  $Z$  est donnée par l'équation du premier ordre en  $Z'$ ,

$$(10) \quad Z'Z'' = (1-Z'^2)\zeta$$

qui donne  $Z'^2$  par une quadrature; l'équation (3) donne ensuite  $X$  et  $Y$ .

On peut remarquer que si l'on prend les lignes de niveau dans les plans  $x = \text{const.}$ , on aura

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} dx^2 + dy^2 + dz^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2, \\ X = \text{fonction de } x; \end{array} \right.$$

on posera

$$(12) \quad dx_1^2 = dx^2 - dX^2$$

et la surface  $(x_1, y, z)$  sera développable, de sorte que si  $p_1, q_1,$

$r_1, s_1, t_1$  sont les dérivées  $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots$  de  $z$  exprimée en  $x_1$  et  $y$ , on a au lieu de (9) l'équation

$$(11) \quad (rt - s^2) \left( \frac{dx}{dx_1} \right)^2 + pt \frac{d^2 x}{dx_1^2} = 0,$$

toujours de Monge-Ampère et l'on continue comme plus haut. Les équations (9) et (11) constituent d'excellents exercices d'application des méthodes générales. Il reste ensuite à montrer que le réseau de Kœnigs, formé avec les lignes de niveau et les courbes de contact des cylindres circonscrits avec génératrices parallèles aux plans de niveau, se correspond à lui-même sur toutes les surfaces (on le sait déjà pour les lignes de niveau, mais il faut le montrer pour la seconde famille).

3. Traitons la question complètement par la géométrie; supposons les plans de niveau  $x = \text{const.}$  On a posé,

$$(1) \quad dx_1^2 = dx^2 - dX^2,$$

$$(2) \quad dx_1^2 + dy^2 + dz^2 = dY^2 + dZ^2.$$

La surface  $D(x_1, y, z)$  est développable: donc on peut exprimer en termes finis  $(x_1, y, z)$  par les formules

$$(3) \quad \begin{cases} x_1 = x_1, \\ y = x_1 \theta_1(a) + \tau_1(a), \\ z = x_1 \theta(a) + \eta(a), \end{cases}$$

les fonctions  $\theta_1, \theta, \eta_1, \eta$  de la variable  $a$  satisfaisant à la relation

$$(4) \quad \frac{\eta_1'}{\theta_1'} = \frac{\eta'}{\theta'} = \lambda(a),$$

où  $\lambda(a)$  est une fonction arbitraire de  $a$ ; la surface  $S(x, y, z)$  sera représentée par les équations paramétriques

$$(5) \quad \begin{cases} x = x, \\ y = f(x) \theta_1(a) + \eta_1(a), \\ z = f(x) \theta(a) + \eta(a), \end{cases}$$

qui ne font intervenir que les fonctions arbitraires  $f(x), \lambda(a), \theta(a), \theta_1(a)$ ; en prenant l'une des fonctions  $\lambda, \theta$  ou  $\theta_1$  comme

nouveau paramètre (ce qui est possible si cette fonction ne se réduit pas à une constante), on réduit bien à trois le nombre des fonctions arbitraires. On peut remarquer dès maintenant que la transformation ponctuelle, étendue à tout l'espace,

$$(6) \quad x_1 = f(x), \quad y_1 = y, \quad z_1 = z$$

remplace la surface  $S$  par la développable  $D$ ; dans cette transformation, les lignes de niveau (relatives à  $yOz$ ) restent lignes de niveau, chacune restant égale à elle-même et n'ayant subi qu'une translation parallèle à  $Ox$ , d'intensité variable, fonction continue de son abscisse primitive; les tangentes de la surface  $S$  parallèles à  $yOz$  deviennent les tangentes parallèles à  $yOz$  de la surface  $D$ ; or les courbes  $a = \text{const.}$  sont, sur  $D$ , les génératrices; en tous les points d'une même génératrice  $G$  de  $D$ , les tangentes à  $D$  parallèles à  $yOz$  sont toutes parallèles entre elles et à la trace sur  $yOz$  du plan tangent à  $D$  le long de  $G$ : donc tout le long de la courbe  $a = a_0$ , correspondant à  $G$  sur  $S$ , les tangentes à  $S$  parallèles à  $yOz$  ont conservé la même direction: elles forment le cylindre circonscrit à  $S$  parallèlement à cette direction; autrement dit les courbes  $x = \text{const.}$  et  $a = \text{const.}$  sont conjuguées sur  $S$ ; d'ailleurs la courbe  $a_0$  est plane et son plan est celui qui projette  $G$  sur  $yOz$  parallèlement à  $Ox$ .

Les surfaces  $S$  étudiées ici sont toutes celles qui sont réductibles à une développable par la transformation (6) qui consiste à faire varier d'une façon continue les distances successives des plans parallèles à un même plan. Si  $S$  ou  $D$  est réalisée, à la façon d'un accordéon, par une série de cadres métalliques (réduits à leur pourtour), tous parallèles au plan  $yOz$  et reliés par un tissu souple, extensible, on peut dilater ou comprimer la surface de façon que les cadres conservent leur orientation commune, chaque point décrivant une perpendiculaire à cette direction de plan. On peut remarquer que faire la carte de  $D$  sur le plan  $yOz$  est très simple: on figure la projection sur  $yOz$  de la section par le plan  $x_0$ , c'est une courbe  $C_0$  arbitraire; la projection de la section  $x_1$  est une autre courbe  $C_1$  arbitraire; en un point  $M_0$  de  $C_0$  on mène la tangente et l'on prend sur  $C_1$  le point  $M_1$  où la tangente est parallèle à celle de  $M_0$ ;  $M_0M_1$  est la projection de la génératrice issue de  $M_0$ ; la section par le plan  $x_0 + tx_1$  s'obtient



en divisant chaque segment  $M_0M_1$  par le point  $M$  tel que  $\frac{M_0M}{MM_1} = t$  en grandeur et signe; cela fait, cette carte peut servir pour  $S$  à condition d'inscrire comme éloignement de chaque section de  $S$  non plus  $x$  relatif à  $D$ , mais  $\varphi(x)$  où  $\varphi$  est une fonction arbitraire de  $x$ . L'arête de rebroussement de  $D$  a pour homologue sur  $S$  une arête de rebroussement, enveloppe des courbes  $a = \text{const.}$  de  $S$ ; le cylindre circonscrit à  $S$  le long de la courbe  $(a_0)$  est osculateur à  $S$  au point particulier où  $(a_0)$  touche son enveloppe [mais le plan osculateur à cette courbe  $(a_0)$  au point en jeu n'est pas le plan tangent à  $S$ ].

Nous avons ainsi complètement intégré les équations équivalentes

$$\begin{aligned} rt - s^2 - (q^2r + p^2t - 2pqs)f(z) &= 0, \\ rt - s^2 + p\varphi(x) &= 0, \end{aligned}$$

où  $f$  et  $\varphi$  sont des fonctions arbitraires, et cela sans calcul, mais nous n'avons pas achevé le problème, c'est-à-dire trouvé les déformées d'une surface solution en nouvelle surface du même type. L'élimination de  $f$  ou  $\varphi$  donne une équation d'ordre 3, complètement intégrée aussi.

4. Nous arrivons au résultat en remarquant que si la surface  $(x_1, y, z)$  est développable [formules (3) du numéro précédent], la surface  $(kx_1, y, z)$ , où  $k$  est une constante numérique arbitraire, est également développable. On écrit donc

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} dx_1^2 + dy^2 + dz^2 &= dY^2 + dZ^2, \\ k^2 dx_1^2 + dy^2 + dz^2 &= d\bar{Y}^2 + d\bar{Z}^2, \\ dx_1^2 &= dx^2 - dX^2, \\ k^2 dx_1^2 &= dx^2 - d\bar{X}^2 \end{aligned} \right.$$

et de là résultent évidemment les relations

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} dx^2 + dy^2 + dz^2 &= dX^2 + dY^2 + dZ^2, \\ dx^2 + dy^2 + dz^2 &= d\bar{X}^2 + d\bar{Y}^2 + d\bar{Z}^2, \end{aligned} \right.$$

quand  $k$  varie, nous obtenons les déformées  $S_k$  de  $S$ ; la déformée  $S_1$  ne se distingue pas des autres; raisonnons donc sur  $S$  et  $S_k$ . Démontrons d'abord que les courbes  $a = \text{const.}$  de  $S$  ont pour

homologues sur  $S_k$  les courbes de même définition : ce résultat n'est pas évident, car si sur  $S$  et  $S_k$  nous connaissons les systèmes de Kœnigs relatifs aux sections planes par les plans  $x = \text{const.}$ , le fait que les courbes  $x = \text{const.}$  se correspondent n'entraîne pas que les courbes de contact des cylindres circonscrits à  $S$  parallèlement à une direction de  $\gamma O z$  aient pour homologues dans l'application les courbes de même définition de  $S_k$ . En tout cas  $S$  et  $S_k$  ont un système conjugué commun et l'équation de Laplace relative à ce système est, toujours d'après M. Kœnigs (mais un autre théorème), la même pour les deux surfaces, soit

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + A(u, v) \frac{\partial \theta}{\partial u} + B(u, v) \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0.$$

Elle admet pour solution  $x, y, z, \bar{X} = f(x), \bar{Y}, \bar{Z}$  (et même

$$x^2 + y^2 + z^2 - \bar{X}^2 - \bar{Y}^2 - \bar{Z}^2);$$

substituons  $x$  et  $\bar{X}$  dans (3); la comparaison donne

$$(4) \quad \frac{d^2 \bar{X}}{dx^2} \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = 0.$$

Si l'on choisit

$$\frac{d^2 \bar{X}}{dx^2} = 0, \quad \frac{d\bar{X}}{dx} = h,$$

où  $h$  est une constante, on a aussi

$$dx_1^2 = \frac{dx^2}{k^2} (1 - h^2),$$

de sorte que la surface  $(x, y, z)$  ou  $\left(\frac{kx_1}{\sqrt{1-h^2}}, y, z\right)$  est développable, ainsi que toutes ses déformées : la construction géométrique de  $S$  à partir d'une développable  $D$  devait nous fournir cette solution, banale, à éliminer. Il reste donc  $\frac{\partial x}{\partial u} = 0$ , puisque  $u$  et  $v$  jouent un rôle interchangeable; donc le réseau conjugué est formé du système  $v = \text{const.}$  ou  $x = \text{const.}$  plus de la famille conjuguée sur chaque surface : c'est donc le réseau de Kœnigs. Nous avons maintenant, sans effort, la forme de  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$  en formant effectivement l'équation de Laplace, en employant les for-

mules (5) du numéro précédent, avec les variables  $x$  et  $a$ . On a ]

$$(5) \quad \frac{\partial y}{\partial x} = f'(x)\theta_1(a), \quad \frac{\partial y}{\partial a} = f(x)\theta'_1(a) + \eta'_1(a), \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial a} = f'(x)\theta'_1(a).$$

En remplaçant  $\eta'_1$  par  $\lambda(a)\theta'_1(a)$ , on voit que l'équation de Laplace

$$(6) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial a} - \frac{f'(x)}{f(x) + \lambda} \frac{\partial \theta}{\partial a} = 0$$

est satisfaite pour  $\theta$  égal à  $x$ , ou  $y$ , ou  $z$ . L'intégrale générale de (6) est manifestement, en dehors des solutions uniquement fonction de  $x$ ,

$$(7) \quad \theta = f(x)\bar{\theta}(a) + \bar{\eta}(a).$$

avec la relation

$$(8) \quad \frac{\bar{\eta}'(a)}{\bar{\theta}'(a)} = \lambda.$$

Telle sera donc la forme de  $Y$  et  $Z$  (nous pouvons en effet nous dispenser de barrer les lettres  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ ). Écrivons donc

$$(9) \quad \begin{cases} Y = f(x)\bar{\theta}_1(a) + \bar{\eta}_1(a), \\ Z = f(x)\bar{\theta}(a) + \bar{\eta}(a), \\ X = \varphi(x). \end{cases}$$

En égalant les  $ds^2$ ,  $E dx^2 + 2F dx da + G da^2$ , le terme en  $dx^2$  nous donne l'équation aux variables séparées,

$$(10) \quad \frac{1 - \varphi'^2}{f'^2} = \bar{\theta}_1^2 + \bar{\theta}^2 - \theta_1^2 - \theta^2.$$

Égalons chaque membre à une constante ( $-n$ ) et nous avons

$$(11) \quad \bar{\theta}_1^2 + \bar{\theta}^2 = \theta_1^2 + \theta^2 - n,$$

$$(12) \quad X = \int \sqrt{1 + n f'^2(x)} dx$$

(la surface  $S$  sera donc obtenue pour  $n = 0$ ). Le terme en  $dx da$  nous donne la relation

$$\theta_1 \theta'_1 + \theta \theta' = \bar{\theta}_1 \bar{\theta}'_1 + \bar{\theta} \bar{\theta}',$$

conséquence de (11). Le terme en  $da^2$  nous donne la relation

complémentaire

$$(13) \quad \bar{\theta}'_1{}^2 + \bar{\theta}'^2 = \theta'_1{}^2 + \theta'^2.$$

La forme de (11) et (13) conduit à poser

$$(14) \quad \bar{\theta}_1 = \rho \sin \omega, \quad \bar{\theta} = \rho \cos \omega,$$

où  $\rho$  et  $\omega$  sont fonctions de  $a$  et l'on trouve immédiatement

$$(15) \quad \omega' = \frac{\sqrt{(\theta_1^2 + \theta^2 - n)(\theta_1'^2 + \theta'^2) - (\theta_1 \theta'_1 + \theta \theta')^2}}{\theta_1^2 + \theta^2 - n};$$

d'où  $\omega$  par une quadrature et la déformée est complètement connue pour chaque valeur de  $n$ ; on a en effet, pour finir,

$$(16) \quad \begin{cases} \bar{\gamma}'_1(a) = \lambda \theta'_1(a) = \frac{\eta'}{\theta'} \bar{\theta}'_1, \\ \bar{\gamma}'(a) = \lambda \bar{\theta}'(a) = \frac{\eta'}{\theta'} \bar{\theta}'. \end{cases}$$

Chaque déformée s'obtient donc par *quatre* quadratures [formules (12), (15) et (16)]. J'ai respecté dans ce travail toutes les notations de M. Goursat dans l'article cité et j'ai voulu montrer comment la géométrie supprime les calculs.

5. Il reste à indiquer quelques exemples simples : il suffit de se reporter aux courbes  $C_0$  et  $C_1$  du n° 3.

1° Si  $C_0$  et  $C_1$  sont des cercles concentriques,  $S$  est de révolution, la développable  $D$  étant un cône de révolution (ou du moins un assemblage de troncs de cône de révolution coaxiaux).

2° Si  $C_0$  et  $C_1$  sont des courbes parallèles,  $S$  est surface moulure, la développable  $D$  étant constituée par les tangentes à une hélice *quelconque*.

3° Si  $C_0$  et  $C_1$  sont égales,  $C_1$  se déduisant de  $C_0$  par translation, la surface  $D$  est un cylindre, la surface  $S$  une surface de translation dont les profils de translation sont plans, dans deux plans rectangulaires.

4° On peut essayer de trouver des surfaces qui appartiennent de plusieurs façons au type indiqué. Les surfaces du second degré en donnent un exemple : il suffit de les couper par des plans paral-

lèles à un plan principal; un ellipsoïde est donc, de trois façons différentes, solution; un parabololoïde, de deux façons.

5° Si l'on suppose  $\lambda$  constant, on a  $\eta_1 = \lambda\theta_1 + \gamma_0$ ,  $\eta = \lambda\theta + z_0$  et il suffit d'un décalage de l'axe des  $x$  pour écrire

$$y = f(x)\theta_1(a), \quad z = f(x)\theta(a).$$

Les courbes  $a = \text{const.}$  sont alors les sections de la surface par les plans pivotant autour de  $Ox$  en même temps que les courbes de contact des cylindres circonscrits à génératrices parallèles à  $yOz$ , de sorte que les courbes conjuguées  $x = \text{const.}$  sont aussi courbes de contact des cônes circonscrits ayant leur sommet sur  $Ox$  : le réseau est donc conjugué, au sens de Kœnigs, *doublement*. Ce sont ces surfaces qui sont étudiées, d'après Peterson, par Darboux (*Théorie des surfaces*, t. I, 2<sup>e</sup> édition, p. 181-184). Les déformées sont du même type. La développable D est un cône. A tout couple obtenu ici correspond, en annulant purement et simplement les fonctions  $\eta_1$ ,  $\eta$ ,  $\bar{\eta}_1$ ,  $\bar{\eta}$ , un couple de Darboux-Peterson, la développable D étant remplacée par le cône directeur de ses génératrices.

6° Sauf ce cas spécial, où  $\lambda$  est constant, on pourra simplifier les formules en supposant que  $\lambda$  et  $a$  coïncident. S'il ne s'agit que d'une surface à représenter, comme

$$\eta'_1 = a\theta'_1, \quad \eta' = a\theta',$$

on pourra, pour n'avoir plus de quadratures du tout dans les expressions paramétriques de la surface, remplacer  $\theta_1$  et  $\theta$  par  $\theta'_1$  et  $\theta'$ , de sorte que la surface S serait représentée par

$$S \begin{cases} y = f(x)\theta'_1(a) + a\theta'_1 - \theta_1, \\ z = f(x)\theta'(a) + a\theta' - \theta. \end{cases}$$

7° Donnons un exemple particulièrement simple où toutes les surfaces S applicables entre elles sont algébriques. Je l'emprunte, en partie tout au moins, à mon Mémoire *Sur les mécanismes transformables ou déformables* (*Journal de Liouville*, 9<sup>e</sup> série, t. 1, 1922). Je considère un polynome arbitraire  $f(x)$ , de degré 3 ou 2, tel que  $f'(x)$  ne soit pas carré parfait; faisons varier la constante réelle C dans un intervalle convenable de façon que l'équation  $f(x) - C = 0$  ait deux racines imaginaires conjuguées

et une seule réelle : à chaque valeur de  $C$  ainsi choisie correspondent donc, par une équation du second degré, deux valeurs  $u_0, u_1$  réelles et deux nombres  $\lambda_0, \lambda_1$  réels, tels que l'on ait ( $u_0, u_1, \lambda_0, \lambda_1$  étant fonction de  $C$ ).

$$(1) \quad \begin{cases} f(u) - C \equiv \lambda_1(u - u_0)^2 + \lambda_0(u - u_1)^2, \\ f'(u) \equiv 3[\lambda_1(u - u_0) + \lambda_0(u - u_1)], \\ f''(u) \equiv 6[\lambda_1 + \lambda_0]. \end{cases}$$

En écrivant

$$(2) \quad \begin{cases} X = \int \sqrt{H(t) + C} dt, \\ Y = t \sqrt{\lambda_1(u - u_0)^2 + \lambda_0(u - u_1)^2} + \frac{3}{2} \int U \sqrt{\lambda_1(u - u_0)^2 + \lambda_0(u - u_1)^2} du, \\ Z = t \sqrt{\lambda_0(u - u_1)^2 + \lambda_1(u - u_0)^2} + \frac{3}{2} \int U \sqrt{\lambda_0(u - u_1)^2 + \lambda_1(u - u_0)^2} du, \end{cases}$$

où  $H$  est une fonction arbitraire de  $t$ ,  $U$  une fonction arbitraire de  $u$ , nous définissons une infinité de surfaces (une pour chaque valeur de  $C$ ) ayant pour  $ds^2$ ,

$$(3) \quad ds^2 = [f(u) + H(t)] dt^2 + (t + U) f'(u) dt du + \frac{3}{8} (t + U)^2 f''(u) du^2.$$

Ces surfaces sont donc applicables les unes sur les autres. Pour avoir des surfaces algébriques, il suffit par exemple de définir la relation entre  $H(t)$  et  $t$  par l'équation  $t = \varphi(H)$ , où  $\varphi$  est un polynôme entier; en posant  $H + C = H_1$ , on a encore  $t = \psi(H_1)$ , où  $H_1$  est un nouveau polynôme et l'intégrale  $X$  devient

$$X = \int \sqrt{H_1} \psi'(H_1) dH_1$$

qui est un polynôme entier en  $\sqrt{H_1}$  ou  $\sqrt{H + C}$ ; de même il suffira de prendre pour  $U$  un polynôme entier en  $u$  et de faire le changement de variable  $u = u_0 + v^2$  ou  $u = u_1 + w^2$  pour avoir  $Y$  et  $Z$  algébriquement. On a ainsi une application élégante de la méthode classique de résolution de l'équation générale du troisième degré.

6. Enfin, conformément à un théorème général sur les surfaces admettant deux séries de lignes planes, conjuguées, on vérifie que

la surface S est l'enveloppe du plan radical des deux sphères

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2Xf' - 2(f - xf') = 0,$$

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2 \frac{\theta'}{\theta_1 \theta' - \theta \theta_1} Y + 2 \frac{\theta'_1}{\theta_1 \theta' - \theta \theta'_1} Z + 2 \frac{\eta_1 \theta' - \theta'_1 \eta}{\theta_1 \theta' - \theta \theta'_1} = 0$$

et le plan radical de deux sphères infiniment voisines d'une même série est le plan de l'une des deux lignes conjuguées relatives au point de contact.

### THÉORÈMES DE PUISEUX ET DE HALPHEN SUR LE PENDULE SPHÉRIQUE;

PAR LOUIS GÉRARD.

En prenant pour unité le diamètre de la sphère, pour origine le point le plus bas, on trouve, dans les traités de mécanique, que l'accroissement  $\alpha$  de l'azimut pendant une oscillation simple est

$$\alpha = \int_a^b \frac{dz \sqrt{abc}}{z(1-z) \sqrt{(z-a)(b-z)(c-z)}}$$

avec

$$0 < a < b < 1 - a, \quad c = \frac{(1-a)(1-b)}{1-a-b} = 1 + \frac{ab}{1-a-b} > 1.$$

De plus

$$\int_a^b \frac{dz \sqrt{ab}}{z \sqrt{(z-a)(b-z)}} = \pi = \int_a^b \frac{dz \sqrt{(1-a)(1-b)}}{(1-z) \sqrt{(z-a)(b-z)}}.$$

Donc, pour montrer que  $\alpha > \pi$ , il suffit de remarquer que

$$\frac{\sqrt{c}}{(1-z) \sqrt{c-z}} > 1.$$

Pour montrer que  $\alpha < 2\pi$ , il suffit de prouver que

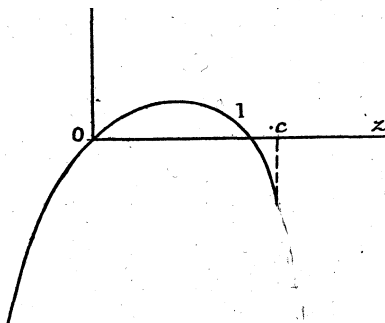
$$(1) \quad \frac{\sqrt{abc}}{z(1-z) \sqrt{c-z}} < \frac{\sqrt{ab}}{z} + \frac{\sqrt{(1-a)(1-b)}}{1-z}.$$

En posant  $A = \sqrt{(1-a)(1-b)}$ ,  $B = \sqrt{ab}$  et en remplaçant  $z$

par sa valeur  $\frac{A^2}{A^2 - B^2}$ , l'inégalité (1) devient

$$(2) \quad [Az + B(1-z)]\sqrt{A^2 - z(A^2 - B^2)} - AB > 0.$$

M. Hadamard m'a fait remarquer que le premier membre de cette inégalité s'annule pour  $z = 0$  et  $z = 1$ . De plus,  $A > B$  (à cause de l'hypothèse  $1 - a - b > 0$ ); donc la variation de ce



premier membre est représentée par la courbe ci-dessus; donc ce premier membre est positif pour  $0 < z < 1$ .

Pour le voir algébriquement, posons

$$\sqrt{A^2 - z(A^2 - B^2)} = u;$$

l'inégalité (2) devient

$$(A^2 + AB + B^2 - u^2)u - AB(A + B) > 0$$

ou

$$(3) \quad (u - A)(u - B)(u + A + B) < 0.$$

Quand  $z$  varie de 0 à 1,  $u$  varie de  $A$  à  $B$ ; donc l'inégalité (3) est vérifiée.

### QUESTION PROPOSÉE.

2499.

1° Soit un système d'axes rectangulaires dans un plan; soient  $A$  un point du demi-plan  $y > 0$ ,  $A'$  son symétrique par rapport à  $x'x$ . Trouver les lignes de plus grande pente de la fonction  $g(A, M) = \log(MA' : MA)$ ,



montrer qu'elles sont identiques aux géodésiques de l'intégrale  $\int \frac{ds}{y}$ , et que la ligne de p. g. p. de  $g(A, M)$  passant par B se confond avec la ligne de p. g. p. de  $g(B, M)$  passant par A.

2° Par une transformation conforme  $\bar{z} = f(z)$ , on fait correspondre biunivoquement au demi-plan  $y > 0$  un domaine simplement connexe du plan  $\bar{z}$ ; soient  $\bar{A}, \bar{M}$  les images de A, M. On pose  $g(\bar{A}, \bar{M}) = g(A, M)$ . Montrer que les lignes de p. g. p. de  $g(\bar{A}, \bar{M})$  forment encore un système de géodésiques et, par suite, possèdent la propriété de réciprocity précédente.

3° Soient trois axes rectangulaires dans l'espace, soient A et A' deux points de l'axe des  $y$  tels que  $\overline{OA'} = -\overline{OA}$ . Reprendre les calculs de la première partie en substituant à  $g$  la fonction  $G(A, M) = \frac{1}{AM} - \frac{1}{A'M}$ . Montrer que la propriété de réciprocity des lignes de p. g. p. n'a plus lieu.

*Nota.* — Les lecteurs possédant les éléments de la théorie du potentiel (tome III du Cours de M. Goursat) reconnaîtront en  $g$  la fonction de Green du demi-plan  $y > 0$ , en  $\bar{g}$  celle du domaine qu'on en déduit par représentation conforme (1); en  $G$  la fonction de Green du domaine spatial défini par l'inégalité  $y > 0$ . Notre problème montre l'impossibilité d'étendre à l'espace la propriété de réciprocity des lignes de p. g. p. obtenue pour les domaines plans simplement connexes.

G. BOULIGAND.

## SOLUTIONS DE QUESTIONS DE LICENCE.

### Question C.70.

[*Mathématiques générales, épreuve théorique de Mécanique; énoncé publié en juillet 1926, p. 315.*]

#### SOLUTION

Par R. WEINZAEFFEL.

Une plaque en forme de triangle rectangle isocèle OAB tourne autour du côté de l'angle droit OA, placé verticalement avec la vitesse angulaire

(1) En vertu d'un théorème classique de Riemann, les résultats du 2° s'appliquent à tout domaine simplement connexe du plan  $\bar{z}$ .

constante  $\omega$ . Une masse pesante  $m$  glisse sur l'hypoténuse AB et est reliée au point A par un fil élastique, de longueur naturelle  $l$  et dont la tension est proportionnelle à l'allongement ( $T = kx$ ).

1° On suppose qu'à l'instant initial la longueur du fil est  $l$  et la vitesse relative de  $m$  nulle et on demande d'étudier le mouvement.

On peut écrire l'équation du mouvement relatif de  $m$  sur AB en faisant intervenir seulement la force d'inertie d'entraînement, on a immédiatement

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \left( \frac{\omega^2}{2} - \frac{k}{m} \right) x + \frac{1}{2} (\omega^2 l + g\sqrt{2})$$

ou,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = ax + b.$$

L'allure du mouvement dépend du signe de  $a$ .

1°  $a > 0$ ; on a, avec les conditions initiales ( $x_0 = 0, x'_0 = 0$ ),

$$x = \frac{b}{a} (\operatorname{ch} \sqrt{a} t - 1)$$

et le mouvement sur AB a lieu toujours dans le même sens (vers le bas);

2°  $a = 0$ ; on a

$$x = \frac{1}{2} b t^2;$$

3°  $a < 0$ ; en posant alors  $a = -c$ , il vient

$$x = \frac{b}{c} (1 - \cos \sqrt{c} t),$$

le mouvement est oscillatoire autour de la position,

$$x = \frac{b}{c};$$

les limites d'oscillation pour  $x$  étant 0 et  $\frac{2b}{c}$ , la période étant  $\frac{2\pi}{\sqrt{c}}$ . Pour

que la vibration puisse pratiquement avoir lieu, il faut naturellement que  $\frac{2b}{c} \leq m_0 B$ ;

2° Étant donné

$$\omega = 10\pi$$

et le poids de la masse  $m$  égal à  $5^{\text{kg}}$ , on a observé un mouvement relatif de 150 oscillations à la minute. On demande de calculer la constante  $k$  et l'amplitude de l'oscillation, en supposant l'allongement  $x$  exprimé en mètres, la tension  $T$  en kilogrammes et en prenant

$$g = 10 \text{ m/sec}, \quad l = 5^{\text{m}}.$$

La période est

$$\frac{2\pi}{\sqrt{c}} = \frac{2}{5};$$

d'où

$$c = 25\pi^2$$

et

$$c = -a = \frac{10k}{5} - 50\pi^2 = 25\pi^2,$$

d'où

$$k = \frac{75\pi^2}{2} = 369$$

et l'amplitude de l'oscillation est

$$\frac{2b}{c} = \frac{500\pi^2 + 10\sqrt{2}}{25\pi^2}$$

de l'ordre de 20.

### Question C. 76.

[*Mécanique rationnelle, épreuve pratique; énoncé publié en juillet 1926, p. 320.*]

#### SOLUTION

Par R. WEINZAEFFEL.

Un gyroscope est constitué par un disque circulaire de 20<sup>cm</sup> de diamètre, 6<sup>mm</sup> d'épaisseur et par un tore, dont le centre coïncide avec celui du disque, de rayons équatoriaux 10<sup>cm</sup> et 14<sup>cm</sup>. Le point de suspension est à 10<sup>cm</sup> du centre. On demande la période du mouvement de précession, sachant que le gyroscope fait 3000 tours à la minute.

On sait que,  $\psi'$  étant la vitesse angulaire de précession, on a

$$\psi' = \frac{lmg}{C\omega},$$

où  $l$  est la distance du centre de gravité au point de suspension et  $C$  le moment d'inertie par rapport à l'axe.

On a ici, dans le système C. G. S.,

$$l = 10, \quad \omega = \frac{3000}{60} 2\pi = 100\pi,$$

$$m = \pi\rho(60 + 96\pi),$$

$\rho$  désignant la densité. Calculons  $C$ . Pour le cylindre le moment d'inertie est  $3000\pi\rho$ . Pour le tore il vaut

$$m_1 \left( R^2 + \frac{3a^2}{4} \right) = 96\pi^2\rho \left( 12^2 + \frac{3}{4} 2^2 \right) = 96\pi^2\rho 147.$$

Donc :

$$\psi' = \frac{(5 + 8\pi)g}{20\pi[175 + 588\pi]}$$

et la période demandée est

$$T = \frac{2\pi}{\psi'} = 27 \text{ secondes environ.}$$

**Question C.86.**

[Calcul différentiel et intégral, épreuve théorique; énoncé publié en février 1927, p. 62.]

**SOLUTION**

Par R. ODILE.

On donnait la surface réglée (S), non développable engendrée par la droite (D)

$$(D) \quad \begin{cases} x = az + \lambda, \\ y = bz + \mu, \end{cases}$$

où  $a, b, \lambda, \mu$  sont fonctions données d'un paramètre variable. (L) étant la ligne de striction de (S), on demande la condition pour que (L) soit courbe de contact d'un cylindre circonscrit à (S) et parallèle à  $Oz$ .

Soit  $z$  la cote du point central de D, on sait que

$$(1) \quad z = - \frac{a'\lambda' + b'\mu' + (ab' - ba')(a\mu' - b\lambda')}{a'^2 + b'^2 + (ab' - ba')^2},$$

où les accents désignent des dérivées par rapport au paramètre dont dépend D. Le plan tangent en ce point

$$(2) \quad (b'z + \mu')(X - aZ - \lambda) - (a'z + \lambda')(Y - bZ - \mu) = 0$$

doit être vertical, d'où

$$(3) \quad z = \frac{\mu'a - \lambda'b}{a'b - ab'}$$

En égalant les seconds membres de (1) et (3), il y a des réductions évidentes et il reste

$$(a'\mu' - b'\lambda')(aa' + bb') \equiv 0;$$

le premier crochet ne peut être identiquement nul puisque la surface n'est pas développable; reste

$$aa' + bb' \equiv 0;$$

$$a^2 + b^2 + 1 = \text{const.}$$

ou

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} = \cos \alpha = \text{const.},$$

l'angle de (D) avec  $Oz$  doit rester constant; telle est la condition cherchée.

Géométriquement le résultat est évident. Soit le cône directeur de sommet  $O$ , de la surface  $(S)$ . Le plan tangent à ce cône le long de la génératrice  $OG$  parallèle à  $D$  doit être perpendiculaire au plan vertical  $(OG, Oz)$ . Ce plan tangent est en effet parallèle au plan asymptote à  $(S)$  passant par  $D$ , tandis que le plan  $OG, Oz$  est parallèle au plan central supposé vertical. En conséquence le cône directeur est de révolution autour de  $Oz$ .

Si l'on pose  $a^2 + b^2 = c^2$  ( $c = \text{const.}$ ), on pourra écrire

$$a = c \cos \theta, \quad b = c \sin \theta,$$

où  $\theta$  est l'angle du plan central avec le plan  $xOz$ , d'où la nouvelle forme des équations paramétriques de  $(S)$  :

$$(S) \quad \begin{cases} x = cz \cos \theta + \lambda(\theta), \\ y = cz \sin \theta + \mu(\theta). \end{cases}$$

On veut que la ligne de striction  $(L)$  soit ligne de courbure sur  $(S)$ .

Le  $z$  d'un point de  $(L)$  est déterminé par

$$z = \frac{1}{c} (\lambda'(\theta) \sin \theta - \mu'(\theta) \cos \theta).$$

Les paramètres directeurs de la normale à  $S$  en un tel point sont

$$A = \sin \theta, \quad B = -\cos \theta, \quad C = 0,$$

et pour que cette normale engendre une surface développable, il faut que

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ A & B & C \\ dA & dB & dC \end{vmatrix} = dz = 0.$$

Il faut donc, entre  $\lambda$  et  $\mu$ , la relation

$$(4) \quad \lambda'(\theta) \sin \theta - \mu'(\theta) \cos \theta = \text{const.};$$

$L$  sera plane et dans un plan parallèle au plan  $xOy$ .

Ses équations seront :

$$(5) \quad \begin{cases} x = h \cos \theta + \lambda(\theta), \\ y = h \sin \theta + \mu(\theta), \\ z = \frac{h}{c}; \end{cases}$$

il est facile de voir que l'équation de la tangente à  $(L)$  s'écrit dans son plan, en tenant compte de (4),

$$(6) \quad x \sin \theta - y \cos \theta - \lambda(\theta) \sin \theta + \mu(\theta) \cos \theta = 0.$$

Mais toute courbe ( $\Gamma$ ) de ce même plan, quelle qu'elle soit, peut être considérée comme enveloppe d'une droite ( $\Delta$ ),

$$(7) \quad x \sin \theta - y \cos \theta + f(\theta) = 0,$$

$f(\theta)$  fonction absolument quelconque.

Or il est évidemment possible d'identifier ( $\Delta$ ) à la tangente qui a pour équation (6); il suffira de choisir  $\lambda(\theta)$  et  $\mu(\theta)$  de telle sorte que

$$(7) \quad -\lambda(\theta) \sin \theta + \mu(\theta) \cos \theta = f(\theta);$$

en dérivant cette relation et en tenant compte de (4), on obtient une nouvelle relation linéaire en  $\lambda(\theta)$  et  $\mu(\theta)$  :

$$(8) \quad -h - \lambda(\theta) \cos \theta - \mu(\theta) \sin \theta = f'(\theta);$$

les équations (7) et (8) donnent :

$$(9) \quad \begin{cases} \lambda(\theta) = -f(\theta) \sin \theta - [f'(\theta) + h] \cos \theta, \\ \mu(\theta) = f(\theta) \cos \theta - [f'(\theta) + h] \sin \theta; \end{cases}$$

ceci montre que, comme ligne  $L$ , on peut prendre une courbe horizontale ( $\Gamma$ ) entièrement arbitraire; la surface ( $S$ ) correspondante dépend des fonctions  $\lambda(\theta)$  et  $\mu(\theta)$  déterminées par les relations (9).

Autre solution par J. DEVISME et R. WEINZAEFFEL.

### Question C.88.

[*Calcul différentiel et intégral, épreuve théorique; énoncé publié en février 1927, p. 63.*]

#### SOLUTION

Par JACQUES DEVISME.

On donnait une courbe gauche, sur chaque normale principale  $MN$  on portait  $MP = e = \text{const.}$  et par  $P$  on menait une parallèle ( $D$ ) à la tangente  $MT$ . Il s'agissait de trouver la ligne de striction de la surface réglée  $\Sigma$  engendrée par ( $D$ ).

Un point quelconque de  $\Sigma$  s'écrit (avec des notations évidentes)

$$\mu = M + eN + \lambda T,$$

$$d\mu = T ds + e \left( -\frac{T}{\rho} - \frac{B}{\tau} \right) ds + \lambda \frac{N}{\rho} ds + T d\lambda;$$

on en tire

$$T d\mu = ds \left( 1 - \frac{l}{\rho} \right) + d\lambda,$$

$$N d\mu = \frac{\lambda}{\rho}$$

$$B d\mu = -\frac{l}{\tau} ds;$$

d'où la combinaison

$$0 \times T d\mu + \left(-\frac{l}{\tau}\right) N d\mu + \left(\frac{\lambda}{\rho}\right) B d\mu = 0.$$

Le vecteur  $v$  normal à  $\Sigma$  au point  $\mu$  est donc proportionnel à

$$-\frac{l}{\tau} N + \frac{\lambda}{\rho} B;$$

à l'infini sur  $D$  le vecteur est proportionnel à

$$\frac{B}{\rho}.$$

Pour trouver le point central, on écrira que

$$v_0 v_\infty = 0,$$

ce qui s'écrira encore, à un facteur près,

$$\left(-\frac{e}{\tau} N + \frac{\lambda_0}{\rho} B\right) \frac{B}{\rho} = \frac{\lambda_0}{\rho^2} = 0,$$

d'où

$$\lambda_0 = 0.$$

Et la ligne de striction est la courbe lieu du point  $P$ , ce que l'on pouvait prévoir *a priori*. En effet la tangente à cette courbe est normale à  $MP$ , de sorte que le plan tangent en  $P$  à la surface ( $\Sigma$ ) est normal au plan osculateur à la courbe  $C$  en  $M$ ; il en résulte immédiatement que  $P$  est bien le point central de ( $D$ ) sur ( $\Sigma$ ).

Autre solution de R. ODILE et R. WEINZAEFFEL.

## CERTIFICAT DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. On considère l'équation du deuxième degré en  $z$  à coefficients complexes

$$z^2 - 2(1 + it^2)z + (1 - t^4) = 0,$$

$t$  désignant une variable réelle, pouvant prendre toutes les valeurs de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

1° Donner l'expression des deux racines  $z_1(t)$  et  $z_2(t)$  de cette équation sous la forme

$$z_1(t) = x_1(t) + iy_1(t), \quad z_2(t) = x_2(t) + iy_2(t).$$

2° Pour chaque valeur de  $t$  on marque dans le plan complexe

$$z = x + iy,$$

les points  $P_1$  et  $P_2$  représentant  $z_1$  et  $z_2$ ; quand  $t$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ ,  $P_1$  et  $P_2$  décrivent respectivement les courbes  $C_1$  et  $C_2$ ; tracer ces courbes [on pourra d'abord former leurs équations explicites  $y = f(x)$ ].

3° Marquer de même les points  $P_3$  et  $P_4$  correspondant à

$$z_3(t) = \frac{z_1(t) + z_2(t)}{2}, \quad z_4(t) = z_1(t)z_2(t)$$

et tracer les courbes  $C_3$  et  $C_4$  décrites par ces points.

II. Soit  $C$  le centre de courbure correspondant au point  $M$  qui décrit une courbe  $(\gamma)$ .

1° Déterminer l'équation  $y = f(x)$  de  $(\gamma)$  de manière que la projection du vecteur  $\vec{MC}$  sur l'axe  $Oy$  soit égale à une constante donnée  $k$ .

2° Dans la famille de courbes obtenue, déterminer celle qui passe par  $O$  et qui est tangente à  $Ox$ ,

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad y'_0 = 0;$$

indiquer l'allure générale de cette courbe  $(\gamma_0)$ .

3° Sur la courbe  $(\gamma_0)$  on prend comme origine des arcs  $s$  le point  $O$  et un sens tel que  $s$  croisse avec  $x$ . Calculer en fonction de  $x$  :

a. l'arc  $s$ ;

b. l'angle  $\sigma = (\widehat{Ox, MT})$ ,  $\vec{MT}$  désignant la tangente positive;

c. le rayon de courbure  $R$ .

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. Les racines sont

$$z = 1 + it^2 \pm t(1 + i).$$

Les points qui les représentent décrivent la parabole

$$y = x^2 - x.$$

Le point  $P_3$  décrit une partie de la droite

$$x = 1,$$

et le point  $P_4$ , une partie de l'axe  $Ox$ .

II. La courbe  $(\gamma)$  a pour équation

$$y - y_0 = -K \log \cos \frac{x - x_0}{K}.$$



L'arc  $s$  a pour valeur

$$K \log \operatorname{tang} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2K} \right).$$

L'angle  $\sigma$  est  $\frac{x}{K}$ ; le rayon de courbure  $R$  a pour valeur

$$\frac{K}{\cos \frac{x}{K}}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. Étudier la variation et tracer la courbe représentative de la fonction

$$y = \frac{x}{x^2 - 1};$$

décomposer cette fraction en éléments simples et calculer les deux intégrales

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} y \, dx, \quad I_2 = \int_2^{+\infty} y \, dx$$

avec quatre chiffres significatifs.

II. On considère une ellipse d'axes  $AA' = 2a$ ,  $BB' = 2b$ ; soit  $MM'M''M'''$  un rectangle inscrit dans cette ellipse. Donner l'expression du périmètre  $p$  du rectangle en fonction de l'anomalie excentrique

$$t = (\widehat{OA, ON})$$

de son sommet  $M$ . Étudier la variation de  $p$  lorsque  $M$  décrit l'arc  $AB$ ; déterminer si  $p$  passe par un maximum ou un minimum et, dans l'affirmative, donner une construction simple de la position correspondante de  $M$ .

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. La fonction est décroissante. Son intégrale générale est

$$\frac{1}{4} \log \left| \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right|,$$

d'où

$$I_1 = \frac{1}{4} \log \frac{3}{5}; \quad I_2 = \frac{1}{4} \log \frac{3}{5}.$$

II. Le périmètre  $p$  passe par un maximum pour

$$\operatorname{tang} t = \frac{b}{a};$$

ON est alors parallèle à  $A'B$ .

(Lille, novembre 1926.)

**CERTIFICAT DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.**

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I.  $a$  étant une longueur donnée, soit  $S$  la surface d'équation

$$xz^2 + (x - a)(x^2 + y^2 - 2ax) = 0.$$

Elle est coupée par le plan des  $xy$  suivant une circonférence  $\Gamma$  et une droite  $\Delta$  qui se coupent en deux points  $A$  et  $B$ .

1° Montrer que les sections de  $S$  par les plans passant par  $Oz$  sont des circonférences  $C$ . En déduire une définition géométrique de  $S$ .

2° Que devient  $S$  quand on la transforme par une inversion de pôle  $A$  ou  $B$ ? Quand on prend pour pôle d'inversion un point quelconque de  $\Delta$  (sauf  $A$  et  $B$ ) ou un point réel de l'axe  $Oz$  et une puissance d'inversion convenable,  $S$  se transforme en elle-même.

3° Montrer que les lignes de courbure de  $S$  sont les circonférences  $C$  et une autre famille de circonférences ( $C'$ ). Donner une définition géométrique des circonférences ( $C'$ ). Quel est le lieu des centres de courbure principaux de  $S$ ?

4° Les équations  $y = ux$ ,  $z = v(x - a)$  permettent d'obtenir des équations paramétriques de  $S$ . On fait correspondre au point  $(u, v)$  de  $S$  le point d'un plan qui a pour coordonnées  $X = \varphi(u)$ ,  $Y = \psi(v)$ . Déterminer les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  de manière que cette correspondance soit une représentation conforme.

Nota. — A défaut d'une méthode plus simple, on pourra utiliser les coordonnées curvilignes  $u, v$  définies dans la question n° 4 pour la recherche des lignes de courbure de  $S$  (question 3°).

ÉPREUVE PRATIQUE. — II. On donne la congruence de droites

$$\begin{aligned}x &= R \cos \omega \cos \theta - \lambda \sin \omega \sin \theta, \\y &= R \sin \omega \cos \theta + \lambda \cos \omega \sin \theta, \\z &= \lambda \cos \theta;\end{aligned}$$

$R$  étant une longueur donnée,  $\lambda$  le paramètre fixant la position du point courant sur chaque droite,  $\omega$  et  $\theta$  les deux paramètres de la congruence.

1° Déterminer la surface focale de la congruence et préciser sa nature;

2° Déterminer les développables de la congruence, leurs arêtes de rebroussement et les trajectoires orthogonales de ces arêtes;

3° Déterminer le point central et le paramètre de distribution de la génératrice,  $\omega_0, \theta_0$  quand on la considère comme faisant partie de la surface  $\omega = \omega_0$ .

INDICATIONS SUR LA SOLUTION PAR A. MONJALLON. — II. 1° La surface focale est les sphères  $x^2 + y^2 + z^2 \pm 2Rz = 0$ ;

2° Les développables sont définies par  $\pm d\omega = \frac{d\theta}{\cos\theta}$ , leurs arêtes de rebroussement correspondent à  $\lambda = \pm R \cos\theta$ ; elles sont situées sur la surface focale et leurs trajectoires orthogonales correspondent à  $\mp d\omega = \frac{d\theta}{\cos\theta}$ , les signes se correspondant;

3° Le point central est défini par  $\lambda = 0$  et le paramètre de distribution a pour valeur  $k = R \sin\theta$ .

(Rennes, juin 1926.)

---

## CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

---

ÉPREUVE THÉORIQUE. — C.105. — 1° Les surfaces  $S$  d'équation

$$y(z + b) = x(x + a),$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes, vérifient, quelles que soient  $a$  et  $b$ , une équation  $E$  aux dérivées partielles du premier ordre que l'on formera.

2° Trouver la surface  $\Sigma$  intégrale générale de cette équation  $E$ . Montrer que  $\Sigma$  est réglée; que sont les génératrices de  $\Sigma$  vis-à-vis de  $E$ ?

3° Le long de chaque caractéristique de  $E$ ,  $x, y, z, p, q$  satisfont à un système différentiel  $D$  que l'on intégrera complètement en exprimant  $y, z, p, q$  au moyen de  $x$  et de trois constantes arbitraires.

4° On considère la surface réglée définie paramétriquement par les équations

$$x = tz + \varphi(t), \quad y = t^2z + t\varphi(t).$$

Former l'équation des asymptotiques; déterminer  $\varphi$  de sorte que  $z = 0$  donne une asymptotique particulière et intégrer l'équation correspondante.

(Lille, juillet 1926.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. C. 106. — 1° On considère l'équation aux dérivées partielles

$$(E) \quad 2p - q^2 x = 0.$$

Former les équations différentielles des caractéristiques et les intégrer, en mettant en évidence les coordonnées  $x_0, y_0, z_0, p_0, q_0$  de l'élément de contact initial (liées par la relation  $2p_0 - q_0^2 x_0 = 0$ ). Montrer que la courbe  $(x, y, z)$  support de la caractéristique

$$(x, y, z, p, q)$$

est une parabole.

2° Trouver une intégrale complète; en déduire l'intégrale générale.

3° Trouver en se servant des équations des caractéristiques formées au n° 1, l'intégrale de E contenant la courbe

$$z = 0; \quad x^2 + 2y = 0.$$

II. C. 107. On considère les deux équations différentielles

$$(E) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

$$(E_1) \quad z'' - p(x)z' + [q(x) - p'(x)]z = 0.$$

• Montrer qu'une intégrale arbitraire  $y$  de (E) et une intégrale arbitraire  $z$  de (E<sub>1</sub>) sont liées par la relation

$$(A) \quad zy' - z'y + pyz = C,$$

où C est une constante (variable avec le choix des intégrales  $y$  ou  $z$ ).

Déduire de là que si l'on connaît une intégrale particulière  $z$  de E<sub>1</sub>, l'intégrale générale de E s'obtient en intégrant l'équation (A) où C sera laissée indéterminée.

Montrer qu'en réalité on pourra se borner, pour intégrer (A) dans sa généralité, aux deux cas C = 0 et C = 1.

(Lille, novembre 1926.)

## LE PROBLÈME DE LA CUBIQUE LACUNAIRE ;

PAR ANDRÉ BLOCH.

1. Dans le présent article, on verra comment on peut être conduit, par les considérations les plus élémentaires, à se poser, en obtenant même des indications sur sa solution, un problème qui dépasse la puissance actuelle de l'analyse; et l'on aura en même temps un exemple de cette fameuse « arithmétisation des mathématiques », dont on a beaucoup parlé, mais que jusqu'à présent l'on n'a guère fait passer dans le domaine des réalités.

2. Considérons une cubique plane indécomposable et sans point double. Nous allons envisager les courbes unicursales d'ordre  $m$  qu'elle coupe en un seul point (analytique). Une courbe d'ordre  $m$  dépend de  $\frac{m(m+3)}{2}$  paramètres; pour que ses  $3m$  points d'intersection avec la cubique soient confondus, il y a  $3m - 1$  conditions; d'autre part, pour qu'elle soit unicursale, il faut qu'elle ait  $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$  points doubles, qui entraînent autant de conditions. Or :

$$\frac{m(m+3)}{2} - (3m-1) - \frac{(m-1)(m-2)}{2} = 0.$$

Ainsi les courbes cherchées sont en nombre fini pour chaque valeur de l'ordre  $m$ ; nous ne nous arrêtons pas à en calculer le nombre, égal d'ailleurs à 9, comme il est bien connu, pour  $m = 1$ . Nous appellerons ces courbes, pour abrégé, *courbes de type rationnel*.

Cherchons de même les courbes unicursales d'ordre  $m$  rencontrant la cubique en deux points au lieu d'un seul; nous n'avons plus de ce dernier chef que  $3m - 2$  conditions au lieu de  $3m - 1$ . Ainsi les courbes cherchées dépendent d'un paramètre, ou, plus exactement, se répartissent pour chaque valeur de l'ordre  $m$ , en un certain nombre de familles à un paramètre.

Ce nombre est visiblement au moins égal à la partie entière de  $\frac{3m}{2}$ ; mais il la dépasse dès que  $m > 1$ ; en effet, à chaque décomposition  $3m = \alpha + \beta$  correspond bien une seule famille de courbes algébriques coupant la cubique en deux points, si  $\alpha$  et  $\beta$  sont premiers entre eux, mais plus d'une au contraire, d'après le théorème d'Abel, s'ils ne le sont pas. Nous ne cherchons pas ici le nombre de ces familles à un paramètre, il nous suffit de le savoir fini pour chaque valeur de  $m$ . Appelons les courbes unicursales correspondantes *courbes de type elliptique* : chaque famille de courbes de type elliptique contient un nombre fini de courbes de type rationnel.

Par un point générique du plan ne passe pas de courbe de type rationnel, mais passent une infinité dénombrable de courbes de type elliptique (un nombre fini pour chaque famille). Un élément de contact générique du plan (système d'un point et d'une droite passant par ce point) n'appartient à aucune courbe de type elliptique ou rationnel.

Il est vraisemblable que par un point du plan ne peuvent jamais passer qu'un nombre fini de courbes de type rationnel, et il n'est pas impossible que l'on puisse choisir le point en sorte que ce nombre soit aussi grand qu'on veut. Des réflexions analogues s'appliquent à un élément de contact du plan, envisagé par rapport aux courbes de type elliptique.

Nous admettrons que tout point du plan est aussi voisin que l'on veut d'un point d'une courbe de type rationnel; et pareillement que tout élément de contact du plan est aussi voisin que l'on veut d'un élément de contact d'une courbe de type elliptique. Ainsi la question de savoir si un point appartient à une courbe de type rationnel, un élément de contact à une courbe de type elliptique est une question de nature *arithmétique*.

3. Au point de vue de la pure géométrie, joignons maintenant celui de la théorie des fonctions. Considérons les systèmes de fonctions méromorphes dans tout le plan complexe *admettant la cubique lacunaire*, c'est-à-dire tels que, si  $x = f(t)$ ,  $y = g(t)$  sont ces deux fonctions, le point  $(x, y)$  ne coïncide jamais, pour une valeur finie de  $t$ , avec un point à distance finie ou infinie de la cubique. Une courbe de type elliptique est alors représentable

par un système de deux telles fonctions méromorphes, à savoir deux fractions rationnelles en  $e^t$ ; et pour une courbe de type rationnel, on peut prendre simplement deux fractions rationnelles en  $t$ . D'après des théorèmes connus (1), il n'existe pas d'autres courbes *algébriques* uniformisables par des systèmes de fonctions méromorphes admettant la cubique lacunaire.

Considérons un élément de contact quelconque du plan de la cubique formée d'un point  $M(x_0, y_0)$  non situé sur la courbe et d'une droite  $MZ$  passant par ce point. Soient deux fonctions  $x(t)$  et  $y(t)$ , méromorphes dans le cercle-unité  $|t| \leq 1$  admettant la cubique lacunaire, telles que pour  $t = 0$  le point  $(x, y)$  soit en  $M$  et que  $\frac{y'(0)}{x'(0)}$  soit égal au coefficient angulaire de  $MZ$ . Considérons l'expression :

$$x'(0)\bar{x}'(0) + y'(0)\bar{y}'(0),$$

où  $\bar{x}'(0)$  et  $\bar{y}'(0)$  sont les quantités imaginaires conjugués de  $x'(0)$  et  $y'(0)$ .

Si  $x(t)$  et  $y(t)$  sont assujetties à satisfaire à l'équation d'une courbe algébrique déterminée, tangente en  $M$  à  $MZ$ , et non comprises parmi les courbes de type elliptique ou rationnel, s'il en existe, auxquelles appartient cet élément de contact, on sait que l'expression ci-dessus admet un certain maximum fini déterminé par l'intégration de l'équation  $\Delta u = e^u$  sur la surface de Riemann correspondante.

Mais considérons le maximum  $\omega^2$  de la même expression lorsque  $x$  et  $y$  ne sont supposées liées par aucune relation, maximum qui ne dépend que de la cubique et de l'élément de contact donné. Ce maximum est infini lorsque l'élément de contact donné appartient à une courbe de type elliptique ou rationnel; il peut *a priori* être fini ou infini lorsque cela n'a pas lieu; mais si, dans ce dernier cas, il lui arrive d'être infini, nous pouvons être certain, en vertu du principe : *Nihil est in infinito quod non prius fuerit in finito*, qu'il existe un système de deux fonctions méromorphes dans tout le plan complexe, admettant la cubique lacunaire, et *qui ne sont*

---

(1) Voir, par exemple, pour tous renseignements bibliographiques, un fascicule du *Mémorial des Sciences mathématiques : Les fonctions holomorphes et méromorphes dans le cercle-unité*, Paris, 1926 (fascicule XX).

pas liées par une relation algébrique; et si donc nous n'admettons pas la possibilité d'un tel fait, nous sommes conduit à conclure que  $\omega$  est fini lorsque l'élément de contact n'appartient pas à une courbe de type rationnel ou elliptique. Autrement dit :

*Si l'on suppose fixe le point M, mais variable la direction MZ de l'élément de contact issu de M, le nombre  $\omega$  attaché à cet élément est infini quand l'élément appartient à une courbe elliptique, ou rationnel, fini quand cela n'a pas lieu; c'est donc une fonction discontinue du coefficient angulaire de MZ, dépendant essentiellement de la nature arithmétique de ce coefficient.*

C'est, naturellement, ce dernier énoncé qu'il faudra démontrer, pour en déduire ensuite l'impossibilité d'une courbe transcendante uniformisable par des fonctions méromorphes dans tout le plan admettant la cubique lacunaire. On aura fait un grand pas dans la direction de ce théorème lorsqu'on aura démontré le suivant :

*Deux fonctions méromorphes dans tout le plan, admettant la cubique lacunaire et d'ordre inférieur à l'unité, sont nécessairement liées par une relation algébrique, équation d'une courbe de type rationnel.*

Cette dernière proposition pourra d'ailleurs être précisée par une inégalité en termes finis relative à la croissance des fonctions méromorphes dans le cercle-unité, admettant la cubique lacunaire, et possédant pour  $t = 0$  un élément de contact donné n'appartenant à aucune courbe de type rationnel (ou même peut-être simplement telles que le point M correspondant à l'origine ait une position donnée, non située sur une telle courbe); mais n'y insistons pas.

Observons que le fait pour la cubique d'être supposée sans point double joue un rôle essentiel dans ce qui précède; par exemple la cubique unicursale  $y = x^2 + \frac{1}{x}$  est lacunaire pour le système de fonctions entières

$$x = e^{f(t)}, \quad y = e^{2f(t)} + e^{-f(t)} + e^{g(t)},$$

où  $f(t)$  et  $g(t)$  sont des fonctions entières quelconques; les deux



tangentes au point double (la droite de l'infini et la droite  $x = 0$ ) le sont d'ailleurs aussi.

Quant au cas d'une conique lacunaire, il suffit, pour être convaincu qu'il ne peut être considéré avec profit, d'observer que le système de deux fractions rationnelles, indépendantes, de deux variables :

$$x = \frac{u}{uv + 1}, \quad y = \frac{v(uv + 2)}{uv + 1},$$

ne vient sur l'hyperbole  $xy = 1$  pour aucun système de valeurs finies de  $u$  et  $v$ .

4. Passons maintenant à la considération d'une variété présentant une grande analogie avec le plan affecté d'une cubique lacunaire : c'est le plan affecté d'une *courbe du sixième ordre avec l'indice deux*, associé à la surface appelée *plan double sextique*, d'équation

$$z^2 = F_6(x, y),$$

où  $F_6(x, y)$  est un polynôme du sixième degré en  $x$  et  $y$ . Nous supposons que la sextique est à coefficients génériques, c'est-à-dire ne satisfaisant à aucune relation particulière.

Considérons les courbes unicursales d'ordre  $m$  dont les  $6m$  points d'intersection avec la sextique sont confondus deux à deux sur la courbe sécante à l'exception de deux d'entre eux qui sont distincts, autrement dit qui sont  $3m - 1$  fois tangentes à la sextique : leur nombre est fini pour chaque valeur de  $m$ ; ce sont les *courbes de type rationnel*.

De même, les courbes unicursales d'ordre  $m$  qui sont  $3m - 2$  fois tangentes à la sextique se répartissent pour chaque valeur de  $m$  en un nombre fini de familles à un paramètre; ce sont les *courbes de type elliptique*.

Le cylindre droit ayant pour base une courbe de type rationnel coupe la surface dite plan double suivant une courbe unicursale, symétrique par rapport au plan  $xOy$ . Le cylindre droit ayant pour base une courbe de type elliptique la coupe suivant une courbe de genre  $un$ , symétrique par rapport au plan  $xOy$ .

Des considérations géométriques analogues à celles exposées pour le cas de la cubique lacunaire s'appliquent à ces courbes. Et

des théorèmes de théorie des fonctions, selon toute apparence, sont vrais aussi, entièrement semblables à ceux énoncés plus haut. Ils se rattachent au fait certain que les courbes de type elliptique ou rationnel sont les seules courbes algébriques uniformisables par des fonctions méromorphes admettant la sextique avec l'indice deux, et au fait très vraisemblable que, la sextique étant générique, le mot « algébriques » est ici superflu. A tout élément de contact en position générique correspond, de la manière indiquée plus haut, un certain nombre fini  $\omega$ .

5. Nous avons supposé jusqu'ici que la sextique d'indice deux était *générique*, et alors l'analogie est complète avec la cubique lacunaire sans point double. Mais dès que l'on cesse de supposer la sextique générique, de grandes différences se manifestent avec le cas de la cubique.

Tout d'abord il peut exister des courbes unicursales d'ordre  $m$  qui soient  $3m$  fois tangentes à la sextique (il n'y avait aucune propriété analogue pour la cubique). S'il existe une telle courbe, que l'on peut appeler courbe de type *ultra-rationnel*, l'intersection de la surface plan double avec le cylindre droit qui l'a pour base se décompose : elle consiste en deux courbes unicursales, symétriques l'une de l'autre par rapport au plan de la sextique. La condition pour qu'il y ait une telle courbe d'ordre  $m$  dépend de  $m$ . Il est donc bien probable que si l'on ne spécifie pas la valeur de  $m$ , cette condition devient de nature arithmétique, c'est-à-dire que toute sextique est infiniment voisine d'une sextique pour laquelle il existe une pareille courbe, et même un nombre donné aussi grand qu'on veut de pareilles courbes.

Si nous passons au point de vue de la théorie des fonctions, des différences plus importantes encore paraissent devoir se révéler. D'une part, l'existence de points multiples sur la sextique ne semble pas suffisante par elle-même pour entraîner un changement dans les théorèmes qui ont lieu pour la sextique générique, entièrement analogues à ceux énoncés pour la cubique lacunaire sans point double; par exemple, même si la sextique se décompose en six droites en position générique, tout subsiste. Et d'autre part, toute sextique est probablement infiniment voisine d'une sextique telle que le plan double correspondant contienne une courbe

transcendante uniformisable par les fonctions méromorphes; il suffira d'ailleurs qu'il en contienne une seule pour qu'il en contienne une infinité, et même pour qu'à un élément de contact quelconque corresponde un nombre  $\omega$  infini; en général, les conditions pour qu'il en soit ainsi s'obtiendront en exprimant l'existence d'un nombre suffisant de courbes de type ultra-rationnel; la sextique composée de six droites tangentes à une même conique est dans ce dernier cas, car le plan double correspondant s'obtient en projetant d'un de ses points doubles coniques une surface de Kummer; mais nous ne pouvons insister sur cette question, identique à celle de la représentation sur le plan double des surfaces hyperelliptiques de rang deux et de diviseur quelconque. Il résulte en tout cas de ce qui précède qu'au point de vue de la théorie des fonctions les conséquences de la particularisation de la sextique sont le contre-pied de ce qu'elles étaient pour la cubique lacunaire: tandis que pour cette dernière l'existence d'un point double suffisait à entraîner celle de courbes transcendentes uniformisables par des fonctions méromorphes, ici l'existence d'un nombre de points doubles aussi élevé qu'il peut l'être est insuffisante; et inversement, tandis qu'une propriété de nature arithmétique de la cubique ne pouvait aucunement engendrer le même résultat, ici des propriétés de cette nature, en nombre convenable, peuvent suffire à l'entraîner.

On voit aussi que pour le problème de la sextique d'indice deux, que l'on se place au point de vue géométrique ou à celui de la théorie des fonctions, l'« arithmétisation » est encore beaucoup plus caractérisée que pour le problème de la cubique lacunaire.

6. Les plans doubles sextiques constituent la première des familles des *surfaces de genres un*, surfaces découvertes par M. Enriques et se répartissant en une infinité dénombrable de familles, chacune dépendant de 19 modules. Pour chacune de ces familles auront lieu des propositions entièrement analogues aux précédentes, au point de vue géométrique comme à celui de la théorie des fonctions.

Au sujet du problème de la cubique lacunaire, observons encore que la détermination des courbes unicursales coupant la cubique en  $p$  points seulement revient évidemment à celle des

courbes unicursales situées sur une surface du troisième ordre d'équation  $F_3(x, y, z) = 1$ , où  $F_3$  est un polynôme homogène, coupant  $p$  fois seulement le plan de l'infini; ce qui s'applique en particulier aux courbes de type rationnel et elliptique. De même, les systèmes de fonctions méromorphes admettant la cubique lacunaire correspondent aux systèmes de fonctions holomorphes liées par l'équation de la surface. D'ailleurs le problème concernant la surface cubique se pose aussi lorsque son équation n'a pas la forme spéciale ci-dessus, et les résultats semblent devoir être les mêmes.

Terminons en remarquant que le présent article contient bien moins de propositions complètement démontrées que de propositions seulement vraisemblables; mais si une partie de ces dernières se trouvait inexacte, le sujet actuel n'en deviendrait en aucune manière moins intéressant.

---

---

**LES ROULETTES PLANES  
ET L'INTÉGRATION DE CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES;**

PAR R. DELTHEIL.

---

I. Soit une courbe plane (C), qui roule sans glissement sur l'axe  $Ox$ ; un point A invariablement lié à cette courbe décrit une trajectoire ( $\Gamma$ ). La courbe (C) est habituellement nommée *roulante*, la courbe ( $\Gamma$ ) *roulette*. Il y a sans doute peu de chose à dire sur la théorie des roulettes après les travaux de Cesàro et de Haton de la Goupillière; le présent article a pour but d'attirer l'attention des lecteurs des *Nouvelles Annales* sur une catégorie intéressante d'exercices s'y rapportant.

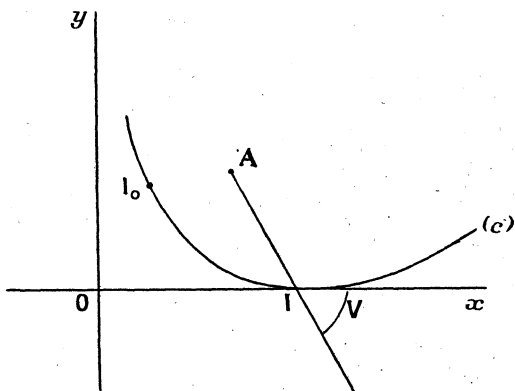
Si nous définissons la roulante en coordonnées polaires, le pôle étant le point A, le roulement sera caractérisé par la relation

$$\xi = s$$

entre l'abscisse  $\xi$  du point de contact I à un moment donné sur  $Ox$  et l'abscisse curviligne  $s$  du même point sur la roulante.

L'application du théorème des projections au contour OIA (fig. 1) nous donne, pour les coordonnées  $x, y$  du point A, les

Fig. 1.



expressions

$$(1) \quad x = s - \rho \cos V, \quad y = \rho \sin V.$$

Dans ces formules,  $V$  désigne l'angle que fait avec  $Ox$ , demi-tangente à la roulante dans le sens des arcs croissants, la direction positive de rayon vecteur sur laquelle le segment AI a pour mesure  $\rho$ . Si  $\theta$  est l'angle polaire correspondant, on a

$$(2) \quad d\rho = \cos V ds, \quad \rho d\theta = \sin V ds, \quad \tan V = \frac{\rho d\theta}{d\rho}.$$

Il résulte immédiatement des relations (1), dans ces conditions, que

$$(3) \quad dx = \sin V d\sigma, \quad dy = \cos V d\sigma, \quad \frac{dy}{dx} = \cot V,$$

où

$$(4) \quad d\sigma = \rho dV + \sin V ds$$

est la mesure de l'élément d'arc de la roulette sur la demi-tangente à cette courbe définie par la valeur  $\theta + \frac{\pi}{2}$  de l'angle polaire autour de A.

Ces résultats étant établis, nous pouvons remplacer le problème de la recherche d'une courbe ( $\Gamma$ ) définie par une

propriété différentielle par celui de la recherche de la courbe (C) correspondante. Il s'agit, pour l'équation différentielle dont dépend la courbe (Γ), d'un changement simultané de variable et de fonction,  $\rho$  fonction de  $\theta$  remplaçant  $y$  fonction de  $x$ . Les formules précédentes permettent de trouver l'équation transformée, en faisant disparaître les variables  $s$ ,  $V$ ,  $\sigma$  si on le désire; mais il y a souvent avantage à conserver tout ou partie de ces variables.

II. L'application de cette méthode aux équations différentielles du type

$$y' = f(y),$$

qu'on sait évidemment intégrer directement par une quadrature, conduit à la génération comme roulettes de nombreuses courbes simples. Le tableau suivant indique, dans cet ordre d'idées, quelques résultats immédiats.

ÉQUATIONS.	ROULETTES (Γ).	ROULANTES (C).
$y' = m$	$y = mx + \lambda$	$\sigma = e^{m(\theta - \theta_0)}$
$y' = \pm \sqrt{\frac{2a - y}{y}}$	Cycloïde de base $Ox$ et de paramètre $a$	Cercle $\rho = 2a \sin(\theta - \theta_0)$
$y' = \pm \sqrt{\frac{y^2 - a^2}{a^2}}$	Chainette de base $Ox$ et de paramètre $a$	Parabole $\rho = \frac{2a}{1 - \cos(\theta - \theta_0)}$
$y' = \frac{\pm y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$	Tractrice de base $Ox$ et de paramètre $a$	Spirale hyperbolique $\rho = \frac{\pm a}{\theta - \theta_0}$

Développons les calculs dans le cas de l'équation

$$yy' + \frac{y}{y'} = a,$$

dont les courbes intégrales possèdent la propriété que la tangente et la normale en un point découpent sur  $Ox$  un segment  $TI$  de mesure constante  $a$ .

De

$$y = \frac{ay'}{1 + y'^2},$$

nous concluons immédiatement

$$\rho = a \cos V;$$

et puisque  $\text{tang } V = \frac{\rho}{d\rho} \frac{d\theta}{d\rho}$ , nous avons

$$d\theta = -\text{tang}^2 V dV.$$

D'où

$$\theta - \theta_0 = V - \text{tang } V.$$

La roulante est la *spirale tractrice*

$$\begin{aligned} \rho &= a \cos t, \\ \theta - \theta_0 &= t - \text{tang } t, \end{aligned}$$

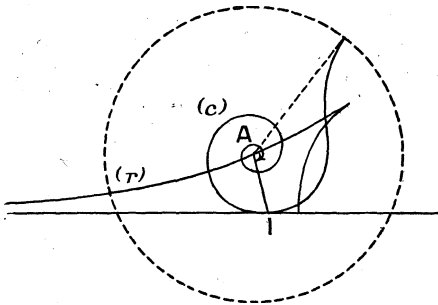
courbe inverse de la développante de cercle dont les équations paramétriques par rapport à des axes AX et AY d'angles polaires

$\theta_0$  et  $\theta_0 + \frac{\pi}{2}$  sont, en posant  $\text{tang } t = u$ ,

$$\begin{aligned} X &= a(\cos u + u \sin u), \\ Y &= a(u \cos u - \sin u). \end{aligned}$$

La figure 2 représente les courbes (C) et (Γ) relatives à ce

Fig. 2.



dernier exemple. Le point de rebroussement de (Γ) est obtenu lorsque vient sur O*x* le point d'inflexion de la spirale tractrice.

III. Soit  $\omega$  le centre de courbure de la roulette en A; la mesure du segment A $\omega$  sur la demi-normale d'angle polaire  $\theta + \pi$  (faisant l'angle  $+\frac{\pi}{2}$  avec la demi-tangente positive) est

$$\frac{d\sigma}{d\alpha}$$

$\alpha$  étant l'angle  $\frac{\pi}{2} - V$  de cette demi-tangente positive avec  $Ox$ .

Sur le rayon vecteur d'angle polaire  $\theta$ , nous avons donc

$$(5) \quad \overline{A\omega} = R = \frac{ds}{dV} = \rho + \sin V \frac{ds}{dV} = \rho \left( 1 + \frac{d\theta}{dV} \right).$$

Du reste, les formules

$$x = s - \rho \cos V, \quad y' = \cot V$$

entraînent

$$(6) \quad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{-dV}{\sin^3 V (\rho dV + \sin V ds)} = \frac{-dV}{\rho \sin^3 V (d\theta + dV)}$$

Les formules (5) et (6) sont équivalentes, et nous pouvons grâce à elles, appliquer aux équations différentielles du second ordre la méthode définie plus haut.

Un problème classique est celui de la recherche des courbes telles que  $\frac{\overline{A\omega}}{AI} = k$  (courbes de Ribaucour); les formules (5) nous montrent que les roulanges correspondantes vérifient la condition

$$1 + \frac{d\theta}{dV} = k,$$

d'où l'on tire

$$V = \frac{\theta - \theta_0}{k - 1},$$

puis

$$\rho = a \sin^{k-1} \frac{\theta - \theta_0}{k - 1}.$$

Ces roulanges sont aussi des courbes classiques, appelées souvent *spirales sinusoides*. Cette correspondance entre les courbes de Ribaucour et les spirales sinusoides paraît avoir été signalée pour la première fois, longtemps avant les travaux de Ribaucour, par Ossian Bonnet, en 1844, dans le *Journal de Liouville*. L'étude des cas particuliers les plus simples permet de retrouver les générations comme roulettes des courbes de Ribaucour familières; nous laissons au lecteur le soin d'en examiner le détail.

La courbe de Ribaucour relative à  $k = 3$  est la roulette décrite



par le point de rebroussement d'une *cardioïde* roulant sur  $Ox$ .  
En prenant

$$\rho = \frac{a}{2}(1 + \cos \theta)$$

pour équation polaire de cette cardioïde, le sommet étant origine des arcs, nous avons

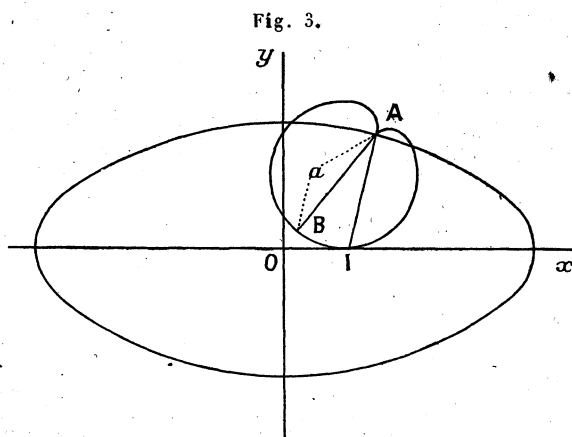
$$s = 4R \sin \frac{\theta}{2}, \quad V = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2},$$

d'où

$$x = a \left( 3 \sin \frac{\theta}{2} - \sin^3 \frac{\theta}{2} \right),$$

$$y = a \cos^3 \frac{\theta}{2}.$$

La figure 3 représente les courbes (C) et ( $\Gamma$ ); celle-ci admet les



mêmes sommets que l'ellipse  $x^2 + 4y^2 = 4a^2$ , mais elle est tout entière intérieure à cette ellipse.

IV. Cherchons enfin les roulanges (C) telles que ( $\Gamma$ ) vérifie l'équation

$$\frac{1}{AI} + \frac{1}{A\omega} = \frac{1}{a},$$

c'est-à-dire soit susceptible d'engendrer, en tournant autour de  $Ox$ , une surface à courbure moyenne constante. Ces surfaces,

étudiées notamment par M. Lindelöf, jouent un rôle fondamental dans la théorie de la capillarité.

Puisque

$$R = \rho \left( 1 + \frac{d\theta}{dV} \right),$$

la courbe (C) doit vérifier l'équation

$$\frac{d\theta}{dV} = \frac{2a - \rho}{\rho - a}$$

qui se ramène, en posant  $\frac{d\rho}{d\theta} = \rho'$ ,  $\frac{d^2\rho}{d\theta^2} = \rho''$ , à la forme

$$\frac{\rho^2 + \rho'^2}{\rho'^2 - \rho\rho''} = \frac{2a - \rho}{\rho - a}.$$

Or, cette équation du second ordre est la même que celle obtenue dans l'étude du mouvement des planètes, si l'on veut caractériser en coordonnées polaires toutes les trajectoires répondant à une valeur donnée de la constante des forces vives.

Éliminant en effet le temps entre les équations fondamentales des aires et des forces vives

$$\rho^2 = \frac{2\mu}{\rho} + h, \quad \rho^2 \frac{d\theta}{dt} = C,$$

nous avons l'équation

$$C^2(\rho^2 + \rho'^2) = 2\mu\rho^3 + h\rho^4;$$

en égalant les dérivées logarithmiques des deux membres par rapport à  $\theta$ , et posant  $a = \frac{\mu}{h}$ , nous avons pour caractériser les trajectoires envisagées l'équation

$$\frac{\rho^2 + \rho\rho''}{\rho'^2 + \rho'^2} = \frac{3a - 2\rho}{2a - \rho},$$

qui se ramène immédiatement à celle des courbes (C) cherchées. Les résultats élémentaires de la théorie du mouvement newtonien nous permettent d'écrire tout de suite l'équation polaire générale de ces courbes,

$$\rho = \frac{a^2 - \lambda^2}{a + \lambda \cos(\theta - \theta_0)}.$$

Ce sont toutes les coniques de foyer A et d'axe focal  $2a$ . Ainsi les lignes ( $\Gamma$ ) sont les trajectoires d'un foyer d'une telle conique roulant sur une droite; M. Lindelöf les appelle *chaînettes* elliptique ou hyperbolique, la chaînette parabolique étant la chaînette proprement dite, qui correspond à une valeur infinie de  $a$  et est engendrée par le foyer d'une parabole roulant sur une droite. Les trois surfaces de révolution à courbure moyenne constante qui correspondent ainsi à l'ellipse, l'hyperbole et la parabole, sont appelées *onduloïde*, *nodoïde* et *caténoïde*.

---

---

### SUR UNE GÉNÉRALISATION DES CAUSTIQUES PAR RÉFRACTION;

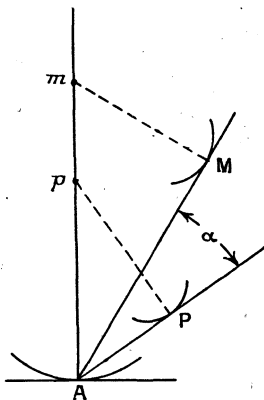
PAR L. BICKART.

---

Le physicien Cornu a donné la construction du point où un rayon réfracté touche son enveloppe, connaissant le point où le rayon incident touche la sienne. Je vais résoudre le problème plus général suivant :

*On considère sur une courbe (A) donnée dans le plan un*

Fig. 1.



*point A quelconque où se rencontrent deux droites mobiles AP, AQ, faisant respectivement avec la normale en A les angles  $i$*

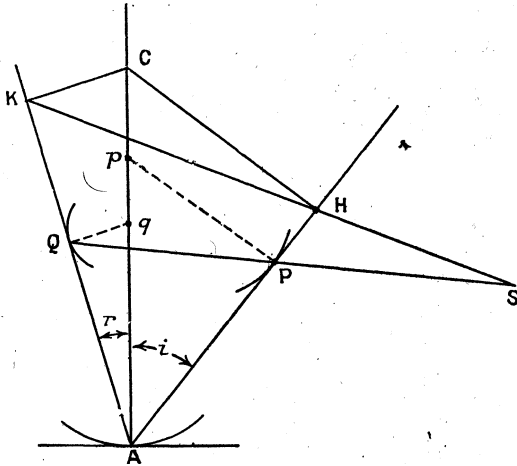
et  $r$ . Ces angles étant liés par une relation connue  $f(i, r) = 0$  trouver le point où l'une des droites mobiles touche son enveloppe connaissant le point où l'autre droite touche la sienne.

1° *Rappel de formule (fig. 1).* — Si deux droites se coupent en A sous l'angle  $\alpha$ , soient M et P les points où elles touchent respectivement leurs enveloppes. Les normales à ces droites, en M et P rencontrent la normale en A aux points  $m$  et  $p$ . Si  $ds$  est l'élément d'arc en A sur la courbe (A) on a

$$(1) \quad d\alpha = \left( \frac{1}{Ap} - \frac{1}{Am} \right) ds.$$

2° *Corollaire.* — Si AM se confond avec la normale en A à (A) les points M et  $m$  viennent se confondre au centre de cour-

Fig. 2.



bure C de (A) en A. Soit  $R = AC$  le rayon de courbure (fig. 2). Si l'on appelle  $i$  l'angle de AP avec la normale AC, on aura

$$di = \left( \frac{1}{Ap} - \frac{1}{R} \right) ds.$$

3° Projetons C en H sur AP, et soit  $dt$  l'angle de contingence en A; on a

$$di = \frac{ds}{R} \left( \frac{R}{Ap} - 1 \right) = \left( \frac{AH}{AP} - 1 \right) dt.$$

Projetons de même C en K sur AQ et soit Q le point où AQ touche son enveloppe. On aura aussi

$$dr = \left( \frac{AK}{AQ} - 1 \right) dt.$$

Entre les deux équations qui donnent  $di$  et  $dr$  éliminons  $dt$ ; il vient

$$(2) \quad \left( \frac{AH}{AP} - 1 \right) dr = \left( \frac{AK}{AQ} - 1 \right) di.$$

Appelons S le point où PQ rencontre HK et soit  $\frac{SH}{SK} = m$ . On a, en introduisant la notation vectorielle,

$$\vec{AS} = \frac{\vec{AH} - m\vec{AK}}{1 - m} = \frac{\vec{AP} - \lambda\vec{AQ}}{1 - \lambda}.$$

En identifiant les composantes dirigées suivant AP, AQ il vient

$$\begin{aligned} \frac{AH}{1 - m} &= \frac{AP}{1 - \lambda}, & \text{d'où} & \quad \frac{AH}{AP} - 1 = \frac{\lambda - m}{1 - \lambda}, \\ m \frac{AK}{1 - m} &= \lambda \frac{AQ}{1 - \lambda}, & \text{d'où} & \quad \frac{AK}{AQ} - 1 = \frac{1}{m} \frac{\lambda - m}{1 - \lambda}, \end{aligned}$$

d'où en portant dans l'équation (2) et après réduction

$$m = \frac{di}{dr}.$$

Telle est la relation que je voulais établir et d'où résulte la construction :

*Projeter le centre de courbure C de la courbe (A) en H et K sur les deux droites mobiles. Construire sur HK le point S qui divise  $\overline{HK}$  dans le rapport  $\frac{di}{dr}$ . La droite qui joint les contacts de AP, AQ avec leurs enveloppes passe au point S.*

*Cas particulier.* — Si le centre de courbure C est à l'infini la construction se modifie comme suit :

Prendre sur la normale en A un point C quelconque et construire S comme ci-dessus. La droite PQ sera parallèle à AS.

*Applications diverses.* — Je me borne à énoncer quelques résultats faciles à vérifier :



## BIBLIOGRAPHIE.

COURS D'ANALYSE PROFESSÉ A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, tome premier,  
par *J. Hadamard*, Membre de l'Institut. 1 vol. grand in-8  
de xxxii + 624 pages. Paris, J. Hermann, 1927.

Qu'un livre de M. Hadamard abonde en vues ingénieuses et profondes, il est presque impertinent de le signaler.

L'auteur fait connaître qu'il n'a pas voulu écrire un *traité* d'Analyse proprement dit, mais qu'il a reproduit à peu près exactement son cours de l'École Polytechnique. La tradition de cette Ecole veut que l'enseignement y soit élevé, conforme aux idées directrices de la science contemporaine. D'autre part, cet enseignement s'adresse à de futurs ingénieurs qui auront surtout à traiter des problèmes concrets et que certains développements excessivement théoriques n'intéresseraient que médiocrement. La notion d'intégrale fondée sur l'intuition géométrique de l'aire, ce serait trop peu. L'intégrale de Lebesgue, ce serait trop. Tout en satisfaisant le désir moderne de rigueur et de généralité, M. Hadamard ne perd jamais de vue l'application ultérieure de ce qu'il enseigne à la Mécanique et à la Physique.

Ses auditeurs ont acquis en Mathématiques spéciales des connaissances assez étendues déjà, et M. Hadamard n'a pas à revenir, si ce n'est pour donner quelques indications complémentaires, sur les premières notions de calcul infinitésimal, sur les propriétés fondamentales des séries, sur les quadratures élémentaires, etc.

Ce qui est nouveau pour ces jeunes gens, c'est la définition rigoureuse de l'intégrale, ce sont les intégrales curvilignes, multiples, eulériennes, les séries trigonométriques. Viennent ensuite les applications géométriques du calcul différentiel et des intégrales multiples (aire d'une surface, intégrales de surface, formules d'Ostrogradski, de Stokes), et enfin les règles de calcul élémentaires relatives aux équations différentielles.

La place me fait malheureusement défaut pour un commentaire plus détaillé. Je dois me contenter de dire, trop sommairement, qu'en ouvrant le livre au hasard, les plus instruits trouveront presque toujours à y glaner quelque chose d'instructif. Il faut cependant mentionner, comme témoignage des préoccupations pratiques de l'Auteur, l'étude approfondie du calcul numérique des intégrales définies, celle des champs de vecteurs, indispensable aux physiciens. D'un ordre plus abstrait sont les belles Notes consacrées à la sommation par moyennes, à l'approximation des fonctions continues par des polynômes, à la géométrie vectorielle affine.

R. B.

EXERCICES DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL, T. I : RÉSUMÉ THÉORIQUE ET ÉNONCÉS D'EXERCICES par l'Abbé Potron. 1 vol. gr. in-8, de XVIII + 332 pages. Paris, J. Hermann, 1926.

Voici un remarquable recueil d'exercices d'Analyse.

Il se distingue de beaucoup d'Ouvrages similaires par les résumés substantiels qui précèdent chaque série de problèmes. Ce n'est pas une compilation, c'est un livre soigneusement et patiemment ordonné. Comme la division de la doctrine est poussée loin, l'étudiant qu'arrête telle difficulté trouvera sans peine les applications les plus propres à lever ses doutes.

L'Ouvrage s'étend à toutes les parties d'un cours ordinaire de calcul différentiel et intégral : dérivées, différentielles, applications géométriques, quadratures, intégrales multiples, équations différentielles, équations aux dérivées partielles, fonctions analytiques, séries trigonométriques, calcul des variations.

La rédaction est d'une concision élégante et un système développé d'abréviations a permis à l'Auteur de condenser beaucoup de matière en un nombre de pages relativement restreint.

Le présent Volume ne contient, comme le titre le signale, que les énoncés des exercices. Les solutions sont réservées pour un tome II qui paraîtra sans doute prochainement.

R. B.

---

### QUESTIONS PROPOSÉES ;

PAR A. LABROUSSE.

---

2500. On pose  $P_n + iQ_n = (x + iy)^n$ ,  $P_n$  et  $Q_n$  étant des polynomes en  $x$  et  $y$  à coefficients réels. Montrer que l'aire de la portion de surface du cylindre droit  $x^2 + y^2 - R^2 = 0$  comprise entre le plan  $z = 0$  et la surface d'équation

$$z = A_0 + \sum_1^n (A_k P_k + B_k Q_k)$$

reste constante lorsque les coefficients  $A_k$  et  $B_k$  varient.

Il en est de même pour le volume  $V$  compris entre le cylindre, le plan  $z = 0$  et la surface  $S$ .

Trouver à quelles conditions le centre de gravité du volume  $V$  supposé homogène reste fixe lorsque les coefficients  $A_k$  et  $B_k$  varient.



**2501.** Les contours apparents d'un ellipsoïde sur les faces d'un trièdre trirectangle sont trois ellipses.

Montrer que lorsque l'orientation du trièdre varie la somme des carrés des aires de ces ellipses reste constante, ainsi que la somme des aires de leurs cercles orthoptiques.

**2502.** Si un plan  $\Pi$  coupe une biquadratique gauche en quatre points situés sur un cercle, il en est de même de tout plan parallèle au plan  $\Pi$ . Quelle est l'enveloppe des plans  $\Pi$  passant par un point donné?

**2503.** Si un plan  $\Pi$  coupe une biquadratique gauche en quatre points formant un groupe orthocentrique (chaque point orthocentre du triangle déterminé par les trois autres), il en est de même de tout plan parallèle au plan  $\Pi$ .

Quelle est l'enveloppe des plans  $\Pi$  passant par un point donné?

**2504.** Les courbes gauches dont la longueur d'arc est invariante par une homographie conservant le plan de l'infini ont aussi leur torsion invariante dans une autre homographie de même type.

**2505.**  $x$  et  $y$  désignant deux variables réelles établir les relations

$$\sum_1^{\infty} \text{Log} \left( \cos^2 \frac{x}{2^n} + \text{Sh}^2 \frac{y}{2^n} \right) = \text{Log} \frac{\sin^2 x + \text{Sh}^2 y}{x^2 + y^2}$$

$$\sum_1^{\infty} \text{Arc tang} \left( \text{tang} \frac{x}{2^n} \text{Th} \frac{y}{2^n} \right) = \text{Arc tang} \frac{y \text{ tang } x - x \text{ Th } y}{x \text{ tang } x - y \text{ Th } y}$$

**2506.** Pour que la perpendiculaire commune à une droite  $\Delta$  et aux génératrices  $G$  de même système d'un hyperboloïde à une nappe ( $H$ ) décrive un cylindroïde il faut et il suffit que  $\Delta$  soit un axe de symétrie de  $H$  ou située dans le plan central d'une génératrice  $G$  déterminée et parallèle à cette génératrice.

**2507.** Pour que les droites rencontrant normalement une droite  $\Delta$  et touchant une quadrique  $Q$  engendrent un cylindroïde, il faut et il suffit que  $Q$  soit ou un parabolôïde de révolution d'axe parallèle à  $\Delta$ , ou un cône coupé par les plans normaux à  $\Delta$  suivant des paraboles dont les foyers décrivent une parallèle à  $\Delta$ .

**2508.** Soit  $S$  une conique fixe inscrite dans un triangle  $ABC$ . Les coniques  $\Sigma$  circonscrites au triangle  $ABC$  et tangentes à  $S$  coupent  $S$  en deux points  $MM'$  autres que le point de contact. Démontrer que la correspondance ( $MM'$ ) sur la conique  $S$  se décompose en quatre involutions.

**CERTIFICAT DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.**

**ÉPREUVE THÉORIQUE.** — On donne la surface de révolution  $\Sigma$  qui a pour équations paramétriques

$$x = \sin t \cos \omega, \quad y = \sin t \sin \omega, \quad z = \cos t + \log \operatorname{tang} \frac{t}{2}.$$

1° Calculer les cosinus directeurs de la normale à  $\Sigma$ , les rayons de courbure principaux, l'angle sous lequel les lignes asymptotiques coupent les méridiens, la courbure géodésique des parallèles et la courbure totale. Déterminer les lignes asymptotiques.

2° Déterminer les lignes géodésiques de  $\Sigma$ .

3° Par chaque point  $M(t, \omega)$  de  $\Sigma$  on mène les deux tangentes à  $\Sigma$  qui font avec le méridien de  $M$  un angle  $\theta$  tel que

$$\sin t \sin \theta = \sin t_0,$$

$t_0$  étant une constante donnée. Montrer que ces droites forment une congruence de normales.

Parmi les arêtes de rebroussement des développables de cette congruence, il y en a qui sont sur  $\Sigma$ , que peut-on en dire?

4° Calculer la courbure totale de la surface  $\Sigma_1$  d'équations paramétriques

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = v + f(u).$$

Former une équation différentielle à laquelle doit satisfaire la fonction  $f(u)$  pour que  $\Sigma_1$  soit applicable sur  $\Sigma$ . Suffit-il que  $f(u)$  soit une intégrale de cette équation différentielle pour que  $\Sigma_1$  soit applicable sur  $\Sigma$ ?

**ÉPREUVE PRATIQUE.** — Par chaque point  $P(t)$  de l'hélice circulaire (C)

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t,$$

on mène dans le plan rectifiant de C une droite  $\Delta$  faisant un angle constant avec  $Oz$ . On suppose  $\Delta$  orientée de manière que, dans le plan rectifiant de C, la demi-droite positive  $\Delta$  et la demi-tangente à C dans le sens des  $t$  croissants, soient du même côté de la parallèle à  $Oz$  menée par  $P$ , et l'on désignera par  $\varphi$  l'angle constant, compris entre  $O$  et  $\pi$ , des directions positives de  $\Delta$  et de  $Oz$ . On fixe la position d'un point  $M$  quelconque de  $\Delta$  par  $\overline{PM} = \rho$ . Soit  $S$  la surface lieu des droites  $\Delta$ .

Calculer les cosinus directeurs de  $\Delta$ . Calculer les coordonnées de M en fonction de  $t$ ,  $\rho$  et  $\varphi$ .

Calculer les coefficients du plan tangent à S au point M( $t$ ,  $\rho$ ). Déterminer pour chaque droite  $\Delta$  le plan asymptote, le plan central, le point central et le paramètre de distribution. Déterminer les arêtes de rebroussement des développables enveloppées par les plans asymptotes et les plans centraux.

Déterminer les trajectoires orthogonales des droites  $\Delta$ . Par chaque point ( $t$ ,  $\rho$ ) de S il passe une de ces trajectoires orthogonales; déterminer son centre de courbure géodésique en ce point.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION, PAR A. MONJALON. — I. La surface  $\Sigma$  proposée est la pseudosphère, la méridienne est une tractrice. On obtient facilement par un calcul classique les cosinus directeurs de la normale à  $\Sigma$ ,

$$\lambda = \cos t \cos \omega, \quad \mu = \cos t \sin \omega, \quad \nu = -\sin t,$$

les rayons de courbure principaux sont, calculés d'après les formules d'Olinde Rodrigues,

$$R_1 = -\cot t, \quad R_2 = \tan t,$$

ce sont  $R_1$  rayon de courbure de la méridienne,  $R_2$  rayon de courbure correspondant au parallèle.

On trouve ensuite que les angles des asymptotiques avec les méridiens sont  $+t$  et  $-t$ . La courbure géodésique des parallèles est 1, longueur de la tangente au méridien et la courbure totale est  $\frac{1}{R_1 R_2} = -1$ , elle est constante et négative.

Les lignes asymptotiques ont pour équation différentielle  $d\omega = \pm \frac{dt}{\sin t}$ , d'où en intégrant,

$$\tan \frac{t}{2} = e^{\pm\omega+c}.$$

2° Les lignes géodésiques de  $\Sigma$  se déterminent facilement au moyen de l'équation de Clairaut  $r \sin \theta = \text{const.}$ ,  $r$  rayon du parallèle,  $\theta$  angle avec le méridien, ce sont les courbes satisfaisant à

$$\sin t \sin \theta = \sin t_0 \quad (t_0 \text{ constante arbitraire}).$$

3° Les lignes envisagées étant des géodésiques de  $\Sigma$ , leurs tangentes forment une congruence de normales, les arêtes de rebroussement des développables de cette congruence sont géodésiques de  $\Sigma$ .

4° La courbure totale de la surface  $\Sigma_1$  est

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{u^3 f' f'' - 1}{[u^2 f'^2 + u^2 + 1]^2}.$$

Pour que  $\Sigma_1$  soit applicable sur  $\Sigma$ , il faut qu'elle ait même courbure

totale

$$u^3 f' f'' - 1 = - [u^2 f'^2 + u^2 + 1]^2$$

ou

$$u^3 f' f'' + u^4 f'^4 + 2 u^2 (u^2 + 1) f'^2 + u^3 (u^2 + 2) = 0,$$

condition d'ailleurs suffisante.

II. Le plan rectifiant de l'hélice étant tangent au cylindre, les cosinus directeurs de  $\Delta$  sont  $-\sin t \sin \varphi$ ,  $\cos t \sin \varphi$  et  $\cos \varphi$  et les coordonnées de M sont

$$x = -\rho \sin t \sin \varphi + \cos t, \quad y = \rho \cos t \sin \varphi + \sin t, \quad z = \rho \cos \varphi + t.$$

Les coefficients du plan tangent à S en M ( $t, \rho$ ) sont

$$\begin{aligned} & \cos t (\sin \varphi - \cos \varphi) + \rho \sin t \sin \varphi \cos \varphi, \\ & \sin t (\sin \varphi - \cos \varphi) - \rho \cos t \sin \varphi \cos \varphi, \\ & \rho \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

Les coefficients du plan asymptote sont alors

$$\sin t \sin \varphi \cos \varphi, \quad -\cos t \sin \varphi \cos \varphi, \quad \sin^2 \varphi.$$

Le point central correspond à  $\rho = 0$ , les coefficients du plan central sont alors  $\cos t (\sin \varphi - \cos \varphi)$ ,  $\sin t (\sin \varphi - \cos \varphi)$ , 0. Le paramètre de distribution est  $K = \cot. \varphi - 1$ . L'hélice donnée est la ligne de striction de la surface S. L'arête de rebroussement de l'enveloppe des plans asymptotes est l'hélice circulaire

$$x = \tan \varphi \cos t, \quad y = \tan \varphi \sin t, \quad z = t.$$

L'enveloppe des plans centraux étant le cylindre  $x^2 + y^2 = 1$ , l'arête de rebroussement est rejetée à l'infini vers OZ. Les trajectoires orthogonales des génératrices sont définies par  $\rho = (\sin \varphi + \cos \varphi)t$ . Le centre de courbure géodésique est le point défini par  $\rho \times \rho' = -K^2$ . K paramètre de distribution.

(Rennes, novembre 1926.)

### CERTIFICAT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Un anneau AB semi-circulaire, de section constante, est articulé à ses deux extrémités A, B sur deux axes horizontaux, fixes, de même niveau, et perpendiculaires au plan de l'anneau. Un système de serrage permet au besoin d'empêcher toute rotation aux articulations.*

1° Les articulations étant serrées au repos, on applique une charge P verticale au sommet C de l'anneau. Déterminer les réactions des appuis et le fléchissement de l'anneau à son sommet.

2° Les articulations sont libérées, de sorte que tout frottement devienne négligeable, mais l'on ne touche pas la charge P. Déterminer les nouvelles réactions des appuis, ce que devient le fléchissement au sommet, l'angle dont tournent les axes, ainsi que les courbures de l'anneau à ses extrémités et à son sommet.

3° On serre de nouveau les articulations dans ce nouvel état de déformation, puis on supprime la charge P. De combien se déplace le sommet de l'anneau ?

N. B. — L'anneau est supposé de poids négligeable par rapport à P, et sa section normale est assez faible pour qu'on puisse négliger, devant son aire, son moment d'inertie par rapport à la normale au plan de l'anneau passant par son centre de gravité.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — 1° Les réactions d'encastrement en A et B ont même composante horizontale H, même composante verticale  $\frac{P}{2}$ , les couples d'encastrement ont la même valeur  $\Gamma$ , et l'on a

$$H = P \frac{4 - \pi}{\pi^2 - 8}, \quad \Gamma = \alpha P \frac{\pi^2 - 2\pi - 4}{2(\pi^2 - 8)}.$$

Le fléchissement au sommet a la valeur

$$\zeta = \frac{P\alpha^3}{EI} \frac{\pi^3 - 20\pi + 32}{8(\pi^2 - 8)}.$$

2° Dans ce cas  $\Gamma$  est nul, et l'on a pour la composante H, pour le fléchissement  $\zeta$ , et pour l'angle  $\varphi$  dont tournent les extrémités de l'arc les valeurs

$$H = \frac{P}{\pi}, \quad \zeta = \frac{P\alpha^3}{EI} \frac{3\pi^2 - 8\pi - 4}{8\pi}, \quad \varphi = \frac{P\alpha^3}{EI} \frac{4 + 2\pi - \pi^2}{4\pi}.$$

En B, M étant nul, le rayon de courbure conserve sa valeur  $\alpha$ ; au sommet C, la formule d'Euler donne

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha P}{EI} \frac{\pi - 2}{2\pi}.$$

3° Dans le premier problème le sommet C descend en C'; dans le second, il descend en C''.

Dans le troisième, il rencontre en C''', et, en raison de la nature linéaire de la loi de Hooke, on a

$$C''C''' = C'C = \frac{P\alpha^3}{EI} \frac{\pi^3 - 20\pi + 32}{8(\pi^2 - 8)}.$$

**ÉPREUVE PRATIQUE.** — *Trois poutres rectangulaires identiques sont liées entre elles par une articulation sans frottement O (cette articulation consiste par exemple en un triangle de côtés négligeables, autour de chacun desquels peut tourner librement l'une des poutres).*

*Les poutres OA, OB sont encastrées horizontalement à leurs extrémités A, B, et OC repose en C sur un appui fixe, les deux encastresments et l'appui sont au même niveau.*

*Dans ces conditions, une charge P est répartie uniformément sur l'une de ces trois poutres; une charge égale est concentrée dans la section médiane de chacune des deux autres poutres.*

*Pour quelle répartition des trois charges P l'articulation O subit-elle un fléchissement minimum? Calculer le minimum.*

*Données : Longueur l des trois poutres, 1<sup>m</sup>; largeur, 10<sup>cm</sup>; épaisseur, 1<sup>cm</sup>; coefficient E d'élasticité, 15000 kg/mm<sup>2</sup>.*

$$P = 15^{\text{kg}}.$$

*N. B. On néglige le poids propre des poutres et l'influence des efforts tranchants.*

**INDICATIONS SUR LA SOLUTION.** — Supposons que la poutre AO supporte la charge répartie. Les poutres AO et BO supportent en O de la part de CO des réactions

$$Q = u \frac{P}{2}, \quad Q' = (1 - u) \frac{P}{2}.$$

Le fléchissement  $\zeta$  en O de la poutre OA est donné par

$$EI\zeta = \frac{Pl^3}{24}(4u + 3).$$

Le fléchissement  $\zeta$  de la poutre OB, égal au précédent, est donné par

$$EI\zeta = \frac{Pl^3}{48}(13 - 8u).$$

Il en résulte

$$u = \frac{7}{16}.$$

Supposons maintenant que la poutre OC supporte la charge répartie. Le fléchissement  $\zeta$  est alors donné par

$$EI\zeta = \frac{3Pl^3}{16}.$$

Ce fléchissement est moindre qu'avec la première répartition.

*Calcul numérique :  $\zeta = 2^{\text{cm}}, 2.$*

(Lille, novembre 1926.)

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE — C. 108. — 1° Former l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y + 4 \sin 2x = 0.$$

2° Trouver une courbe intégrale tangente, à l'origine, à la droite  $y = x$ .

3° Déterminer tous les points de contact de cette courbe  $y = x \cos 2x$  avec les deux bissectrices des angles des axes.

4° Calculer l'aire limitée par l'une de ces bissectrices et l'arc de courbe compris entre deux points de contact consécutifs.

5° Déterminer le rayon de courbure en chacun de ces points de contact.

6° Montrer que les centres de courbure en ces points sont sur une hyperbole.

ÉPREUVE PRATIQUE. — C. 109. — Le plan est rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires  $Ox, Oy$ .

Un point  $A$  décrit l'axe  $Ox$  d'un mouvement uniforme, avec une vitesse égale à l'unité (système C. G. S.); il se trouve en  $O$  à l'instant zéro.

Un point matériel  $M$ , de masse égale à  $1^g$ , assujéti à se mouvoir dans le plan  $xOy$ , est soumis à la force représentée par le vecteur  $\vec{MA}$ . A l'instant zéro le point  $M$  se trouve sur la demi-droite  $Oy$ , à une distance de  $O$  égale à  $1^{cm}$  et sa vitesse est nulle.

1° Étudier le mouvement du point  $M$ , et construire sa trajectoire.

2° Évaluer en fonction du temps le rayon de courbure de cette trajectoire.

(Marseille, novembre 1926.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Intégrer

$$y'' + y'(\tan x - 2) + y(1 - \tan x) = 0$$

en posant  $y = e^x z$ .

II. Calculer

$$\iint e^x e^{y(1-x-y)} dx dy$$

étendue au triangle délimité par les axes et la droite  $x + y = 1$ .

C. 110. — III. Soient  $O$  le pôle,  $Ox$  l'axe polaire,  $M$  un point d'une courbe  $C$ ,  $P$  le point où la normale en  $M$  à  $C$  coupe la perpendiculaire en  $O$  à  $OM$ ,  $\gamma$  la courbe décrite par  $P$  et  $Q$ , le point où la normale en  $P$  à  $\gamma$  rencontre la droite  $OM$ . Construire l'une des courbes  $C$  telles qu'on ait  $g\overline{OQ} = \overline{OM}$ . — Revenant en cartésiennes, montrer que cette courbe est unicursale. Que devient son équation quand on prend l'origine au point double réel et l'axe de symétrie pour axe  $Ox$ ? Revenant aux coordonnées polaires dans ce nouveau système d'axes, définir géométriquement  $C$ .

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° Développer la fonction  $y = \text{Arc tang} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$  suivant les puissances croissantes de  $x$ . Le développement obtenu est-il toujours valable?

2° Construire la courbe  $y = e^{\frac{x}{1-x^2}}$ . Asymptotes. Tangentes aux points situés sur les axes. Sens de la concavité.

(Poitiers, novembre 1926).

---

## CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

---

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Un plan  $P$  tourne uniformément autour de la verticale  $Oz$ , située dans ce plan. Une tige rectiligne, rigide, homogène et pesante  $AB$  est astreinte à se mouvoir dans le plan  $P$  et son extrémité  $A$  à glisser sur l'horizontale  $Ou$  du plan  $P$ . Les liaisons sont bilatérales et sans frottement.

NOTATIONS. —  $2l$  longueur de la barre;  $G$  centre de gravité de cette barre;  $u = \text{proj}_{Ou} \overrightarrow{OG}$ ;  $\theta = \widehat{Oz, AB}$  (sens positif de  $Oz$  vers  $Ou$ ).

a. Sous quelle forme est-il permis d'appliquer ici l'intégrale des forces vives (raisonnement direct, sur l'exemple proposé).

b. Déterminer  $u$  et  $\theta$  en fonction de  $t$ . Caractères du mouvement.

II. a. Traduire analytiquement le non-glissement d'un cerceau sur un plan horizontal fixe. Cette condition sera réalisée dans la suite de l'énoncé.

b. Quelle est la direction de la vitesse du centre du cerceau, quand son plan conserve une inclinaison constante? Cette condition sera également remplie dans ce qui suit.

c. Le bord du cerceau est en fin astreint à s'appuyer sur une verticale fixe. Montrer que son centre décrit généralement un hypocycloïde, exceptionnellement une circonférence. Retrouver géométriquement ces



*résultats, en étudiant le mouvement dans son plan de l'ellipse, projection horizontale du cerceau.*

SOLUTION. — I. Prenons la masse du système pour unité. On a pour la force vive

$$2T = u'^2 + l^2 \theta'^2 \left( \frac{1}{3} + \sin^2 \theta \right) + \omega^2 \left( u^2 + \frac{l^2}{3} \sin^2 \theta \right),$$

la fonction de forces est

$$U = -gl \cos \theta.$$

L'équation de Lagrange relative au paramètre  $u$  est

$$(1) \quad u'' - \omega^2 u = 0.$$

On a d'autre part l'intégrale des forces vives (forme de M. Painlevé)

$$u'^2 - \omega^2 u^2 + l^2 \theta'^2 \left( \frac{1}{3} + \sin^2 \theta \right) - \omega^2 \frac{l^2}{3} \sin^2 \theta = -2gl \cos \theta + h_1.$$

En vertu de (1), le terme  $u'^2 - \omega^2 u^2$  est constant. D'où l'équation

$$\theta'^2 \left( \frac{1}{3} + \sin^2 \theta \right) = \frac{\omega^2}{3} \sin^2 \theta - \frac{2g}{l} \cos \theta + h$$

qui détermine  $\theta$ .

II. Les conditions de non-glissement sont

$$\frac{d\xi}{R} - (\cos \theta_0 d\psi + d\varphi) \cos \psi = 0,$$

$$\frac{d\eta}{R} - (\cos \theta_0 d\psi + d\varphi) \sin \psi = 0.$$

On en déduit la relation  $\frac{d\xi}{\cos \psi} = \frac{d\eta}{\sin \psi}$ , montrant que la vitesse du centre est portée par le rayon horizontal. En traduisant la liaison supplémentaire suivant laquelle le cerceau s'appuie sur la verticale  $O_1 z_1$ , on obtient l'équation

$$(\xi \cos \psi + \eta \sin \psi)^2 + \frac{1}{\cos^2 \theta_0} (-\xi \sin \psi + \eta \cos \psi)^2 = R^2;$$

éliminant  $\psi$ , on a l'équation différentielle de la trajectoire du centre du cerceau

$$(\xi d\xi + \eta d\eta)^2 + \frac{1}{\cos^2 \theta_0} (\eta d\xi - \xi d\eta)^2 = R^2 (d\xi^2 + d\eta^2).$$

Pour intégrer, on pose  $\xi = \rho \cos \omega$ ,  $\eta = \rho \sin \omega$ . On trouve une intégrale singulière  $\rho = \pm R \cos \theta_0$  et l'intégrale générale

$$\omega - \omega_0 = \cos \theta_0 \text{ arc tang } u - \text{arc tang } (u \cos \theta_0),$$

en posant

$$u^2 = \frac{R^2 - \rho^2}{\rho^2 - R^2 \cos^2 \theta_0};$$

si l'on pose maintenant

$$m = \cos \theta_0, \quad u = \tan \alpha, \quad u \cos \theta_0 = \tan \beta,$$

on obtient finalement

$$\begin{aligned} \xi &= R(\cos \alpha \cos m\alpha + m \sin \alpha \sin m\alpha), \\ \eta &= R(\cos \alpha \sin m\alpha - m \sin \alpha \cos m\alpha), \end{aligned}$$

équations paramétriques de l'hypocycloïde annoncée.

La solution géométrique se ramène à l'étude du déplacement continu d'une ellipse, tel que cette courbe passe par un point fixe, et que la vitesse de son centre soit dirigée suivant le grand axe. Voir sur cette question un article de M. Bouligand (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, janvier 1926).

**ÉPREUVE PRATIQUE.** — *Un système primitivement au repos se compose d'une tige rectiligne et homogène AB, de longueur 2l, de masse 2M, portant à ses extrémités deux pendules simples, ayant chacun la longueur 2l et la masse M. La tige AB est initialement horizontale. Ce système est abandonné en chute libre (donc, sans vitesses initiales), et à l'instant précis où il est tombé de la hauteur 2l, on fixe le point C de la tige tel que AC = 3CB. Trouver l'état des vitesses succédant à cette opération. On prendra pour origine le milieu O de la barre à l'instant du choc, pour axe Ox la verticale ascendante, pour axe Oy la demi-droite OB. On déterminera une position virtuelle du système par les coordonnées  $\xi, \eta$  de son centre de gravité et les angles  $\alpha, \beta, \theta$  des pendules et de la barre avec Ox.*

**SOLUTION.** — Dans la position où se produit le choc, la force vive du système total est

$$4M \left\{ \xi'^2 + \eta'^2 + \frac{2L^2}{3} \theta'^2 + l^2(\alpha'^2 + \beta'^2) + l\eta'(\alpha' + \beta') \right\}.$$

Les liaisons introduites imposent aux variations virtuelles des paramètres les conditions

$$\delta\xi - \frac{l}{2} \delta\theta = 0 \quad \text{et} \quad \delta\eta = 0.$$

Comme ces liaisons persistent, les vitesses postérieures au choc, satisfont aux conditions

$$\xi'_1 - \frac{l}{2} \theta'_1 = 0, \quad \eta'_1 = 0$$

ou

$$(1) \quad 2\sqrt{gl} + \Delta\xi' - \frac{l}{2}\Delta\theta' = 0,$$

$$(2) \quad \Delta\eta' = 0.$$

Il reste à écrire que l'équation générale de la dynamique des percussions

$$\begin{aligned} \Delta\xi' \delta\xi + \Delta \left[ \eta' + \frac{l}{2}(\alpha' + \beta') \right] \delta\eta + \frac{2l^2}{3} \Delta\theta' \delta\theta \\ + l^2 \Delta \left( \alpha' + \frac{\eta'}{2l} \right) \delta\alpha + l^2 \Delta \left( \beta' + \frac{\eta'}{2l} \right) \delta\beta = 0 \end{aligned}$$

est satisfaite moyennant les conditions qui correspondent aux liaisons introduites. On obtient aussi trois nouvelles équations

$$(3) \quad \Delta\xi' + \frac{4}{3} l \Delta\theta' = 0,$$

$$(4) \quad \Delta\alpha' = 0,$$

$$(5) \quad \Delta\beta' = 0,$$

qui, jointes à (1) et (2), donnent la solution cherchée.

(Poitiers, juin 1925.)

**ÉPREUVE THÉORIQUE. — C.111. — Deux solides de révolution identiques homogènes et pesants sont fixés par un point O commun à leurs axes (OG = OΓ, G et Γ étant les centres de gravité).**

Sur OF et sur le prolongement de GO sont calés deux cônes de friction identiques immatériels et à contact forcé qui ne peuvent que rouler sans glisser l'un sur l'autre.

Le plan des deux axes est assujéti à toujours rester vertical.

L'angle constant des deux axes est supposé égal à  $\frac{\pi}{2}$ .

**Mouvement du système. — Variation de tous les paramètres. — Diverses formes de la trajectoire sphérique d'un point de δ génératrice de contact des deux cônes de friction, génératrice dont on désignera par θ l'angle avec la verticale descendante.**

**ÉPREUVE PRATIQUE. — C.112. — D'une plaque circulaire homogène de centre O et de rayon 12<sup>cm</sup>, on enlève l'intérieur d'un cercle de centre C, passant par O et de rayon 5<sup>cm</sup>.**

Parmi les droites que l'on peut tracer, issues de C, dans la plaque restante, déterminer celle que l'on doit fixer horizontalement pour que la durée des petites oscillations du pendule composé ainsi formé avec la plaque évidée soit aussi faible que possible.

(Bordeaux, juin 1922.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — C. 113. — Soient deux axes rectangulaires  $Oxy$ . Deux points A et B, de masse commune  $m$ , décrivent l'un  $Ox$ , l'autre  $Oy$ , avec un coefficient de frottement  $f$ . Ils s'attirent mutuellement suivant une force égale à  $k \cdot AB$ .

1° Déterminer leur mouvement, en supposant les conditions initiales quelconques. Indiquer quelles sont les différentes espèces de mouvements possibles. Montrer que, lorsque les distances  $OA$  et  $OB$  varient dans le même sens, le travail absorbé par le frottement est proportionnel à la diminution de l'aire du triangle  $OAB$  et que, lorsque les distances  $OA$ ,  $OB$  varient en sens inverse, ledit travail est proportionnel à l'aire balayée par le vecteur  $OP$ , en appelant  $P$  le quatrième sommet du rectangle dont les trois premiers sommets sont  $O$ ,  $A$ ,  $B$ .

2° Que se passe-t-il quand on abandonne A et B sans vitesse initiale?

3° On suppose  $f = 0,6$  et l'on abandonne A et B, sans vitesse initiale, dans des positions telles qu'ils se mettent tous deux en mouvement. Quel est celui qui arrive le premier en  $O$ ? Calculer le travail absorbé par le frottement à cet instant.

4° Étudier complètement le mouvement, en supposant  $f < 1$ , les vitesses initiales nulles et les positions initiales équidistantes de  $O$ . Calculer les abscisses des positions extrêmes successives et les époques correspondantes. Quelles sont les positions limites de A et de B, quand le temps augmente indéfiniment? Calculer le travail absorbé par le frottement au bout de la  $n^{\text{ième}}$  élongation maxima. Limite de ce travail pour  $n$  infini.

N. B. — On supposera que  $Ox$  et  $Oy$  ne sont pas tout à fait dans le même plan, pour éviter les chocs.

ÉPREUVE PRATIQUE. — C. 114. — Un cube, d'arête  $a$ , peut pivoter sans frottement autour d'un de ses sommets  $O$ . Une tige, de masse négligeable, le traverse suivant la diagonale qui joint  $O$  au sommet opposé A. Cette tige se prolonge du côté de  $O$  et traverse diamétralement une sphère de rayon  $\frac{a}{2}$ . Le cube et la sphère étant supposés homogènes, de même densité et solidaires de la tige, on demande à quelle distance  $x$  de  $O$  il faut placer le centre  $O'$  de la sphère pour que le corps solide ainsi formé soit en équilibre indifférent, quand on le suppose soumis à la seule action de la pesanteur.

Cette condition étant supposée remplie, on place les arêtes du cube issues de  $O$  suivant les axes de coordonnées et l'on imprime au système la vitesse angulaire  $\omega$  autour de  $Ox$ . Calculer les équations de la trajectoire du point A et le temps mis pour la parcourir.

Application numérique :  $\omega = 230$  tours par minute.

(Clermont, juin 1925.)

**SUR DES EXPRESSIONS DE C ET DE C<sup>2</sup> PAR DES SÉRIES ;**

PAR PAUL APPELL.

1° La constante C d'Euler, avec la fonction S(h), a été définie dans l'article que j'ai publié en juillet 1926 dans les *Nouvelles Annales*. On peut y joindre S(1) à S(2), S(3), ..., la conclusion reste la même.

2° On trouve, dans le calcul intégral de J. Bertrand, pour C, la formule

$$(1) \quad C = \int_0^1 \left( \frac{1}{\log(1-z)} + \frac{1}{z} \right) dz = \int_0^1 \varphi(z) dz.$$

Supposons un développement quelconque, limité ou non de  $\varphi(z)$ ,

$$(2) \quad \varphi(z) = \varphi_0(z) + \varphi_1(z) + \dots + \varphi_n(z) + \dots$$

On aura évidemment, en posant

$$(3) \quad \begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \varphi_n(z) dz, \\ C &= I_0 + I_1 + \dots + I_n + \dots \end{aligned}$$

Si le développement (2) est illimité les séries (2) et (3) sont supposées convergentes.

En prenant le développement en série entière de M. Ser (*Intermédiaire des mathématiciens*, 1925),

$$(4) \quad \frac{1}{\log(1-z)} + \frac{1}{z} = p_2 + p_3 z + \dots + p_{n+2} z^n + \dots,$$

où

$$p_{v+1} = \int_0^1 \frac{x(1-x) \dots (v-1-x)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot v} dx,$$

on obtient par (3) la formule de Fontana-Bessel. Puis en faisant comme lui

$$\log(1-z) = x, \quad z = 1 - e^x,$$

on a

$$\frac{1}{\log(1-z)} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-e^x} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n B_n}{2n!} x^{2n-1},$$

où les  $B_n$  sont les nombres de Bernoulli. En identifiant avec (4) on a les relations données par M. Ser (*loc. cit.*) entre les  $B_n$  et les  $p_{v+1}$ . Mais on a, d'après  $x = \log(1-z)$ ,

$$\varphi(z) = \frac{1}{\log(1-z)} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{B_n}{2n!} \log^{2n-1}(1-z).$$

Alors

$$I_0 = \frac{1}{2}, \quad I_n = (-1)^n \frac{B_n}{2n!} \int_1^1 \log^{2n-1}(1-z) dz,$$

$$I_n = (-1)^n \frac{B_n}{2n!} \int_0^1 \log^{2n-1} u du,$$

en faisant  $u = e^t$ ,

$$I_n = (-1)^{n+1} \frac{B_n}{2n!} \int_0^\infty e^{-t} t^{2n-1} dt = (-1)^{n+1} \frac{B_n \Gamma(2n)}{2n!},$$

$$I_n = (-1)^{n+1} \frac{B_n}{2n}.$$

Alors

$$C - \frac{1}{2} = \frac{B_1}{2} - \frac{B_2}{4} + \frac{B_3}{6} - \dots;$$

c'est l'une des série divergentes d'Euler que l'on peut remplacer par un développement en série limité. On a, en effet,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{1-e^x} = \frac{1}{2} + \sum_{h=1}^n (-1)^h \frac{B_h}{2h!} x^{2h-1} + (-1)^{n+1} \frac{B_{n+1}}{(2n+2)!} x^{2n+1} \theta,$$

où  $\theta$  est compris entre 0 et 1.

En intégrant comme plus haut, on obtient

$$C - \frac{1}{2} = \frac{B_1}{2} - \frac{B_2}{4} + \frac{B_3}{6} - \dots + (-1)^{m-1} \frac{B_m}{2m} + (-1)^m \theta_1 \frac{B_{m+1}}{2m+2},$$

où  $\theta_1$  est compris entre 0 et 1. Je pense revenir sur ces formules dans un autre article.

3° A chacune des séries (2) on peut faire correspondre une

série donnant  $C^2$  pourvu qu'on sache calculer les intégrales

$$J_n(\gamma) = \int_{\gamma}^1 \varphi_n(x) dx, \quad K_n = \int_0^1 J_n(\gamma) \varphi(\gamma) d\gamma.$$

On a, en effet,

$$C^2 = \iint \varphi(x) \varphi(\gamma) dx d\gamma,$$

l'intégrale étant étendue à l'aire du carré OABA' dont les sommets ont pour coordonnées

$$(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1).$$

On a alors, à cause de la symétrie,

$$\frac{C^2}{2} = \iint_T \varphi(x) \varphi(\gamma) dx d\gamma,$$

l'intégrale étant étendue au triangle  $T = OAB$ . En intégrant d'abord par rapport à  $x$ , on doit calculer l'intégrale

$$\begin{aligned} \psi(\gamma) &= \int_{\gamma}^1 \varphi(x) dx, \\ \psi(\gamma) &= \int_{\gamma}^1 \sum_{n=0}^{n=\infty} \varphi_n(x) dx = \sum_{n=0}^{n=\infty} J_n(\gamma). \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{C^2}{2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} K_n,$$

où

$$K_n = \int_0^1 J_n(\gamma) \varphi(\gamma) d\gamma.$$

Par exemple, en prenant le développement (4), on a

$$\begin{aligned} J_n(\gamma) &= \int_{\gamma}^1 p_{n+2} x^n dx = \frac{p_{n+2}}{n+1} [1 - \gamma^{n+1}], \\ K_n &= \frac{p_{n+2}}{n+1} \int_0^1 (1 - \gamma^{n+1}) \left[ \frac{1}{\log(1-\gamma)} + \frac{1}{\gamma} \right] d\gamma \\ &= \frac{p_{n+2}}{n+1} \left[ \int_0^1 \left( \frac{1}{\log(1-\gamma)} + \frac{1}{\gamma} \right) d\gamma - \int_0^1 \left( \frac{\gamma^{n+1}}{\log(1-\gamma)} + \frac{\gamma^{n+1}}{\gamma} \right) d\gamma \right]. \end{aligned}$$

La première intégrale est C. Si l'on pose

$$L_n = \int_0^1 \left( \frac{y^{n+1}}{\log(1-y)} + y^n \right) dy = \frac{1}{n+1} + \int_0^1 \frac{y^{n+1}}{\log(1-y)} dy,$$

on a

$$\frac{C^2}{2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{p_{n+2}}{n+1} (C - L_n).$$

Comme, d'après la formule de Fontana-Bessel, le coefficient de C est la série donnant C, on a

$$\frac{C^2}{2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{p_{n+2}}{n+1} L_n.$$

L'intégrale  $L_n$  est connue, on a

$$L_n = \frac{1}{n+1} + \int_0^1 \frac{(1-u)^{n+1}}{\log u} du,$$

en retranchant au numérateur  $(1-u)^{n+1}$  qui est nul

$$L_n = \frac{1}{n+1} + \int_0^1 \frac{-\frac{(n+1)}{1}(u-1) + \frac{(n+1)n}{1.2}(u^2-1) - \dots}{\log u} du$$

et en remarquant

$$\log(\rho+1) = \int_0^1 \frac{u^\rho - 1}{\log u} du,$$

il vient

$$L_n = \frac{1}{n+1} - \frac{n+1}{1} \log 2 + \frac{(n+1)n}{1.2} \log 3 - \dots,$$

la série est convergente parce que

$$\left| L_n - \frac{1}{n+1} \right| < \int_0^1 \frac{u-1}{\log u} du = \log 2,$$

on a alors  $\frac{C^2}{2}$ .

On obtient de même  $C^2$  par une série dont les termes contiennent les nombres de Bernoulli.



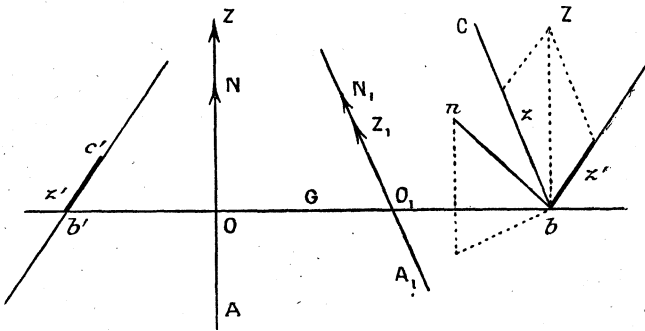
**SUR LES DROITES CONJUGUÉES COMMUNES  
A DEUX COMPLEXES LINÉAIRES ;**

PAR D. WOLKOWITSCH.

Nous supposons connus pour les deux complexes linéaires  $C$  et  $C_1$ , les axes centraux  $A$  et  $A_1$ , supports des vecteurs résultants  $Z$  et  $Z_1$ , et des axes des couples résultants correspondants  $N$  et  $N_1$ .

I. D'après une propriété connue des droites conjuguées, la perpendiculaire commune aux droites cherchées  $D, D_1$ , coupe normalement les deux axes  $A, A_1$ , elle coïncide donc avec la perpendiculaire commune  $G$  à ces deux axes  $A, A_1$ . Nous appellerons  $O$  et  $O_1$  les points d'intersection des deux axes avec la droite  $G$ .

Nous avons à déterminer les directions des deux droites  $D$  et  $D_1$ , normales à  $G$ , et leurs points d'intersection avec  $G$ .



II. Considérons le complexe  $C$ .

En un point quelconque  $b$  de  $G$ , l'axe du couple est un vecteur  $bn$ , résultant du vecteur  $N$  et d'un vecteur normal au plan  $b, Z$ , de grandeur  $\overline{bO} \cdot Z$  qui représente le moment du vecteur  $Z$  par rapport au point  $b$ .

Rappelons que le lieu de la droite  $bn$ , quand le point  $b$  décrit

la droite  $G$ , est un parabolôide hyperbolique dont un plan directeur est normal à  $G$  et l'autre normal à  $A$ . Nous désignerons ce parabolôide par  $P$ .

III. Cherchons maintenant, dans le complexe  $C$ , la droite conjuguée d'une droite  $bc$  normale à  $G$ .

D'après les propriétés élémentaires des systèmes de vecteurs, la droite cherchée  $b'c'$  est normale au plan  $G.bn$  et coupe la droite  $G$  en un point  $b'$  que nous allons déterminer.

Décomposons le vecteur  $Z$  suivant les deux directions connues  $bc$  et  $b'c'$  et appelons  $z$  et  $z'$  les deux composantes. La distance  $bb'$  est déterminée par la relation

$$z'.\overline{bb'} = \overline{bn}$$

qui exprime que le système  $ZN$  est équivalent au système des deux vecteurs  $z$  et  $z'$ , portés par la droite  $bc$  et par sa conjuguée.

On notera que la direction de la droite  $b'c'$  est constante quelle que soit la direction de  $bc$  dans le plan normal à  $G$  mené par le point  $b$ , et que la distance  $bb'$  seule varie avec cette direction, puisqu'elle dépend de la composante  $z'$ .

IV. Le complexe  $C$ , donne lieu à des considérations identiques, soit  $P_1$  le parabolôide correspondant.

Le point  $b$  appartiendra à l'une des droites cherchées  $D$  ou  $D_1$ , si les deux droites  $bn$  et  $bn_1$  sont confondues; autrement dit si le point  $b$  est l'un des points où les deux surfaces  $P$  et  $P_1$ , qui ont en commun la génératrice  $G$ , se raccordent.

Le point  $b'$  sera le deuxième point de raccordement.

La droite  $D$  est normale au plan tangent commun en  $b'$  et la droite  $D'$  normale au plan tangent commun en  $b$ .

Les deux droites conjuguées communes sont donc réelles ou imaginaires conjuguées comme les points  $b$  et  $b'$  eux-mêmes.

**SUR LES COUPLES DE CONTOURS FERMÉS DE MÊME LONGUEUR  
ET DE MÊME SURFACE ;**

PAR P. VINCENSINI.

I. *Établissement d'une correspondance par aires constantes entre deux points d'un plan.* — Envisageons dans un plan deux courbes fixes quelconques (C) et (C'), que nous supposons formées d'un nombre fini d'arc analytiques, et une droite variable ( $\Delta$ ) coupant (C) et (C') en M et M'.

Nous allons montrer que si P et P' constituent un couple quelconque de points de ( $\Delta$ ) symétriques par rapport au milieu de MM', assujetti à cette condition que pendant le déplacement de ( $\Delta$ ) (déplacement quelconque à deux paramètres), les segments déterminés par M, M', P et P' sur ( $\Delta$ ) conservent leurs rapports mutuels, la correspondance ainsi établie entre P et P' est *une correspondance par aires constantes*.

Soient en effet  $u$  et  $v$  les paramètres fixant les positions des points M et M' sur (C) et (C'),

$$M \begin{cases} x = x(u), \\ y = y(u), \end{cases} \quad M' \begin{cases} x' = x'(v), \\ y' = y'(v). \end{cases}$$

Si l'on pose  $\lambda = -\frac{\overline{PM}}{\overline{PM'}}$ , les coordonnées des points P et P' sont

$$P \begin{cases} X = \frac{x + \lambda x'}{1 + \lambda}, \\ Y = \frac{y + \lambda y'}{1 + \lambda}, \end{cases} \quad P' \begin{cases} X' = \frac{x' + \lambda x}{1 + \lambda}, \\ Y' = \frac{y' + \lambda y}{1 + \lambda}. \end{cases}$$

Le calcul de l'élément d'aire décrit par P donne

$$ds_P = \frac{\lambda}{(1 + \lambda)^2} \left| \frac{dx}{du} \frac{dy'}{dv} - \frac{dy}{du} \frac{dx'}{dv} \right| du dv.$$

La forme du résultat montre que  $ds_{P'}$  a la même valeur.

La correspondance entre P et P' est bien une correspondance par aires constantes comme nous l'avions annoncé (1).

II. Supposons maintenant que M et M' se déplacent, non plus indépendamment l'un de l'autre sur (C) et (C'), mais de façon à décrire des arcs homologues *égaux*. Dans ce cas P et P' décrivent deux courbes (Γ), (Γ') du plan. Il est aisé de montrer que (Γ) et (Γ') se correspondent avec *égalité* des arcs homologues.

On a en effet en désignant par  $ds$  l'élément d'arc décrit par P, et par  $ds'$  l'élément d'arc homologue décrit par P',

$$ds^2 = \frac{1}{(1+\lambda)^2} \left[ dx^2 + dy^2 + \lambda^2(dx'^2 + dy'^2) + 2\lambda(dx dx' + dy dy') \right],$$

$$ds'^2 = \frac{1}{(1+\lambda)^2} \left[ dx'^2 + dy'^2 + \lambda^2(dx^2 + dy^2) + 2\lambda(dx dx' + dy dy') \right].$$

Si  $dx^2 + dy^2 = dx'^2 + dy'^2$  on a bien :  $ds^2 = ds'^2$ .

Les différents couples de points tels que P, P', correspondant aux différentes valeurs de  $\lambda$ , établissent donc sur les courbes qu'ils décrivent des correspondances par égalité d'arcs. Ce résultat s'établit d'ailleurs simplement par la géométrie.

III. Supposons enfin que (C) et (C') soient deux contours fermés de même longueur, et que M et M' décrivent (C) et (C') en parcourant des arcs égaux. P et P' décrivent alors eux aussi deux contours fermés (Γ), (Γ') de même longueur. *A quelle condition (Γ) et (Γ') auront-ils aussi même aire?*

Si  $l$  est la longueur commune à (C) et à (C'), et si l'on suppose  $(x, y)$ ,  $(x', y')$  exprimés en fonction de l'arc  $s$  de (C) ou de (C'), on aura, après un calcul facile, pour les expressions des surfaces limitées par (C) et (C'),

$$S_c = \frac{1}{(1+\lambda)^2} \int_0^l (x dy - y dx) + \lambda(x dy' + x' dy - y dx' - y' dx) + \lambda^2(x' dy' - y' dx'),$$

$$S_{c'} = \frac{1}{(1+\lambda)^2} \int_0^l (x' dy' - y' dx') + \lambda(x' dy + x dy' - y' dx - y dx') + \lambda^2(x dy - y dx).$$

(1) La correspondance simple ci-dessus est en relation avec l'étude des congruences rectilignes à surface moyenne plane (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1927, en cours d'impression).

$S_c$  sera égale à  $S_{c'}$  si

$$\int_0^l (x dy - y dx) + \lambda^2 \int_0^l (x' dy' - y' dx')$$

$$= \int_0^l (x' dy' - y' dx') + \lambda^2 \int_0^l (x dy - y dx).$$

Cela exige que

$$\int_0^l (x dy - y dx) = \int_0^l (x' dy' - y' dx'),$$

c'est-à-dire que les contours de départ (C) et (C') aient même surface. On peut donc énoncer ce résultat :

*A tout ensemble de deux contours fermés ayant même longueur et même surface, on peut faire correspondre une infinité de couples de contours possédant les mêmes propriétés; il suffit d'établir entre les deux contours une correspondance par arcs égaux et de prendre sur la droite joignant deux points homologues M, M' deux points P et P' tels que*

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PM'}} = \frac{\overline{P'M'}}{\overline{P'M}} = -\lambda,$$

*P et P' décrivent deux contours de même longueur et de même aire.*

Tout couple de contours jouissant des propriétés ci-dessus est d'ailleurs susceptible du mode de génération précédent, d'une infinité de façons.

Signalons que le résultat du n° I est un cas particulier du suivant qu'il serait aisé de vérifier :

*Si M et M', au lieu de décrire deux courbes (C) et (C') du plan, se déplacent en restant homologues dans une transformation quelconque par aires constantes du plan, il en est de même de tous les couples (P, P'), définis comme au n° I, portés par la droite MM'.*

IV. La propriété qui fait l'objet du n° II s'étend à deux courbes de l'espace.

*Si M et M' sont deux points homologues quelconques de deux courbes (C) et (C') de l'espace sur lesquelles se trouve établie une correspondance par arcs égaux, les couples de points P et P'  $\left(\frac{\overline{PM}}{PM'} = \frac{\overline{P'M'}}{P'M} = -\lambda\right)$ , déterminent sur les courbes ( $\Gamma$ ) et ( $\Gamma'$ ) sur lesquelles ils sont distribués, une correspondance par arcs égaux.*

Pour s'en rendre compte, on peut par exemple projeter la figure formée par quatre éléments d'arcs associés ( $ds_M, ds_{M'}, ds_P, ds_{P'}$ ) sur le plan parallèle aux quatre tangentes correspondantes, les éléments d'arcs envisagés se projettent suivant des éléments équivalents, et la propriété annoncée résulte du n° II même.

La propriété actuelle peut intervenir dans certaines questions intéressant la géométrie des surfaces.

Voici un exemple qui vient naturellement à l'esprit.

Imaginons que M et M' décrivent deux surfaces applicables quelconques (S) et (S'), en restant homologues dans l'application.

P et P' décrivent alors, d'après ce qui précède, deux surfaces ( $\Sigma$ ) et ( $\Sigma'$ ) telles que deux arcs homologues quelconques soient égaux. ( $\Sigma$ ) et ( $\Sigma'$ ) sont applicables.

A tout couple de surfaces applicables la construction géométrique indiquée ci-dessus en fait donc correspondre une infinité d'autres.

Si en particulier  $\lambda$  est infiniment voisin de 1, ( $\Sigma$ ) et ( $\Sigma'$ ) sont infiniment voisins, et l'on voit apparaître, de façon purement géométrique, le lien qui existe entre le problème de la recherche des couples de surfaces applicables et celui de la déformation infiniment petite.

**SUR UN SYSTÈME DE CONDITIONS  
ASSURANT L'HOLOMORPHIE D'UNE FONCTION ;**

PAR ANDRÉ ROUSSEL.

Dans cet article sans prétentions je me propose d'indiquer comment on peut former très simplement un système de conditions nécessaires et suffisantes, qui ne semble pas avoir été signalé encore, permettant d'affirmer l'holomorphie d'une fonction uniforme  $f(z)$  de la variable complexe  $z$ .

Pour cela, nous démontrerons un théorème sur l'existence de la dérivée d'une fonction de variable réelle  $\varphi(x)$ . Ce théorème est d'ailleurs bien connu, mais nous allons montrer qu'on peut le faire apparaître comme une conséquence presque immédiate d'une proposition d'Ascoli relative à l'existence de la fonction d'accumulation d'un ensemble de fonctions également continues et également bornées.

On sait (principe de Bolzano-Weierstrass) qu'un ensemble E formé de points contenus sur un segment de droite D admet au moins un point d'accumulation, c'est-à-dire un point d'abscisse  $x_0$ , tel qu'à tout  $\varepsilon > 0$  corresponde une infinité de points de E satisfaisant à l'inégalité

$$|x - x_0| \leq \varepsilon.$$

Si l'on considère maintenant un ensemble W contenant une infinité de fonctions définies dans un même intervalle  $(0, 1)$  par exemple, et satisfaisant à l'inégalité

$$|f(x)| < M$$

(on dit alors que les  $f$  sont *également bornées*), où M ne dépend pas de la fonction considérée, on peut se demander si W admet une fonction d'accumulation, c'est-à-dire s'il existe une fonction  $f_0(x)$  telle qu'à tout  $\varepsilon > 0$  on puisse faire correspondre une infinité de  $f(x)$  appartenant à W et vérifiant la condition

$$|f(x) - f_0(x)| < \varepsilon \quad (0, 1).$$

Or il est facile de voir que l'on ne peut pas répondre toujours par l'affirmative, comme le montre l'exemple très simple des fonctions

$$y = \sin \pi n x \quad (0, 1) \quad (n = 0, 1, \dots, \infty).$$

Mais il est possible d'introduire une condition supplémentaire grâce à laquelle on a le droit d'affirmer l'existence de la fonction d'accumulation : c'est la condition d'égalité continue dont voici la définition : *Les fonctions d'un ensemble W sont également continues si à tout nombre positif  $\varepsilon$  on peut faire correspondre un nombre positif  $\delta$  tel que pour tout couple  $(x_1, x_2)$  satisfaisant à*

$$|x_2 - x_1| \leq \delta,$$

on ait pour chaque fonction de W :

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq \varepsilon.$$

Cela aura lieu en particulier si les  $f$  ont des rapports incrémentsaux bornés dans leur ensemble, autrement dit si l'on a quel que soit  $f, x_1, x_2$  :

$$\left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \leq M,$$

en effet, il suffira de prendre

$$\delta < \frac{\varepsilon}{M}$$

pour avoir

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon.$$

Le théorème d'Ascoli que nous admettrons sans démonstration (1) s'énonce alors ainsi :

*Tout ensemble formé d'une infinité de fonctions également continues et également bornées admet au moins une fonction d'accumulation continue (2).*

Nous allons en déduire le corollaire suivant :

*Toute fonction  $\varphi(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) satisfaisant, quels que*

---

(1) Pour la démonstration, voir par exemple A. ROUSSEL, *Recherches sur le Calcul des Variations* (Thèse de Doctorat) (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. V, pages 404 à 408).

(2) Ceci est encore vrai sans qu'il soit nécessaire de supposer les fonctions également bornées, mais la fonction d'accumulation pourra alors être  $y = \pm \infty$ .



soient  $x$  et  $h$  à la condition

$$(1) \quad \left| \frac{\varphi(x+h) + \varphi(x-h) - 2\varphi(x)}{h^2} \right| \leq M,$$

admet dans tout l'intervalle  $(a, b)$  une dérivée première continue.

Soit  $\Gamma$  la courbe représentant la fonction

$$y = \varphi(x) \quad (a, b).$$

Divisons  $(a, b)$  en  $n$  parties égales par les points

$$a \equiv x_0, x_1, \dots, x_n \equiv b$$

et considérons la ligne polygonale  $\Pi_n$  inscrite dans  $\Gamma$  dont les sommets successifs ont pour abscisses  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , et soient

$$y'_1, y'_2, \dots, y'_n$$

les coefficients angulaires des côtés de  $\Pi_n$ . Soit dans un système d'axes auxiliaires  $(O'xy')$  la courbe en paliers qui représente la fonction discontinue  $u_n(x)$  ainsi définie

$$u_n(x) = y'_i \quad x_{i-1} \leq x < x_i$$

et soit

$$y' = \psi_n(x) \quad (a, b)$$

l'équation de la ligne brisée continue  $\Sigma_n$  qu'on obtient en joignant le point  $(x_0, y'_1)$  au point  $(x_1, y'_2)$  puis  $(x_1, y'_2)$  à  $(x_2, y'_3) \dots$ ,  $(x_{n-2}, y'_{n-1})$  à  $(x_{n-1}, y'_n)$ , et  $(x_{n-1}, y'_n)$  à  $(x_n, y'_n)$ .

Chaque côté de  $\Sigma_n$  fait avec  $Ox$  un angle dont la tangente est, en vertu de (1), inférieure à  $M$ . Par suite les  $\psi_n(x)$  sont également continues, comme ayant chacune un rapport incrémental inférieur à  $M$ ; donc les  $\psi_n(x)$  admettent une fonction d'accumulation  $\psi_0(x)$ , continue ou égale à  $\pm \infty$ , et l'on peut trouver une suite

$$(2) \quad \overline{\psi}_1(x), \overline{\psi}_2(x), \dots, \overline{\psi}_p(x),$$

de fonction  $\psi$  qui convergent vers  $\psi_0(x)$ . Or

$$|\psi_n(x) - u_n(x)| \leq \frac{M}{n}.$$

Donc la suite

$$(3) \quad \overline{u}_1(x), \overline{u}_2(x), \dots, \overline{u}_p(x),$$

formée des  $u_i$  correspondant aux  $\psi_i$  de (2), converge elle aussi vers  $\Psi_0(x)$ , et par suite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x \overline{u_n}(x) dx = \int_a^x \psi_0(x) dx.$$

Mais, d'après la façon dont on a formé les fonctions  $u$ , on a aussi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x \overline{u_n}(x) dx = \varphi(x) - \varphi(a).$$

Donc

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \int_a^x \psi_0(x) dx,$$

ce qui prouve que  $\varphi(x)$  admet une dérivée égale à  $\psi_0(x)$ , et que cette dernière fonction est finie.

Ceci posé, soit

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

une fonction uniforme de la variable complexe  $z = x + iy$ . Nous allons appliquer le théorème précédent en donnant d'abord à  $z$  un accroissement purement réel que nous pouvons prendre égal à  $\frac{1}{n}$  ( $n$  entier), puis un accroissement purement imaginaire  $i \frac{1}{n}$ .

Si l'on a, quel que soit  $u$ ,

$$n^2 \left| f\left(z + \frac{1}{n}\right) + f\left(z - \frac{1}{n}\right) - 2f(z) \right| < M,$$

où  $M$  est une constante positive, on en déduit l'existence de la dérivée en  $z$  pour des accroissements réels. En effet l'inégalité précédente est équivalente à deux inégalités, et les deux conditions obtenues, on en tire l'existence de  $\frac{\partial P}{\partial x}$  et de  $\frac{\partial Q}{\partial x}$ . De même de l'inégalité

$$n^2 \left| f\left(z + i\frac{1}{n}\right) + f\left(z - i\frac{1}{n}\right) - 2f(z) \right| < M,$$

on déduit l'existence de la dérivée de  $f(z)$  quand  $z$  reçoit un accroissement purement imaginaire.

Si l'on a de plus

$$(4) \quad \left| \frac{f\left(z + \frac{1}{n}\right) - f(z)}{\frac{1}{n}} - \frac{f\left(z + i\frac{1}{n}\right) - f(z)}{i\frac{1}{n}} \right| < \frac{M}{n}$$

ou encore

$$n^2 \left| \left\{ f\left(z + \frac{1}{n}\right) - f(z) \right\} + i \left\{ f\left(z + i\frac{1}{n}\right) - f(z) \right\} \right| < M,$$

les deux dérivées en  $z$  définies plus haut seront égales. En effet, leur différence qui est

$$\left( \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) + i \left( \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

possède, d'après (4), un module arbitrairement petit, donc nul, d'où

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}$$

et ces relations expriment comme on sait que  $f(z)$  possède en  $z$  une dérivée unique pour un accroissement quelconque de la variable complexe.

En résumé : si une fonction uniforme de  $z$  satisfait à l'intérieur d'un certain domaine  $D$ , aux trois inégalités suivantes où  $n$  est un entier arbitraire,

$$n^2 \left| f\left(z + \frac{1}{n}\right) + f\left(z - \frac{1}{n}\right) - 2f(z) \right| < M,$$

$$n^2 \left| f\left(z + i\frac{1}{n}\right) + f\left(z + i\frac{1}{n}\right) - 2f(z) \right| < M,$$

$$n^2 \left| \left\{ f\left(z + \frac{1}{n}\right) - f(z) \right\} + i \left\{ f\left(z + i\frac{1}{n}\right) - f(z) \right\} \right| < M,$$

où  $M$  désigne une constante positive,  $f(z)$  est holomorphe dans  $D$ .

Il est d'ailleurs clair que la réciproque est exacte, car si  $f(z)$  est holomorphe dans  $D$  elle a des dérivées de tous les ordres holomorphes dans ce domaine, d'où l'on déduit sans peine le résultat précédent.

---

QUESTION PROPOSÉE.

---

2509. Le cercle osculateur en un point variable  $m$  d'une courbe gauche ( $\gamma$ ) engendre une surface gyrocyclide ( $S$ ) qui admet pour ligne de courbure cette circonférence. P. SICARD.

---

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

---

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. C. 115. — 1° Soient une courbe plane  $C$ ,  $P$  la projection orthogonale d'un point donné  $O$  du plan sur la tangente au point courant  $M$ . Déterminer les courbes  $C$  telles que l'on ait  $\overline{OM}^2 = a \cdot OP$ ,  $a$  étant une longueur donnée.

2° Soient une surface  $S$ ,  $P$  la projection orthogonale d'un point donné  $O$  sur le plan tangent au point courant  $M$ . Former l'équation aux dérivées partielles qui caractérise les surfaces  $S$  telles que l'on ait  $\overline{OM}^2 = a \cdot OP$ ,  $a$  longueur donnée.

3° Montrer géométriquement qu'il existe une intégrale complète formée de sphères. La déterminer ainsi que l'intégrale singulière.

A défaut de cette solution géométrique, déterminer analytiquement une intégrale complète soit en employant les coordonnées polaires de l'espace, soit en effectuant une inversion de pôle  $O$ .

4° Indiquer la nature géométrique des caractéristiques et montrer que ce sont des lignes de courbure des surfaces intégrales. Donner une définition géométrique simple de l'autre famille de lignes de courbure.

II. C. 116. — 1° On considère les intégrales

$$F(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt, \quad G(z) = \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt,$$

où  $t$  est réel et positif et  $z = x + iy$  complexe. Dans quelles conditions ont-elles un sens ?

2° Montrer que  $F(z)$  est holomorphe dans tout domaine borné dans

lequel  $x$  est positif et que, dans ces conditions,

$$(1) \quad F(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \dots$$

Établir que la série du second membre de (1) converge uniformément dans tout domaine borné ne contenant pas les points  $0, -1, -2, \dots$ . En déduire que  $F(z)$  est prolongeable analytiquement dans tout le plan et est méromorphe.

3° On pose

$$G_m(z) = \int_1^m e^{-tz-1} dt \quad (m \text{ entier positif}).$$

Montrer que  $G_m(z)$  est holomorphe dans tout domaine borné. En déduire que  $G(z)$  est une fonction holomorphe en tout point à distance finie.

4° Montrer que, pour  $y = 0$  et  $x > 0$ ,

$$\frac{1}{x(x+1)} < F(x) < \frac{1}{x}$$

et que, quel que soit  $z$ ,

$$|G(z)| < \Gamma(|z|+1),$$

$\Gamma(u)$  étant la fonction eulérienne. En déduire que  $G(z)$  est de genre 1 et est décomposable en facteurs sous la forme

$$G(z) = A e^{bz} \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n}},$$

la série  $\sum \frac{1}{|a_n|}$  étant divergente.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Les axes  $Oxyz$  sont rectangulaires. Une droite  $MP$  se déplace de telle façon que le point  $M$  décrive le cercle  $z = 0, x^2 + y^2 = a^2$ , que le point  $P$  décrive le cercle  $y = 0, x^2 + z^2 = b^2$  et que les angles de  $OM$  et  $OP$  avec  $Ox$  soient égaux (ces angles sont comptés dans le sens de  $Ox$  vers  $Oy$  et dans le sens de  $Ox$  vers  $Oz$  respectivement). On appellera  $\theta$  l'angle  $(Ox, OM)$ . Soit  $S$  la surface engendrée par la droite  $MP$ .

1° Calculer le volume compris entre la surface  $S$  et les plans de coordonnées dans la portion de l'espace où  $x > 0, y > 0, z > 0$ . Quel est le maximum de ce volume lorsque  $a$  et  $b$  varient de telle façon que  $a^2 + b^2 = R^2$ ,  $R$  étant donné ?

2° Trouver les lignes asymptotiques de la surface  $S$ . On donnera notamment l'équation cartésienne de leurs projections sur le plan  $yOz$ .

Nota. — Dans la première question on pourra, par exemple, remar-

quer qu'un point du volume considéré a pour coordonnées

$$\begin{aligned} x &= u[a + v(a - b)] \cos \theta, \\ y &= ua(1 + v) \sin \theta, \\ z &= -uvb \sin \theta, \end{aligned}$$

$u$  et  $v$  étant deux paramètres variant entre certaines limites et  $\theta$  variant de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ . (Strasbourg, juin 1927.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. C. 117. — Soit l'équation différentielle

$$(1) \quad \frac{d\mu}{d\lambda} = \frac{4K^2\lambda\mu}{(\lambda^2 + \mu^2 + 1 - K^2)(\lambda^2 + \mu^2 + 1 + K^2)},$$

où  $\lambda, \mu$  sont deux coordonnées rectangulaires dans le plan  $O\lambda\mu$ ,  $K$  une constante réelle positive. On pose

$$(2) \quad \text{tang } \varphi = \frac{2K\mu}{\lambda^2 + \mu^2 + 1 - K^2}.$$

Vérifier que l'équation (1) est équivalente à

$$(3) \quad d\varphi + \frac{d\mu}{K} = 0.$$

II. On suppose la fonction  $\varphi$  des deux variables indépendantes  $\lambda, \mu$  définie par la formule (2).

a. Pour  $K = 1$ , donnez l'interprétation géométrique de  $\text{tang } \varphi$ , point critique, quand  $(\lambda, \mu)$  tourne autour de l'origine et revient au point de départ quel changement subit  $\varphi$ .

b. Pour  $0 < K < 1$ , la fonction  $\varphi(\lambda, \mu)$  est uniforme.

c. Pour  $1 < K$ , la fonction  $\varphi$  admet les points critiques  $(\sqrt{K^2 - 1}, 0)$  et  $(-\sqrt{K^2 - 1}, 0)$ . On suppose que  $(\lambda, \mu)$  suive une courbe continue partant de l'origine et allant en un point  $M$  donné; la valeur initiale de  $\varphi$  est prise égale à 0; classer les déterminations de  $\varphi$  à l'arrivée en  $M$ ; influence d'une circulation autour d'un point critique.

III. L'expression

$$dU = 2K \left[ \frac{(\lambda^2 - \mu^2 + 1 - K^2) d\mu - 2\lambda\mu d\lambda}{(\lambda^2 + \mu^2 + 1 - K^2)^2 + 4K^2\mu^2} \right]$$

est une différentielle totale exacte; calculer la valeur de l'intégrale  $\int dU$  prise le long d'un circuit fermé de dimensions suffisamment petites entourant l'un des points  $(\sqrt{K^2 - 1}, 0)$  ou  $(-\sqrt{K^2 - 1}, 0)$  en supposant  $K > 1$ .

IV. En changeant  $\lambda$  en  $\mu$ ,  $\mu$  en  $\lambda$ ,  $K$  en  $iK$ , montrer que l'intégrale générale de

$$(4) \quad \frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{-4K^2\lambda\mu}{(\lambda^2 + \mu^2 + 1 - K^2)(\lambda^2 + \mu^2 + 1 + K^2)}$$

est donnée par

$$\frac{1}{2} \log \frac{\lambda^2 + \mu^2 + 2K\lambda + 1 + K^2}{\lambda^2 + \mu^2 - 2K\lambda + 1 + K^2} - \frac{\lambda}{K} = \text{const.}$$

V. Par un point du plan passe une intégrale de (1), une de (4) : elles sont orthogonales.

ÉPREUVE PRATIQUE. — C. 118. — 1° Soit l'équation différentielle

$$xy' - y = \frac{y^2 - x^2}{ax^2 + 2bx + c},$$

où  $a, b, c$  désignent des constantes réelles.

Montrer qu'elle admet des intégrales particulières indépendantes de  $a, b, c$ ;

2° Écrire l'intégrale générale en distinguant les trois cas suivants :

$$b^2 - ac > 0,$$

$$b^2 - ac = 0,$$

$$b^2 - ac < 0;$$

3° Pour que l'intégrale générale soit rationnelle il faut et il suffit que

$$\frac{1}{b^2 - ac}$$

soit le carré d'un entier.

L'intégrale générale peut-elle être uniforme dans tout le plan de la variable complexe, sans se réduire à une fraction rationnelle ? Trouver dans ce cas les points singuliers d'une intégrale. Préciser leur nature en remontant aux définitions. Prouver qu'ils sont sur une même circonférence. (Lille, juin 1927.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Question de Cours. — Existence des solutions de l'équation en  $y$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

$f$  étant une fonction donnée de variable réelle non nécessairement analytique, satisfaisant à des hypothèses que l'on précisera.

II. Problème. — C. 119. — *En s'appuyant sur les expressions de  $\Gamma(1+x)$  et de  $\frac{\sin \pi x}{\pi x}$  en produit infini, prouver que*

$$\log \Gamma(1+x) + \frac{1}{2} \log \frac{\sin \pi x}{\pi x} + \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} = \sum_1^{\infty} a_n x^{2n-1},$$

*le second membre étant une série entière dont on donnera le rayon de convergence et dont on exprimera les coefficients à l'aide de séries.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — C. 120. —  *$z = x + iy$  étant une variable complexe, calculer l'intégrale*

$$\int \frac{dz}{z-2 + \sqrt{1-z^2}}$$

*prise : 1° Le long du cercle*

$$x^2 + y^2 - 3x = 0$$

*dans le sens direct, le point  $z$  partant de l'origine et le radical partant de la valeur 1.*

*2° Le long du même cercle, dans le même sens, avec le même point de départ, le radical partant de la valeur  $-1$ .*

*3° et 4° Mêmes questions pour le cercle*

$$x^2 + y^2 - 3y = 0$$

*le point de départ étant encore 0.*

(Clermont, juin 1927.)

## CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — C. 121. — *Un losange articulé ABCD est constitué par quatre tiges identiques, homogènes, de longueur  $a$ , de masse  $m$ .*

*Les sommets opposés AC, BD sont assujettis à se déplacer respectivement sur les glissières rectangulaires  $x'Ox, y'Oy'$ . Enfin le plan  $xOy$  est librement mobile autour de  $y'Oy'$  qui reste fixe et verticale.*

*On prendra pour paramètre  $\theta$ , demi-angle en A du losange et  $\varphi$  angle du plan  $xOy$  avec un plan fixe passant par Oy. On négligera les frottements et la masse des glissières  $x'Ox, y'Oy'$ .*

I. Déterminer le mouvement du losange pour des données initiales quelconques



II. On suppose de plus qu'il s'exerce entre les points B et D une attraction proportionnelle à la distance BD (prendre cette attraction égale à  $mk^2DB$ , où  $k$  est une constante donnée).

1° Discuter sommairement les circonstances du mouvement. Il sera commode de faire cette discussion sur l'équation différentielle qui détermine  $\cos \theta = u$  en fonction du temps.

2° Préciser la discussion précédente dans le cas particulier où, à l'instant initial,  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{d\theta}{dt} = 0$ ,  $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$  (donnée). On discutera par rapport à  $\omega$ , et l'on examinera si, dans le mouvement,  $\theta$  prend des valeurs plus grandes ou plus petites que  $\frac{\pi}{4}$ .

3° Les données initiales restant celles de la question précédente, on suppose que le sommet C est au contact d'un plan horizontal fixe, placé au-dessous du losange. Évaluer la réaction au contact (on pourra traiter la question comme problème d'équilibre relatif).

ÉPREUVE PRATIQUE. — Un fil inextensible, homogène et pesant, est fixé par l'une de ses extrémités A. La portion AB du fil est verticale, il s'enroule ensuite suivant la section droite BCDB d'un cylindre fixe de révolution dont l'axe est horizontal; enfin l'extrémité BE du fil pend verticalement.

On donne :  $p =$  poids de l'unité de longueur du fil;  $a =$  longueur BE; on néglige les frottements au contact du fil et du cylindre.

Condition de possibilité de l'équilibre :

On suppose que l'extrémité A, au lieu d'être fixée, est tenue à la main et qu'on lui imprime un mouvement uniforme suivant la verticale. Qu'y a-t-il de changé dans les réactions du cylindre ?

(Marseille, juin 1927.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. C. 122. — Un triangle équilatéral ABC est constitué par trois tiges homogènes infiniment minces, de masse commune  $m$  et de longueur commune  $2a\sqrt{3}$ . Ce triangle peut tourner sans frottement autour d'un axe vertical, perpendiculaire à son plan et passant par son centre O.

Un point P, de masse  $2m$ , peut glisser sans frottement le long de la tige BC. Il est en outre attiré par O suivant une force égale à  $k.PO$ ,  $k$  désignant un facteur constant.

On place ce point P en une position initiale quelconque  $P_0$ , sur BC, et l'on abandonne tout le système sans vitesse initiale. Déterminer le mouvement qui prend naissance.

On établira, en particulier, les équations paramétriques cartésiennes de la trajectoire du point P, en prenant pour origine le point O et pour axe des  $x$  la position occupée par la hauteur AH issue du

sommet A au sommet où P passe au milieu de BC. On prendra pour paramètre l'angle  $\theta$  de Ox avec OH..

II. Un disque circulaire homogène, infiniment plat, peut tourner sans frottement autour d'un axe fixe Ox perpendiculaire à son plan et passant par son centre. Il peut également glisser sans frottement le long de cet axe. Il est en outre appuyé, avec une force normale constante N, contre un plan P parallèle à Ox. Le coefficient de frottement entre ce plan et le disque est f.

On lance le disque, à partir du point O, avec une vitesse de translation V et une vitesse angulaire de rotation  $\omega$ . Déterminer le mouvement qui prend naissance.

On construira l'hodographe correspondant au vecteur vitesse de glissement du disque sur le plan P. Puis, on calculera la durée totale du mouvement, le chemin total parcouru par le centre du disque et l'angle total dont tourne le disque autour de Ox.

On examinera à part les cas particuliers  $V = 0$ ,  $\omega > 0$  et  $V > 0$ ,  $\omega = 0$ .

ÉPREUVE PRATIQUE. — Un cylindre creux horizontal H a pour rayon  $4^m$ . A l'intérieur de ce cylindre reposent deux autres cylindres pleins et homogènes, A et B, de rayons respectifs  $2^m$  et  $1^m$  et de masses respectives 3 et 2. Ces deux cylindres roulent sans glisser sur H et glissent sans frottement l'un contre l'autre. Le cylindre H étant supposé fixe, déterminer la position d'équilibre des cylindres A et B. Démontrer que cet équilibre est stable et calculer la durée des petites oscillations obtenues en abandonnant le système sans vitesse initiale dans une position très voisine.

On donne  $g = 9^m, 81$ .

(Clermont, juin 1927.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Entre deux plans horizontaux fixes P ou  $x_1 O_1 y_1$  et P' dont la distance est  $2R$  se meut sans frottement un corps solide pesant S formé d'un cylindre de révolution homogène de masse M, de rayon R, de hauteur  $2h = R\sqrt{3}$ , auquel sont fixés deux points matériels AA' de même masse  $m = \frac{M}{4}$ ; ces deux points sont symétriques l'un de l'autre par rapport au centre G du cylindre et sont situés sur les circonférences de base. Étudier le mouvement de ce solide.

On désignera par Gx l'axe de figure du cylindre (cet axe est horizontal), par Gy la perpendiculaire au plan AGx, et par Gz la perpendiculaire au plan Gxy. La position du corps sera déterminée par

$$\psi = (O_1 x_1, Gx), \quad \theta = (O_1 z_1, Gz),$$

et par  $\xi$  et  $\eta$ , coordonnées du point G suivant les axes fixés  $O_1x_1$  et  $O_1y_1$ .

1° Calculer en fonction de  $\xi, \eta, \psi, \theta$ , et de leurs dérivées par rapport au temps, la force vive du corps et les composantes suivant  $Gx, Gy, Gz$ , du moment cinétique de son mouvement autour de G.

2° Écrire les équations du mouvement : a, en s'aidant des équations de Lagrange; b, en n'utilisant que les théorèmes généraux,

3° Discuter le mouvement. Différents aspects. Montrer en particulier que, si  $\theta_0$  est suffisamment grand,  $\frac{d\psi}{dt}$  change de signe au cours du mouvement, pour quelle valeur de  $\theta$  ce changement se produit-il?

4° Déterminer en grandeur et position la résultante des actions de contact des plans P et P' sur le corps à l'instant où  $\theta$  passe par la valeur zéro.

Distinguer le cas où le cylindre appuie sur le plan P seul, ou sur les deux plans PP'.

5° Le cylindre étant dépouillé de ses deux points matériels A et A' et se trouvant au repos entre les deux plans PP', on lance ces deux points matériels avec des vitesses V égales et de sens opposés parallèlement à  $Gx$ , de telle manière que ces points matériels viennent s'incruster dans le cylindre en des points AA' symétriques par rapport à G le long des circonférences de bases, le plan AA'Gx faisant  $45^\circ$  ( $\theta = 45^\circ$ ) avec la verticale.

Déterminer les vitesses prises par le corps à la suite de ce choc.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — L'ellipsoïde central d'inertie a pour équation

$$\frac{MR^2}{8} (8x^2 + 11y^2 + 7z^2 - 4\sqrt{3}zx) = 1.$$

La force vive a pour expression

$$2T = \frac{3M}{2} (\xi'^2 + \eta'^2) + \frac{MR^2}{8} [8\theta'^2 + 11\psi'^2 \sin^2 \theta + 7\psi'^2 \cos^2 \theta - 4\sqrt{3}\theta'\psi' \cos \theta].$$

Les composantes du moment cinétique en G sont

$$\gamma_x = \frac{MR^2}{8} [8\theta' - 2\sqrt{3}\psi' \cos \theta],$$

$$\gamma_y = \frac{MR^2}{8} 11\psi' \sin \theta,$$

$$\gamma_z = \frac{MR^2}{8} [7\psi' \cos \theta - 2\sqrt{3}\theta'];$$

$\xi'$  et  $\eta'$  sont évidemment constants;  $\psi$  et  $\theta$  se déterminent soit par le théorème de la force vive et le théorème du moment cinétique appliqué à

la verticale de G dans le mouvement autour de G, soit en remplaçant cette dernière équation par l'équation de Lagrange du paramètre  $\psi$ .

Les équations du mouvement sont de la forme

$$\begin{aligned} \psi'(11 \sin^2 \theta + 7 \cos^2 \theta) - 2\sqrt{3} \theta' \cos \theta &= k, \\ 44(2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \theta'^2 &= h^2(11 \sin^2 \theta + 7 \cos^2 \theta) - k^2, \end{aligned}$$

$h$  et  $k$  étant des constantes d'intégrations.  $11 h^2$  est nécessairement supérieur à  $k^2$ . Si  $7 h^2$  est inférieur à  $k^2$ ,  $\theta$  oscille de part et d'autre de  $\frac{\pi}{2}$ , si  $7 h^2$  est supérieur à  $k^2$ , le mouvement est révolatif.

$\psi'$  change de signe au cours du mouvement, si  $\theta'$  prend la valeur  $\frac{k}{2\sqrt{3} \cos \theta}$ , ce qui donne la condition

$$2k^2 = 3h^2 \cos^2 \theta.$$

Ce changement de signe ne se produit que dans le cas du mouvement révolatif, à condition bien entendu que  $3h^2$  soit supérieur à  $2k^2$ .

La résultante des réactions est évidemment égale au poids du corps. L'abscisse  $\lambda$  du point où elle rencontre  $Gx$  s'obtient en appliquant le théorème du moment cinétique par projection sur  $Gy$ .

On obtient ainsi

$$\frac{d\gamma_y}{dt} + r\gamma_x - p\gamma_z = -\lambda \frac{3Mg}{2} \cos \theta;$$

soit, dans l'hypothèse  $\theta = 0$  :

$$\frac{MR^2}{8} [\psi' \theta' + \psi'(8\theta' - 2\sqrt{3}\psi') - \theta'(7\psi' - 2\sqrt{3}\theta')] = -\lambda \frac{3Mg}{2},$$

où l'on a

$$7\psi' - 2\sqrt{3}\theta' = k; \quad 44\theta'^2 = 7h^2 - k^2.$$

Dans le choc mentionné dans l'énoncé, le centre de gravité reste fixe, l'état des vitesses s'obtient en écrivant la conservation du moment cinétique par rapport à  $Gx$  et par rapport à la verticale de G, de manière à éliminer les percussions de contact dues aux plans P et P'. On a donc

$$\begin{aligned} 8\theta' - 2\sqrt{3}\psi' \cos \theta &= 0, \\ \frac{MR^2}{8} [7\psi' \cos \theta - 2\sqrt{3}\theta'] \cos \theta + \frac{MR^2}{8} 11\psi' \sin^2 \theta &= -\frac{M}{2} R \sin \theta V. \end{aligned}$$

**ÉPREUVE PRATIQUE.** — Une sphère homogène pesante S de masse M, de rayon R, repose sur une sphère creuse concentrique fixe S' de centre O, par l'intermédiaire d'une couronne de billes  $\Sigma$ ; la sphère S a ainsi son centre fixe en O, elle peut prendre autour de ce point toutes les orientations.

La couronne  $\Sigma$  est un anneau de révolution présentant des cavités contenant des billes (par exemple trois billes au sommet d'un triangle équilatéral). Le frottement sera négligé au contact de la couronne et des billes, mais non pas bien entendu au contact des billes et des sphères S et S', où l'on supposera nulle la vitesse de glissement.

La masse des billes sera négligée. La masse de la couronne  $\Sigma$  sera désignée par  $m$ , la distance de son centre de gravité au point O sera désignée par  $l$ ;  $a$ ,  $a_1$ ,  $c$  désignant les moments principaux d'inertie de la couronne au point O.

1° Le diamètre des billes étant négligé vis-à-vis de R, montrer sans calculs que dans tout mouvement où les billes roulent sans glisser sur S et S', la rotation instantanée de la couronne a la même direction que la rotation instantanée de la sphère S et en vaut la moitié.

2° Montrer, sans calculs, que les forces de frottement aux deux points P et P' où une bille touche S et S' sont égales et parallèles.

3° Cela posé, on définira la position de la couronne par les angles d'Euler classiques  $\omega$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$  désignant l'angle de la verticale avec la perpendiculaire Oz abaissée du point O sur le plan de la couronne et l'on déterminera les composantes du moment cinétique de la sphère S et de la couronne  $\Sigma$  au point O, composantes prises suivant Ox horizontale, perpendiculaire au plan vertical contenant Oz; suivant Oy perpendiculaire au plan  $zOx$ ; et suivant Oz.

On exprimera le théorème du moment cinétique pour la sphère, puis pour la couronne, en utilisant : 1° l'axe verticale de O; 2° l'axe Oz comme axes de projection. On désignera par  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{N}$  les moments par rapport à Ox, Oy, Oz des réactions de S sur l'ensemble des trois billes. Ces moments sont aussi ceux des réactions de S' d'après 2°. On exprimera également le théorème de la force vive.

Des équations ainsi écrites, on déduira que le mouvement de la couronne est identique à celui d'une toupie pesante dont on indiquera les caractéristiques.

Dire si l'emploi des équations de Lagrange se justifie ici ?

4° Le mouvement peut avoir lieu avec  $\theta$  constant; dans cette hypothèse, sachant que la rotation propre  $\varphi'$  de la couronne est de 100 tours par seconde, que  $\theta = \frac{\pi}{6}$ , que  $M = 500^g$ ; que  $R = 5^{\text{cm}}$ ,  $l = 3^{\text{cm}}$ ,  $m = 5^g$ , que  $a$  et  $c$  sont égaux entre eux et définis par un même rayon de giration valant  $4^{\text{cm}}$ , calculer la vitesse angulaire  $\psi'$  du plan vertical contenant Oz; indiquer les moments par rapport à Ox, Oy, Oz des réactions exercées par les billes sur la sphère S, et indiquer quel est le diamètre de la sphère S qui décrit un cône de révolution autour de la verticale.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — 1° Le point P d'une bille a la même vitesse que le point P de la sphère S, puisqu'il n'y a pas glissement. Or la

vitesse du centre de la bille est la moitié de la précédente. Il existe donc trois points de  $\Sigma$  (les centres des trois billes) dont les vitesses s'obtiennent en réduisant dans le rapport  $\frac{1}{2}$  les vitesses des points de  $S$  immédiatement voisins.

La rotation instantanée de la couronne s'obtient donc en réduisant dans le rapport  $\frac{1}{2}$  la rotation instantanée de  $S$ .

2° La bille considérée étant sans masse, les réactions en  $P$  et  $P'$  doivent avoir un moment résultant nul au centre de la bille, d'où la propriété.

3° Le théorème du moment cinétique en projetant sur la verticale de  $O$  s'écrit

$$\text{(sphère)} \quad 2 \frac{MR^2}{5} \frac{d}{dt} (2\psi' + 2\varphi' \cos \theta) = - (\mathcal{M} \sin \theta + \mathcal{N} \cos \theta),$$

$$\text{(couronne)} \quad \frac{d}{dt} [a\psi' \sin^2 \theta + c(\varphi' + \psi' \cos \theta) \cos \theta] = 2\mathcal{M} \sin \theta + 2\mathcal{N} \cos \theta.$$

En projetant sur  $Oz$ , on obtient

$$\text{(sphère)} \quad 2 \frac{MR^2}{5} \frac{d}{dt} (2\varphi' + 2\psi' \cos \theta) = - \mathcal{N},$$

$$\text{(couronne)} \quad c \frac{d}{dt} (\varphi' + \psi' \cos \theta) = 2\mathcal{N}.$$

De ces équations, on déduit, par élimination de  $\mathcal{M}$  et de  $\mathcal{N}$ ,

$$\left( a + \frac{8MR^2}{5} \right) \psi' \sin^2 \theta + \left( c + \frac{8MR^2}{5} \right) (\varphi' + \psi' \cos \theta) \cos \theta = \text{const.},$$

$$\varphi' + \varphi' \cos \theta = \text{const.}$$

Le théorème de la force vive au système entier donne

$$\begin{aligned} \frac{8MR^2}{5} [\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2 \theta + (\varphi' + \psi' \cos \theta)^2] + a(\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2 \theta) + c(\varphi' + \psi' \cos \theta)^2 \\ = 2mgl \cos \theta + h. \end{aligned}$$

Ces équations sont celles du mouvement d'une toupie pesante dont les moments principaux d'inertie seraient  $a + \frac{8MR^2}{5}$  et  $c + \frac{8MR^2}{5}$ , le moment de la pesanteur étant  $mgl$ .

L'emploi des équations de Lagrange ne se justifie pas, car les liaisons ne sont pas holonomes. L'établissement de ces équations suppose en effet la possibilité de calculer, avant toute étude du mouvement, les coordonnées de chaque élément de matière en fonction des paramètres choisis  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ ; il n'en est pas ainsi pour les éléments matériels de la sphère. Cependant les équations de Lagrange qu'on écrivait avec l'expression ci-dessus de la

force vive sont exactes, mais le raisonnement par lequel on les établit ne les justifie pas. Elles se justifient cependant indirectement puisqu'on est ramené au mouvement d'une toupie pesante.

4° L'équation de Lagrange relative au paramètre  $\theta$  donne la condition de mouvement stationnaire ( $\theta = \text{const.}$ ) :

$$\psi' = - \frac{mgl}{\left(c + \frac{8MR^2}{5}\right)\varphi'}$$

soit, avec les chiffres donnés,  $\frac{1}{5300}$  tour par seconde.

### CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. C. 123. — *Que devient l'équation différentielle*

$$x(x^3 + 3xy^2 + 2y^3) - y(2x^3 + 3x^2y + y^3) \frac{dy}{dx} = 0$$

*après le changement de variable  $y = tx$ ? Montrer que la solution de l'équation qui relie  $x$  et  $t$  peut se mettre sous la forme*

$$x = \frac{A(t)}{t^3 - 1},$$

*$A(t)$  étant un polynome que l'on déterminera.*

*Construire celle des courbes intégrales de l'équation (E) qui rencontre  $Ox$  au point d'abscisse  $-1$ .*

II. *On considère trois axes rectangulaires  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ . Un segment  $AB$ , de longueur 1, se déplace en restant parallèle au plan  $xOy$ , de telle sorte que son extrémité  $A$  décrive l'axe  $Oz$  et son extrémité  $B$  l'arc d'hélice*

$$x = \cos \varphi, \quad y = \sin \varphi, \quad z = \varphi \quad \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right).$$

*Il engendre ainsi une surface (S).*

*Évaluer le volume compris entre cette surface, le plan  $xOy$ , le plan  $yOz$  et le cylindre  $x^2 + y^2 = 1$ .*

*Calculer le moment d'inertie par rapport à  $Oz$  de ce même volume supposé rempli de matière homogène de densité 1.*

III. Étudier la fonction de  $x$

$$y = \int_0^x \frac{t \, dt}{\sqrt[3]{t^3 - 1}}$$

et en donner la représentation graphique.

On ne cherchera pas à évaluer la primitive; on se contentera d'examiner si la fonction a un sens pour toutes les valeurs de  $x$ , si elle présente des maxima et des minima et d'en faire l'étude à l'infini en déterminant s'il y a lieu l'asymptote.

MÉCANIQUE. — I. C. 124. — Un fil élastique dont la longueur naturelle est 1 est attaché par une de ses extrémités en un point fixe A, il passe sur une petite poulie fixe O située sur la verticale du point A et à une distance 1 au-dessus de ce point, il supporte ensuite une petite poulie mobile B à laquelle est suspendue un poids P; enfin, l'autre extrémité C du fil est soumise à une force F.

La position du point C étant supposée donnée, déterminer la force F de telle façon que le système soit en équilibre.

La force F varie naturellement suivant la position du point C. Montrer que le champ de forces ainsi défini dérive d'une fonction de forces. En tracer les surfaces de niveau et les lignes de forces.

N. B. — On admettra que la tension du fil est proportionnelle à son allongement et l'on assimilera les poulies à des points.

II. Un pendule simple de longueur 5a oscille dans un plan vertical. Sur la verticale du point de suspension et à une distance 4a en dessous est fixé un clou perpendiculaire au plan d'oscillation. Le pendule oscille alors vers la gauche avec la longueur 5a et vers la droite avec la longueur a seulement.

On écarte le pendule à partir de la position verticale et vers la gauche d'un angle  $\alpha$ . Entre quelles limites cet angle doit-il être compris pour que le fil reste tendu dans la suite de son mouvement?

ÉPREUVE PRATIQUE. — Étudier les variations de la fonction

$$y = 2x^5 - 10x^4 - 5x^2 + 40x.$$

Combien l'équation  $2x^5 - 10x^4 - 5x^2 + 40x = 0$  a-t-elle de racines réelles? Calculer à 0,001 près la plus petite racine positive  $\alpha$ .

Évaluer l'aire comprise entre la courbe représentative de la fonction proposée et le segment de l'axe Ox compris entre les points d'abscisses 0 et  $\alpha$ . Avec quelle approximation le calcul précédemment fait permet-il de trouver l'aire demandée?

(Strasbourg, novembre 1926.)



ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Les axes étant rectangulaires, on considère, dans la région où  $x$  et  $y$  sont positifs, une boucle de lemniscate, que l'on pourra définir à volonté par l'équation*

$$(x^2 + y^2)^2 = xy,$$

*ou par les équations paramétriques*

$$x = \frac{t}{1+t^4}, \quad y = \frac{t^3}{1+t^4},$$

*ou enfin par l'équation polaire*

$$\rho^2 = \cos \theta \sin \theta.$$

1° *Calculer l'intégrale double  $I = \iint (x^2 + y^2) dx dy$ , étendue à l'aire limitée par cette boucle.*

2° *Calculer l'intégrale curviligne  $J = \int x^3 dy - y^3 dx$ , étendue au contour de cette boucle, parcouru dans le sens positif.*

3° *Expliquer la relation simple qui existe entre les intégrales I et J, que l'on vient de calculer directement.*

II. C. 125. — *Soit une courbe plane (C), rapportée à deux axes rectangulaires  $Ox, Oy$ . Soient M un point quelconque de cette courbe, R le rayon de courbure algébrique en ce point et T le point de rencontre de la tangente en M avec  $Ox$ .*

1° *Déterminer la courbe (C) de telle manière que l'on ait*

$$R = \overline{MT} + 2.$$

2° *Montrer que, parmi les courbes (C), il en existe une  $\Gamma$ , qui passe par le point de coordonnées (1, 1) et qui jouit en outre de la propriété suivante :*

*On peut construire un carré de sommet M et ayant un côté porté par MT et de longueur constante, tel que le sommet P opposé à M soit constamment sur  $Ox$ .*

3° *Construire la courbe  $\Gamma$ .*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un point pesant M, de poids  $3^{kg}$ , est attiré par un point fixe O proportionnellement à la distance OM. Lorsque  $OM = 10^m$ , cette attraction est égale à  $5^{kg}, 24$ .*

*On lance le point, à partir de O, avec une vitesse de  $8^m$  par seconde. Dans quelle direction faut-il le lancer pour qu'il rencontre le plan horizontal passant par O à  $3^m, 50$  de ce dernier point et dans le minimum de temps. Calculer ce temps.*

*On donne  $g = 981$  C. G. S.*

(Clermont, juin 1927.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° *Calculer les racines complexes de l'équation binôme*

$$z^4 = -1$$

*et marquer les points représentatifs sur le plan  $z = re^{i\theta}$ .*

2° Déduire de ce calcul une décomposition du polynome  $z^4 + 1$  en deux polynomes du deuxième degré à coefficients réels

$$z^4 + 1 = (z^2 + pz + q)(z^2 + p'z + q').$$

3° Calculer l'intégrale  $\int \frac{ax^2 + bx + c}{x^4 + 1} dx$ ; appliquer la formule trouvée au calcul de

$$\int_0^{+\sqrt{2}} \frac{dx}{x^4 + 1} \quad (a, b, c \text{ constantes}).$$

II. Ayant choisi une origine I et un sens positif sur une courbe plane ( $\gamma$ ), on désigne par S l'arc IM et par  $\sigma$  l'angle de Ox avec la tangente positive u.

1° Démontrer que si le rayon de courbure est une fonction connue de  $\sigma$ :  $R = f(\sigma)$ , on peut, par deux quadratures, obtenir l'expression paramétrique des coordonnées  $x$  et  $y$  de M en fonction de  $\sigma$ ; on peut, sans nouvelle quadrature, en déduire les coordonnées  $x_c$  et  $y_c$  du centre de courbure  $c$ , ce qui définit paramétriquement la développée ( $\delta$ ) de ( $\gamma$ ). On désignera par  $x_0, y_0$  les coordonnées du point arbitraire I, par  $\alpha$  la valeur de  $\sigma$  en ce point.

2° Appliquer ces résultats généraux à  $R = k\sigma$ ; construire en particulier les courbes ( $\delta_0$ ) et ( $\gamma_0$ ) correspondant à  $x_0 = y_0 = 0, \alpha = 0$ ; démontrer géométriquement sur cet exemple la propriété du rayon de courbure exprimée par l'équation  $R = k\sigma$ ; déduire de ce cas particulier la construction générale de ( $\delta$ ) et ( $\gamma$ ) quand  $x_0, y_0, \alpha$  sont arbitraires.

3° On considère sur la courbe précédente ( $\gamma_0$ ) le point  $M_0$ , où, en partant de  $I_0$ , la courbe coupe pour la première fois la droite  $x = -2k$ ; calculer la longueur de l'arc  $I_0M_0$ .

“ EPREUVE PRATIQUE. — On considère l'équation différentielle

$$y'' - y' + \lambda y = 10e^x - 2e^{2x}.$$

1° Déterminer son intégrale générale, en indiquant toutes les formes qu'elle prend lorsque la constante  $\lambda$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

2° En supposant  $\lambda = 0$ , déterminer l'intégrale particulière qui passe par le point  $x_0 = 0, y_0 = -1$ , sa tangente en ce point ayant pour pente  $m_0 = 8$ ; construire la courbe représentative, déterminer les points remarquables (maxima, minima, racines, inflexions) avec 3 chiffres exacts.

Nota. — Toute méthode correcte (construction graphique, formule d'interpolation) sera admise pour la résolution des équations qui déterminent les points demandés. (Lille, juin 1927.)

EPREUVE THÉORIQUE. — I. Étant donnée la série entière en  $x$

$$\frac{x^2}{1,2} - \frac{x^3}{2,3} + \frac{x^4}{3,4} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{(n-1)^n} + \dots$$

déterminer l'intervalle de convergence de cette série : est-elle convergente aux extrémités?

Former dans cet intervalle une expression simple de la somme  $S(x)$  de la série, par comparaison avec une série entière connue.

Représenter graphiquement la somme  $S(x)$  : la courbe obtenue a-t-elle des points d'inflexion?

II. Déterminer le centre de gravité de l'arc de cycloïde supposé homogène représenté par les équations

$$x = R(\varphi - \sin \varphi), \quad y = R(1 - \cos \varphi)$$

quand le paramètre  $\varphi$  varie de 0 à  $\pi$ . On calculera successivement :

- 1° La longueur de cet arc;
- 2° L'ordonnée  $y$  du centre de gravité;
- 3° Son abscisse  $X$ .

III. Donner l'intégrale du système différentiel

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= z + \cos x + \cos 2x, \\ \frac{dz}{dx} &= -y + x^2 + e^x \cos x, \end{aligned}$$

définie par les conditions initiales

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

et deux intégrales premières qui soient des polynômes du premier degré en  $y$  et  $z$ , dont les coefficients dépendent de  $x$ .

SOLUTION. — Dans la série des valeurs absolues le rapport d'un terme au précédent

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |x| \frac{n}{n+2}$$

tend, quand  $n$  tend vers l'infini, vers  $|x|$ . Donc, d'après la règle de d'Alembert, l'intervalle de convergence est l'intervalle  $-1, +1$ . Pour  $x = -1$ , la série a pour terme général

$$\frac{1}{n|n+1|} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

et la somme des  $n$  premiers termes est égale à  $1 - \frac{1}{n+1}$ , et la série est convergente et a pour somme l'unité; d'ailleurs aussi le terme général a pour partie principale  $\frac{1}{n^2}$  et le produit  $n^2 u_n$  tend vers 1, d'où résulte encore la convergence de la série. Pour  $x = 1$ , la série est par suite absolument convergente, et d'ailleurs aussi c'est une série alternée dont le terme général tend vers zéro en décroissant constamment.

En dérivant terme à terme la série proposée, on obtient la série qui donne le développement classique de  $\log(1+x)$ ; donc pour  $-1 < x < 1$ ,

on a

$$S(x) = \int_0^x \log(1+x) dx = (x+1) \log(1+x) - x.$$

D'où résulte la courbe qui n'a pas de points d'inflexions, puisque

$$S''(x) = \frac{1}{1+x}.$$

On peut remarquer que, si l'on forme directement pour  $x = -1$  et  $x = 1$  la somme de la série, soit  $1$  et  $2 \log 2 - 1$ , on obtient les valeurs limites de l'expression précédente quand  $x$  tend vers  $-1$  ou  $+1$ .

II. Le carré de l'élément d'arc par expression

$$ds^2 = R^2 [(1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi] d\varphi^2 = 2R^2(1 - \cos \varphi) d\varphi^2 = 4R^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} d\varphi^2,$$

d'où

$$L = \int_0^\pi 2R \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = 4R \left( -\cos \frac{\varphi}{2} \right)_0^\pi = 4R$$

et

$$4Ry = \int_0^\pi 2R^2(1 - \cos \varphi) \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi, \quad 4Rx = \int_0^\pi 4R^2(\varphi - \sin \varphi) \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi.$$

Les deux intégrales se calculent par les procédés classiques, et ont pour valeur commune  $\frac{16R^2}{3}$ . Donc les coordonnées  $x$  et  $y$  sont égales toutes deux à  $\frac{4R}{3}$ .

III. L'élimination de la fonction  $z$  donne l'équation linéaire du second ordre en  $y$  :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = x^2 + e^x \cos x - \sin x - 2 \sin 2x;$$

dont l'intégrale générale se forme par les procédés classiques :

$$y = A \cos x + B \sin x + x^2 - 2 + \frac{e^x}{5} (\cos x + 2 \sin x) + \frac{x}{2} \cos x + \frac{2}{3} \sin 2x,$$

$A$  et  $B$  désignant deux constantes arbitraires. On tire de la première équation la valeur correspondante de  $z$  :

$$z = -A \sin x + B \cos x + 2x + \frac{e^x}{5} (3 \cos x + \sin x) - \frac{\cos x}{2} - \frac{2 \sin x}{2} + \frac{\cos 2x}{3}.$$

Les conditions initiales  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  donnent les valeurs des constantes

$$A = \frac{9}{5}, \quad B = \frac{13}{30}.$$

On obtient les deux intégrales premières demandées en résolvant les deux formules donnant les expressions de  $y$  et  $z$ , par rapport aux deux constantes  $A$  et  $B$ .

(Paris, juin 1927).

---

---

SUR L'INTERSECTION D'UN TORE ET D'UNE QUADRIQUE;

PAR HENRI LEBESGUE.

---

1. M. Ilievici a donné récemment (*Nouvelles Annales*, janvier 1927), une démonstration très élémentaire et très élégante de la proposition suivante :

*La courbe intersection d'une sphère et d'un tore est située sur un cône du second ordre dont le sommet est sur l'axe du tore et qui admet cet axe pour droite focale, c'est-à-dire que la section du cône par un plan perpendiculaire à l'axe du tore est une conique qui admet le pied de cet axe pour foyer. Dans cet énoncé, on n'envisage pas le cercle à l'infini commun à toute sphère et à tout tore.*

Je vais d'abord reprendre la démonstration du théorème de M. Ilievici pour attirer l'attention des Lecteurs des *Nouvelles Annales* sur deux remarques très simples qui fournissent la raison profonde de bien des propriétés du tore.

2. La première de ces remarques peut s'énoncer ainsi : *le tore se transforme en lui-même dans une infinité d'inversions*; on peut prendre pour centre d'une de ces inversions un point quelconque  $I$  de l'axe  $X'X$  du tore  $T$ . Cette remarque bien connue conduit naturellement, dans la question actuelle, à se demander si  $I$  ne peut pas être choisi de façon que cette inversion transforme aussi en elle-même la sphère donnée  $S$ . Cela est évidemment possible, il faut et il suffit que  $I$  soit à l'intersection  $I_0$  de  $X'X$  avec le plan radical de  $S$  et de l'une des sphères ayant pour grand cercle un méridien de  $T$ .

Or, la courbe  $A$ , commune à  $S$  et  $T$  est, non compris le cercle à l'infini, du quatrième ordre; tout cône ayant pour directrice  $A$  et un sommet non situé sur  $A$ , sera donc du quatrième ordre. Mais si ce sommet est en  $I_0$ , toute génératrice du cône contient deux points de la courbe  $A$ , le cône sera donc double, il se réduira à un

cône C du second ordre, pris deux fois. C'est la première partie du théorème de M. Ilivici.

3. La deuxième partie, qui est en réalité une propriété commune à toutes les courbes du tore, résulte de la remarque suivante : *chacun des deux plans isotropes passant par l'axe d'un tore touche ce tore suivant deux droites isotropes parallèles.*

Un plan P passant par l'axe  $X'X$  du tore T le coupe suivant deux cercles méridiens; ces cercles passent par les deux points coniques A et A' du tore, situés sur  $X'X$ , et sont les lieux des points en lesquels P coupe les divers parallèles de T. Si l'on prend pour P le plan isotrope  $P_0$ , il ne coupe plus à distance finie aucun des parallèles de T, sauf ceux de rayon nul des points A et A'. Chacun de ceux-ci donne, dans  $P_0$ , une droite isotrope : la droite isotrope issue de A ou A'; droite bien déterminée puisque, dans le plan isotrope  $P_0$ , il n'y a qu'une direction isotrope. L'ensemble de ces deux droites isotropes parallèles constitue la position limite de l'un comme de l'autre des deux cercles méridiens que l'on trouvait dans P quand P n'était pas isotrope. La section de T par le plan isotrope  $P_0$  est donc constituée par ces deux droites prises doubles, ce qui justifie notre remarque.

Si donc une courbe  $\Lambda$  du tore, rencontre en  $n$  points, situés à distance finie et différents de A et A', les deux droites du tore situées dans le plan isotrope  $P_0$  passant par l'axe  $X'X$ ,  $\Lambda$  est tangente en ces  $n$  points à  $P_0$ , sauf si ces points sont singuliers pour  $\Lambda$ . Et comme il en est de même pour le second plan isotrope  $P'_0$  passant par  $X'X$ , tout cône, admettant  $\Lambda$  pour directrice et pour sommet un point I de  $X'X$ , admettra  $X'X$  comme droite focale  $n^{\text{uple}}$ ; à moins que I n'ait été choisi en l'un des points où  $X'X$  rencontre les tangentes à  $\Lambda$  situées dans  $P_0$  ou  $P'_0$ . La seconde partie du théorème de M. Ilivici est comprise dans ce qui précède, que l'on peut encore énoncer en disant que, sauf les exceptions indiquées, la perspective de la courbe  $\Lambda$ , faite sur un plan perpendiculaire à l'axe  $X'X$  d'un point I de cet axe, admet le pied de l'axe pour foyer  $n^{\text{uple}}$ .

4. L'application la plus fréquente de cette remarque est relative au cas où I est pris à l'infini; on peut alors l'énoncer en disant :

le contour apparent d'un tore sur un plan perpendiculaire à son axe comprend, outre les deux cercles que l'on a l'habitude de considérer, le cercle de rayon nul, dont le centre est le pied de l'axe, pris deux fois. Utilisons, par exemple, cet énoncé pour caractériser la projection, sur un plan perpendiculaire à l'axe, d'un cercle  $\lambda$  du tore situé dans un plan bitangent.  $\lambda$  rencontre une fois et une seule chaque parallèle du tore, il rencontre donc une et une seule des droites isotropes du tore passant par A, soit  $\delta$ ; le cercle  $\lambda'$  symétrique de  $\lambda$  par rapport au centre O de T rencontre la droite  $\delta'$  symétrique de  $\delta$  par rapport à O, c'est-à-dire la parallèle à  $\delta$  issue de A'; donc  $\lambda$  rencontre l'autre droite isotrope issue de A', celle qui n'est pas parallèle à  $\delta$ . On s'explique ainsi que la projection de  $\lambda$  sur un plan perpendiculaire à l'axe ait, comme l'on sait, le pied de cet axe pour foyer, et seulement pour foyer simple.

5. M. Iliovici donne encore à la conclusion de son étude la forme suivante : *Pour qu'un cône ayant son sommet sur l'axe X'X d'un tore T le coupe suivant deux courbes sphériques, il faut et il suffit qu'il admette X'X pour focale.* Cette transformation d'énoncé se justifie de suite; on a vu que la condition était nécessaire. Elle est suffisante, car si un cône admet X'X pour focale, et si MN, PQ sont les deux génératrices de ce cône situées dans le plan principal passant par X'X, M et N étant sur l'un des cercles méridiens de ce plan et P et Q sur l'autre, les quatre points M, N, P, Q sont sur une circonférence, et la sphère dont cette circonférence est un grand cercle coupe le tore suivant une courbe située sur un cône, qui, admettant MN et PQ comme génératrices principales et X'X pour focale, est celui proposé; l'autre courbe sphérique s'obtient en associant différemment les génératrices principales et les cercles méridiens situés dans le plan principal du cône qui contient X'X.

La seconde de nos remarques nous permet de donner à la proposition de M. Iliovici la forme suivante : *Pour qu'un cône du second ordre ayant son sommet sur l'axe d'un tore coupe ce tore suivant deux courbes sphériques, il faut et il suffit qu'il soit quadruplement tangent au tore.* Le cône et le tore que nous avons considérés sont, en effet, tangents aux quatre points

où les deux génératrices du cône situées dans les plans isotropes passant par  $X'X$  coupent les quatre droites du tore. Cette forme d'énoncé, que je ne justifierai pas plus complètement, suggère des généralisations que nous allons examiner.

6. L'intersection d'un tore et d'une quadrique est du huitième ordre, les cas de décomposition sont donc les suivants :

Une courbe du septième ordre et une droite;

Une courbe du sixième ordre et une conique ou deux droites;

Une courbe du cinquième ordre et une cubique, ou une conique et une droite, ou trois droites;

Deux courbes du quatrième ordre, lesquelles peuvent se décomposer.

Nous connaissons les droites situées sur le tore; les coniques du tore sont les trois espèces de circonférences qu'il contient et le cercle de l'infini; quelles sont les cubiques du tore? Si  $\Lambda$  est une de ces cubiques, faisons passer une sphère  $\Sigma$  par quatre points de  $\Lambda$ , pris à distance finie. Cette sphère coupe  $\Lambda$  en ces quatre points et aux trois points à l'infini de  $\Lambda$ , car  $\Lambda$ , comme toute courbe du tore, n'a que des directions isotropes pour directions asymptotiques. Donc  $\Sigma$  coupe  $\Lambda$  en sept points,  $\Sigma$  contient  $\Lambda$ . L'intersection à distance finie de  $\Sigma$  et du tore contient donc, outre  $\Lambda$ , une droite; cette droite passant nécessairement par l'un des deux points coniques du tore donc  $\Sigma$  et  $\Lambda$  passent par l'un de ces points.

En se reportant à notre tableau de décomposition, on voit alors que les courbes du septième et du cinquième ordre sont fournies par des quadriques passant par l'un au moins des points coniques du tore, et, par suite, passent elles-mêmes par un de ces points <sup>(1)</sup>.

Si donc nous laissons de côté les quadriques passant par les points coniques du tore, nous n'aurons plus à nous occuper que des cas de décomposition en courbes d'ordre pair; les décompositions ainsi laissées de côté sont d'ailleurs relatives au domaine imaginaire seulement puisque les courbes d'ordre impair du tore, n'ayant aucune direction asymptotique réelle, sont imaginaires.

---

(1) La proposition est plus générale : toute courbe d'ordre impair tracée sur un tore passe par l'un de ses points coniques; on le voit à l'aide de l'inversion transformant le tore en un cône.



Si nous laissons aussi de côté les quadriques passant par l'un des cercles du tore, il ne restera plus à considérer que les décompositions en deux courbes du quatrième ordre. Nous serons ainsi dispensés de l'étude de tous les cas de décomposition possibles — étude d'ailleurs facile et excellente comme exercice — et nous pourrons plus rapidement généraliser le résultat de M. Ilievici.

7. Si une quadrique  $Q$  coupe un tore  $T$  suivant deux courbes du quatrième ordre  $\Lambda$ ,  $\Lambda_1$ , deux cas sont possibles : ou bien une génératrice de  $Q$  rencontre  $\Lambda$  en deux points, elle rencontre alors  $\Lambda_1$  en deux points,  $\Lambda$  et  $\Lambda_1$  sont deux biquadratiques; ou bien une génératrice de  $Q$  rencontre l'une des deux courbes  $\Lambda$  et  $\Lambda_1$  en trois points et l'autre en un point,  $\Lambda$  et  $\Lambda_1$  sont deux courbes unicursales du quatrième ordre. Examinons d'abord ce cas.

Faisons la perspective (ou projection stéréographique) d'un point  $\Omega$  de  $Q$ , non situé sur  $\Lambda$  et  $\Lambda_1$ , comme centre.  $\Lambda$  et  $\Lambda_1$  se projettent suivant deux quartiques  $\lambda$  et  $\lambda_1$  qui passent par les points d'intersection  $i$  et  $j$  du plan de projection et des génératrices de  $Q$  passant par  $\Omega$ .  $\lambda$  aura, par exemple,  $i$  pour point triple et  $j$  pour point simple; alors  $\lambda_1$  admet  $i$  pour point simple et  $j$  pour point triple.  $i$  et  $j$  comptent donc pour  $2 \times 3 = 6$  points dans l'intersection de  $\lambda$  et  $\lambda_1$ ; il reste 10 autres points d'intersection de  $\lambda$  et  $\lambda_1$  qui correspondent à 10 points de rencontre de  $\Lambda$  et  $\Lambda_1$ . Quatre de ces points sont les points de rencontre de  $Q$  et du cercle à l'infini; il reste 6 points qui sont en général distincts et à distance finie. Ce sont 6 points de contact de  $Q$  et de  $T$ .

Réciproquement, si  $Q$  et  $T$  sont tangents en 6 points, la perspective de l'intersection de  $Q$  et de  $T$  est une courbe du huitième ordre admettant  $i$  et  $j$  pour points quadruples, donc comptant chacun pour 6 points doubles. En plus de ces 12 points doubles, la perspective admet 6 points doubles provenant des 6 points de contact et 4 points doubles provenant des points de rencontre de  $Q$  et du cercle de l'infini; soit au total 22 points doubles. Or, le nombre maximum des points doubles d'une courbe du huitième ordre indécomposable est 21, donc l'intersection de  $Q$  et  $T$  se décompose et en deux quartiques puisque nous avons écarté les autres cas de décomposition. Nous ne pouvons cependant pas affir-

mer que ces quartiques sont de la nature considérée, mais en anticipant sur les résultats du paragraphe précédent, on peut conclure :

*Pour qu'une quadrique Q, ne contenant aucun des cercles ni aucun des points coniques d'un tore T, le coupe suivant deux quartiques unicursales, il faut que Q et T soient tangentes en six points; si cette condition est réalisée, l'intersection de Q et T se décompose en deux quartiques qui sont unicursales; lorsque la condition indiquée au paragraphe suivant est aussi vérifiée, les quartiques sont des biquadratiques à point double.*

8. *Pour qu'une quadrique Q coupe un tore T suivant deux biquadratiques, il faut et il suffit que Q et T soient tangentes en quatre points formant un quadrilatère plan et inscriptible.* En effet, si l'intersection de Q et T se compose de deux biquadratiques  $\Lambda_1, \Lambda_2$ , on peut par  $\Lambda_1$  et un point du cercle de l'infini, non situé sur  $\Lambda_1$ , faire passer une quadrique  $\Sigma_1$ , laquelle est une sphère puisqu'elle coupe le cercle à l'infini en cinq points. Ainsi,  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  sont tracées sur deux sphères  $\Sigma_1, \Sigma_2$ ; ces sphères se coupent suivant une circonférence  $\sigma$  dont les quatre points de rencontre à distance finie avec T sont des points communs à  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$ , en lesquels Q et T sont tangents.

Réciproquement, si Q et T sont tangents en quatre points situés sur une circonférence  $\sigma$ , faisons passer une sphère  $\Sigma$  par  $\sigma$  et un point P commun à Q et T, situé à distance finie et en dehors de  $\sigma$ .  $\Sigma$  coupe l'intersection totale  $\Lambda$  de Q et T en les quatre points doubles de  $\Lambda$  situés sur  $\sigma$ , qui comptent chacun pour deux, en les quatre points doubles à l'infini de  $\Lambda$  et au point P. Cela fait 17 points, donc  $\Sigma$  contient une partie de  $\Lambda$ , et comme nous avons écarté les cas où  $\Lambda$  contiendrait une courbe de degré inférieur à quatre, la biquadratique commune à Q et  $\Sigma$  fait partie de  $\Lambda$ . La réciproque est démontrée.

9. On peut considérer ces propriétés sous un autre aspect : supposer donnée une biquadratique et se demander si l'on peut ou non la placer sur un tore? La réponse est immédiate : *il faut et il suffit que la biquadratique soit sphérique et ait un plan de symétrie.*

Il est clair que ces conditions sont nécessaires; si elles sont remplies, considérons l'un des cônes passant par la biquadratique  $\Lambda$  et qui ont leur sommet dans le plan de symétrie de  $\Lambda$ . Soient  $SAB$ ,  $SCD$  les deux génératrices principales de ce cône  $\Gamma$ ;  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  étant sur  $\Lambda$ . Soit  $SF$  une focale de  $\Gamma$  située dans le plan de symétrie de  $\Lambda$ . Considérons le tore  $T$  d'axe  $SF$  et dont les deux cercles méridiens passent respectivement par  $A$ ,  $B$  et  $C$ ,  $D$ ; il coupe la sphère contenant  $\Lambda$  suivant une biquadratique, qui, d'après le premier énoncé de M. Ilievici, est précisément située sur  $\Gamma$ , donc se confond avec  $\Lambda$ .

Ainsi, par la biquadratique passent six tores; on vérifiera de suite que les deux tores dont les axes  $SF$ ,  $S\Phi$  sont les deux focales d'un même cône  $\Gamma$  ont des méridiens égaux. Une étude des relations entre ces tores et avec la biquadratique supposerait bien connue les propriétés des cyclides; le Lecteur se reportera au Mémoire de Darboux : *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*.

10. On sait que la projection de l'intersection de deux tores dont les axes se rencontrent, faite sur le plan de ces axes, est une conique; en d'autres termes, il passe une quadrique par la partie à distance finie de l'intersection de deux tores dont les axes se rencontrent. Donc, les résultats précédents relatifs à la décomposition de l'intersection d'un tore et d'une quadrique s'étendent à la courbe d'intersection de deux tores dont les axes se coupent. On pourrait sans difficultés examiner tous les cas de décomposition de la courbe commune à deux tores; lorsque les axes se rencontrent des simplifications proviennent de l'existence du plan de symétrie de la figure.

---

---

## SUR LES SÉRIES NUMÉRIQUES CONVERGENTES A TERMES POSITIFS DONT LA SOMME EST RATIONNELLE;

PAR PAUL APPELL.

---

1° On peut établir un théorème général pour les séries numériques convergentes à termes positifs dont la somme est rationnelle.

Soit une série numérique

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

convergente à termes positifs.

La somme de la série est supposée rationnelle et égale à une fraction irréductible  $\frac{\lambda}{\mu}$ .

On écrit

$$\frac{\lambda}{\mu} = u_1 + u_2 + \dots + u_n + R_n = \Sigma_n + R_n$$

ou

$$\frac{p\lambda}{p\mu} = \Sigma_n + R_n,$$

$p$  étant un entier quelconque.

On peut prendre  $n$  assez grand pour que  $R_n$  soit plus petit que tout nombre  $\varepsilon$  si petit soit-il.

D'autre part

$$p\mu(u_1 + u_2 + \dots + u_n) = p\mu\Sigma_n$$

est une expression qu'on peut mettre sous la forme  $E_n + f_n$ ,  $E_n$  étant le plus grand entier contenu dans  $p\mu\Sigma_n$  et  $f_n$  un nombre moindre que 1.

On a alors une relation de la forme

$$p\lambda = E_n + f_n + p\mu R_n.$$

On peut prendre  $n$  assez grand pour que  $p\mu R_n < 1$ .

On a alors,  $E$  étant un entier égal à  $p\lambda - E_n$ ,

$$E = f_n + p\mu R_n,$$

$E$  est donc un entier positif. Comme  $f_n$  est au plus égal à 1, on a

$$E < 1 + p\mu R_n$$

ou

$$E < 2, \quad \text{car} \quad p\mu R_n < 1,$$

l'entier positif  $E$  étant inférieur à 2 ne peut être que 1. On a donc :

$$(1) \quad \begin{aligned} p\lambda &= E_n + 1, \\ f_n + p\mu R_n &= 1. \end{aligned}$$

Tel est le théorème que nous voulions établir.

Si la relation (1) n'a pas lieu pour tous les  $n$  tels que  $p\mu R_n < 1$ , l'hypothèse est fautive et la somme de la série n'est pas rationnelle.

2° Exemples

Voici deux exemples, l'un se rapportant à une série dont la somme est évidemment rationnelle et l'autre se rapportant à une série dont la somme est évidemment irrationnelle.

En désignant par  $x$  un nombre rationnel positif inférieur à 1 on a évidemment

$$\frac{\lambda}{\mu} = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{x}{1-x}$$

Supposons  $x = \frac{1}{7}$ . On aura

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{6},$$

$$\lambda = 1 \quad \mu = 6,$$

$$E_n = p - 1.$$

D'autre part

$$p\mu \Sigma_n = \frac{6p \left( \frac{1}{7} - \frac{1}{7^{n+1}} \right)}{1 - \frac{1}{7}} = p \left( 1 - \frac{1}{7^n} \right) = p - 1 + 1 - \frac{p}{7^n}.$$

Comme

$$p\mu R_n = 6p R_n = 6p \left( \frac{1}{7^{n+1}} + \frac{1}{7^{n+2}} + \dots \right)$$

$$= \frac{p}{7^n} \quad \left( \text{on suppose } 7^n > p \right).$$

la partie entière de  $p\mu \Sigma_n$  est bien  $p - 1$  pour les valeurs de  $n$  convenables.

Prenons comme second exemple le nombre  $e$  qui est manifestement incommensurable. On a alors

$$p\mu \Sigma_n = p\mu \left[ 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \dots + \frac{1}{n!} \right].$$

Prenons

$$p = 1.2 \dots (\mu - 1) (\mu + 1) \dots n.$$

Alors  $p\mu \Sigma_n$  est entier, donc

$$f = 0.$$

D'autre part

$$p\mu R_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots = \frac{1}{n};$$

il est donc impossible que

$$f_n + p\mu R_n = 1.$$

3° Dans les exemples précédents les termes  $u_n$  sont rationnels mais le théorème est général et s'applique à des séries dont le terme général serait irrationnel, par exemple à la série donnant C,

$$C = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots,$$

où

$$u_n = \frac{1}{n} - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Le fait que  $p\mu\Sigma_n + p\mu R_n$  c'est-à-dire que  $\Sigma_n + R_n$  est indépendant de  $n$ , pour  $n$  suffisamment grand, est évident car

$$\Sigma_n + R_n = S.$$

Ce fait est général, que la somme soit rationnelle ou non.

La condition  $f_n + p\mu R_n = 1$  qui est nécessaire pour que la somme de la série soit rationnelle est aussi suffisante; en effet,  $f_n$  diffère par un entier de  $p\mu\Sigma_n$ ; donc la série  $\Sigma_n + R_n$  est rationnelle.

La série qui définit C a ses termes irrationnels mais, d'après une remarque de M. Vacca, on peut les rendre rationnels.

On a, en effet,

$$C = \lim [H(h) - \log h]$$

où

$$H(h) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{h-1}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} (k-1)C &= \lim [kH(n+1) - H(n+1)^k] \\ &= \lim \Sigma_n \text{ (pour } n \text{ infini),} \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \Sigma_{n+1} - \Sigma_n \\ &= k [H(n+2) - H(n+1)] - [H(n+2)^k - H(n+1)^k] \\ &= \frac{k}{n+1} - \left( \frac{1}{(n+1)^k} + \dots + \frac{1}{(n+2)^k - 1} \right). \end{aligned}$$

La somme de la série est égale à

$$\Sigma_n + R_n = \Sigma_{n+1} + R_{n+1};$$

donc

$$u_n = \Sigma_{n+1} - \Sigma_n = R_n - R_{n+1},$$

quantité positive d'après les formules de M. Ser rappelées précédemment (*Nouvelles Annales*, juillet 1926).

---

---

**ESQUISSE D'UNE MÉTHODE D'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION (1)  
AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE**

$$a(p, q) \times r + 2b(p, q) \times s + c(p, q) \times t = 0;$$

PAR PIERRE SICARD,

Chef d'escadron au 157<sup>e</sup> d'Artillerie (Nice).

---

Soit une équation aux dérivées partielles de second ordre

$$(1) \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

où  $p, q, r, s, t$  désignent suivant les notations habituelles les dérivées partielles de la fonction inconnue  $z(x, y)$ .

Soit une intégrale de (1) (axes rectangulaires). Le plan tangent en un point peut être mis sous la forme

$$(2) \quad X \cos \varphi + Y \sin \varphi + Z \cot \theta + h(\theta, \varphi) = 0,$$

ou les deux variables  $\varphi$  et  $\theta$ , et la fonction  $h$  ont des significations évidentes.

L'équation (1) donne alors une équation du second ordre pour la fonction inconnue  $h$  des deux variables  $\varphi$  et  $\theta$ .

La transformation ainsi réalisée n'est pas nouvelle. Elle se rattache d'ailleurs, tout à fait simplement, à la transformation de contact bien connue de Legendre.

Elle intervenait indirectement dans quelques problèmes pro-

---

(1) Équation *linéaire* et *homogène* par rapport aux dérivées secondes  $r, s, t$  et dont les *coefficients*  $a(p, q), b(p, q), c(p, q)$ , sont des fonctions quelconques à deux variables des dérivées premières  $p$  et  $q$ .

posés aux examens (1), et ce sera notre justification pour en développer ici quelques applications.

1. Les formules fondamentales sont les suivantes :

D'abord les coordonnées  $x, y, z$  du point de contact du plan (2) sont

$$(3) \quad \begin{cases} x = \frac{\partial h}{\partial \varphi} \sin \varphi - \frac{\partial h}{\partial \theta} \sin \theta \cos \theta \cos \varphi - h \cos \varphi, \\ y = -\frac{\partial h}{\partial \varphi} \cos \varphi - \frac{\partial h}{\partial \theta} \sin \theta \cos \theta \sin \varphi - h \sin \varphi, \\ z = \sin^2 \theta \frac{\partial h}{\partial \theta}. \end{cases}$$

Les dérivées premières  $p$  et  $q$  sont

$$(4) \quad p = -\cos \varphi \operatorname{tang} \theta, \quad q = -\sin \varphi \operatorname{tang} \theta.$$

Quant aux dérivées secondes

$$r = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad s = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}, \quad t = \frac{\partial q}{\partial y},$$

elles découlent immédiatement du système (5) suivant d'équations linéaires

$$(5) \quad \begin{cases} r \frac{\partial x}{\partial \varphi} + s \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \sin \varphi \operatorname{tang} \theta = \frac{\partial p}{\partial \varphi}, \\ r \frac{\partial x}{\partial \theta} + s \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\cos \varphi}{\cos^2 \theta} = \frac{\partial p}{\partial \theta}, \\ s \frac{\partial x}{\partial \varphi} + t \frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\cos \varphi \operatorname{tang} \theta = \frac{\partial q}{\partial \varphi}, \\ s \frac{\partial x}{\partial \theta} + t \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\sin \varphi}{\cos^2 \theta} = \frac{\partial q}{\partial \theta}. \end{cases}$$

De ce système d'équations, il résulte, en désignant par  $J$  le jacobien,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix},$$

(1) Voir, au sujet de cette transformation, ma solution de la question d'analyse du concours d'agrégation de 1905. Voir aussi Solution et question, C. 80, ce tome, p. 27.



les relations suivantes (5'),

$$(5') \quad \begin{cases} J \times r = J \frac{\partial p}{\partial x} = \left[ \frac{\partial p}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right] \\ J \times s = J \times \frac{\partial p}{\partial y} = \left[ \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right], \\ J \times s = J \frac{\partial q}{\partial x} = \left[ \frac{\partial q}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial q}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right] \\ J \times t = J \times \frac{\partial q}{\partial y} = \left[ \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial q}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial q}{\partial \varphi} \right]. \end{cases}$$

Appliquée à une équation quelconque aux dérivées partielles de second ordre, il ne semble pas que la présente transformation conduise à une simplification du problème, loin de là. Elle est fâcheusement dissymétrique, et se prête mal aux calculs algébriques.

Mais elle conduit à un essai d'intégration intéressant, appliquée à une équation aux dérivées partielles de la forme précitée

$$(6) \quad a(p, q)r + 2b(p, q)s + c(p, q)t = 0.$$

## 2. Proposons-nous de transformer l'équation (6)

$$(6) \quad a(p, q)r + 2b(p, q)s + c(p, q)t = 0.$$

Il est facile de remarquer en remplaçant dans cette équation les dérivées secondes  $r, s, t$ , par leurs expressions tirées du système (5'), [ $s$  a deux expressions], que cette équation (6) peut s'écrire

$$(7) \quad 0 = \left( b \frac{\partial p}{\partial \theta} + c \frac{\partial q}{\partial \theta} \right) \frac{\partial x}{\partial \varphi} - \left( b \frac{\partial p}{\partial \varphi} + c \frac{\partial q}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ + \left( a \frac{\partial p}{\partial \varphi} + b \frac{\partial q}{\partial \varphi} \right) \frac{\partial y}{\partial \theta} - \left( a \frac{\partial p}{\partial \theta} + b \frac{\partial q}{\partial \theta} \right) \frac{\partial y}{\partial \varphi},$$

où les diverses dérivées  $\frac{\partial p}{\partial \theta}, \frac{\partial q}{\partial \theta}, \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \dots$  peuvent être calculées d'après (3) et (4).

L'équation transformée, obtenue, sera *linéaire et homogène* par rapport à la fonction  $h$ , et à ses dérivées premières et secondes, les coefficients étant des fonctions données de  $\theta$  et

de  $\varphi$  (1). Une particularité d'une grande importance dans l'occurrence, c'est que le *coefficient* de  $\frac{\partial h}{\partial \varphi}$  est *identiquement nul*.

Cherchons à quelles conditions, les termes en  $\frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2}$  et  $\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2}$  manquent dans l'équation transformée (7), qui se réduirait à la forme classique de Laplace, et même d'une forme de Laplace tronquée, puisque B est *identiquement nul*.

Ces conditions sont visiblement les deux conditions suivantes (7') :

$$(7') \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[ b \left( \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + c \left( \frac{\partial q}{\partial \theta} \right) \right] \sin \varphi + \left[ a \left( \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + b \left( \frac{\partial q}{\partial \theta} \right) \right] \cos \varphi = 0, \\ \left( a \frac{\partial p}{\partial \varphi} + b \frac{\partial q}{\partial \varphi} \right) \sin \varphi - \left( b \frac{\partial p}{\partial \varphi} + c \frac{\partial q}{\partial \varphi} \right) \cos \varphi = 0. \end{array} \right.$$

Relations *linéaires et homogènes* en  $a, b, c$ . Ces coefficients sont faciles à calculer, mais d'ailleurs *inutiles* pour la suite. Il est en effet visible que, eu égard aux relations (7'), dans l'équation de Laplace (L) tronquée, les coefficients A et C sont nuls. En effet, les expressions de (A) et de (C) peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} A &= \sin \theta \cos \theta \left[ \left( b \frac{\partial p}{\partial \theta} + c \frac{\partial q}{\partial \theta} \right) \sin \varphi + \left( a \frac{\partial p}{\partial \theta} + b \frac{\partial q}{\partial \theta} \right) \cos \varphi \right] \\ &\quad + 2 \cos^2 \theta \left[ \left( b \frac{\partial p}{\partial \varphi} + c \frac{\partial q}{\partial \varphi} \right) \cos \varphi - \left( a \frac{\partial p}{\partial \varphi} + b \frac{\partial q}{\partial \varphi} \right) \sin \varphi \right], \\ C &= \left[ \left( b \frac{\partial p}{\partial \theta} + c \frac{\partial q}{\partial \theta} \right) \sin \varphi + \left( a \frac{\partial p}{\partial \theta} + b \frac{\partial q}{\partial \theta} \right) \cos \varphi \right]. \end{aligned}$$

L'équation de Laplace se réduit à

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \theta \partial \varphi} = 0,$$

d'où

$$h = \alpha(\varphi) + \beta(\theta).$$

Les surfaces obtenues sont celles qu'envisageait le problème

(1) Cette équation aux dérivées partielles de second ordre linéaire et homogène a fait l'objet de quantité de recherches de géomètres éminents. Voir l'immortel Ouvrage de Gaston Darboux, sur la théorie générale des surfaces, qui cherche à la ramener (méthode dite des caractéristiques) à l'équation de Laplace

$$(L) \quad \frac{\partial^2 h}{\partial \varphi \partial \theta} + A \frac{\partial h}{\partial \theta} + B \frac{\partial h}{\partial \varphi} + Ch = 0.$$

d'agrégation de 1905, précédemment cité. *Surfaces dont les lignes de courbure sont planes*

$$\varphi = \text{const.}, \quad \theta = \text{const.},$$

et qui, lorsqu'elles sont de *révolution*, sont à *courbure moyenne constante*.

3. *Surfaces réglées à plan directeur*. — Un autre cas particulier de l'équation (6) est celui des surfaces réglées qui dépendent de l'équation aux dérivées partielles

$$(8) \quad q^2 r - 2 p q s + p^2 t = 0.$$

La transformation conduit très aisément à l'équation réduite

$$(\lambda_1) \quad \sin \theta \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial h}{\partial \theta} \cos \theta = 0,$$

dont l'intégration est presque immédiate comme suit :

L'équation  $(\lambda_1)$  peut s'écrire visiblement

$$(\lambda_2) \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial h}{\partial \theta} \sin \theta \right) + \cos \theta \left( \frac{\partial h}{\partial \theta} \right).$$

Posons

$$\zeta = \frac{\partial h}{\partial \theta} \sin \theta,$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \theta} + \zeta \cot \theta = 0,$$

$$\frac{1}{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} = - \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad \frac{\partial h}{\partial \theta} \sin^2 \theta = \gamma(\varphi),$$

$\gamma$  étant une fonction de  $\varphi$  seule (fonction *arbitraire*),

$$h = - \gamma(\varphi) \cot \theta + g(\varphi),$$

$g$  fonction *arbitraire* de  $\varphi$  seule.

*Nota.* — Parmi les surfaces réglées à plan directeur, le fameux conoïde de Plucker

$$z = k \frac{(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)}$$

joue un rôle très important dans la théorie cinématique des sur-

faces. Voir dans la dernière édition du Livre de M. G. Darboux, les études de M. P. Appell et celles de M. Raoul Bricard.

4. La transformation indiquée présente de l'intérêt dans le cas de l'équation générale des surfaces minima

$$(9) \quad (1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r = 0.$$

Eu égard à la relation évidente

$$p \sin \varphi - q \cos \varphi = 0$$

et à la relation non moins évidente

$$q \frac{\partial p}{\partial \theta} - p \frac{\partial q}{\partial \theta} = 0,$$

la transformation de l'équation (9) en équation (7) peut être très rapide et présente une certaine élégance.

L'équation (9) peut s'écrire successivement

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial q}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \left[ p \left( q \frac{\partial p}{\partial \varphi} - p \frac{\partial q}{\partial \varphi} \right) - \frac{\partial q}{\partial \varphi} \right] \frac{\partial x}{\partial \theta} \right\} \\ & = \left\{ \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \left[ q \left( p \frac{\partial q}{\partial \varphi} - q \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) - \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right] \frac{\partial y}{\partial \theta} \right\}, \\ & \frac{\partial q}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \varphi} - \left[ p \tan^2 \theta + \frac{\partial q}{\partial \varphi} \right] \frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \left[ q \tan^2 \theta - \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right] \frac{\partial y}{\partial \theta}, \\ & \left[ \frac{\partial q}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \tan \theta (1 + \tan^2 \theta) \cos \varphi \right] = \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial y}{\partial \theta} \tan \theta (1 + \tan^2 \theta) \sin \varphi, \end{aligned}$$

pour se muer finalement en l'équation

$$(10) \quad \frac{\partial^2 h}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} \sin^2 \theta + 3 \frac{\partial h}{\partial \theta} \sin \theta \cos \theta + h = 0.$$

5. Bien des solutions simples de cette équation aux dérivées partielles (10) sont en évidence (il n'y a pas lieu d'insister sur son intégration générale).

Cherchons d'abord des solutions de la forme

$$h = h_1(\varphi) + h_2(\theta).$$

On doit avoir

$$(h_1) \quad \frac{\partial^2 h_1}{\partial \varphi^2} + h_1 = 0,$$

$$(h_2) \quad \frac{\partial^2 h_2}{\partial \theta^2} \sin^2 \theta + 3 \frac{dh_2}{d\theta} \sin \theta \cos \theta + h_2 = 0,$$

d'où l'on tire immédiatement, en introduisant les constantes arbitraires  $c_1, c_2, d_1, d_2$ ,

$$h_1 = c_1 \cos \varphi + c_2 \sin \varphi,$$

$$h_2 = \cot \theta \left[ d_1 + \frac{d_2}{\cos \theta} + d_2 L \operatorname{tang} \frac{\theta}{2} \right].$$

L'intégration de l'équation ( $h_1$ ) est évidente. Celle de l'équation ( $h_2$ ), assez facile, soit à la faveur de la remarque, qu'elle a une solution particulière évidente  $\cot \theta$ , soit après transformation en posant  $h = e^{\int u d\theta}$  en une équation de Riccati

$$\sin^2 \theta \left[ \frac{\partial H}{\partial \theta} + H^2 \right] + 3H + 1 = 0,$$

équation dont il est assez aisé d'obtenir une solution particulière (équation intégrable par conséquent).

Nous laissons aux lecteurs le soin de vérifier que l'on retrouve ainsi la caténoïde de révolution de Lindelöf.

6. On peut encore chercher une solution de la forme

$$h = h_1(\varphi) h_2(\theta).$$

L'équation (10) donne alors

$$\frac{\frac{d^2 h_1}{d\varphi^2} + h_1}{h_1} = - \frac{\frac{d^2 h_2}{d\theta^2} \sin^2 \theta + 3 \frac{dh_2}{d\theta} \sin \theta \cos \theta}{h_2}.$$

ou en posant  $\alpha$ , la valeur commune (évidemment constante) des deux rapports

$$(11) \quad \frac{d^2 h_1}{d\varphi^2} + h_1(1 - \alpha) = 0,$$

$$(12) \quad \frac{d^2 h_2}{d\theta^2} \sin^2 \theta + 3 \frac{dh_2}{d\theta} \sin \theta \cos \theta + \alpha h_2 = 0.$$

L'intégrale générale de (11) est évidente. Celle de (12) est élémentaire dans le cas  $\alpha = 1$  (cas où elle se trouve écrite précédemment), et dans le cas  $\alpha = 0$ .

Pour  $\alpha = 1$ , on retrouvera en particulier l'hélicoïde réglé à plan directeur qui correspond à  $h_1 = d_1 \cot \theta$ .

Pour  $\alpha = 0$ , on a

$$h = (c_1 \cos \varphi + c_2 \sin \varphi) \left( d_1 + d_2 L \operatorname{tang} \frac{\theta}{2} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right).$$

*Intégration de l'équation différentielle*

$$(H) \quad \sin^2 \theta \frac{d^2 h_2}{d\theta^2} + 3 \frac{dh_2}{d\theta} \sin \theta \cos \theta + \alpha h_2 = 0 \quad (\alpha \text{ quelconque}).$$

Posons

$$x = \cot \theta,$$

l'équation se transforme en l'équation

$$(X) \quad (\Gamma + x^2) \frac{d^2 h_2}{dx^2} - x \frac{dh_2}{dx} + \alpha h_2 = 0.$$

Cette équation est une forme réduite de l'équation classique d'Euler, généralisée par Gauss

$$(a_0 x^2 + b_0 x + c_0) \frac{d^2 h_2}{dx^2} + (d_0 x + c_0) \frac{dh_2}{dx} + f_0 h_2 = 0,$$

équation étudiée dans les traités complets d'analyse (*voir* incidemment sur la construction de l'intégration générale des équations différentielles où le nombre de points critiques est limité, le cours d'analyse de Jordan à l'École Polytechnique en 1901).

L'équation (X) prend une forme élégante en  $y$  posant  $x = \operatorname{sh} t$ , il vient alors

$$(T) \quad \frac{d^2 h_2}{dt^2} - 2 \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} \frac{dh_2}{dt} + \alpha h_2 = 0.$$

Posons encore

$$h_2 = \omega(t) \operatorname{ch} t.$$

L'équation (T) transformée est

$$(Q) \quad \frac{d^2 \omega}{dt^2} + \left[ (\alpha - 1) \operatorname{ch} t + \frac{2}{\operatorname{ch} t} \right] \omega = 0.$$

Cette dernière équation différentielle est de la forme

$$(R) \quad \omega'' + \omega A_0(t) = 0,$$

où  $A_0(t)$  désigne une fonction *analytique* de la variable indépendante  $t$  réelle et régulière pour toutes les valeurs réelles et finies de  $t$ .

Elle rentre donc dans la catégorie d'équations différentielles du second ordre, étudiée tout dernièrement (*Nouvelles annales de mathématiques*, janvier 1927. Concours d'agrégation de mathématiques 1926. Question d'analyse. Solution de M. Bertrand Gambier) en utilisant des remarques de mécanique rationnelle.

*Remarques.* — 1° Il est bon de remarquer à propos de l'équation (X) qu'elle peut être intégrée par série (solution particulière par la série *entière*)

$$\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \dots + \gamma_p x^p + \gamma_{p+1} x^{p+1} + \gamma_{p+2} x^{p+2} + \dots$$

Les différents  $\gamma$  pouvant être calculés par la formule de récurrence

$$(F_r) (p+1)(p+2)\gamma_{p+2} + [\alpha + p(p-2)]\gamma_p = 0.$$

2° A propos de l'équation ( $\omega$ ) Jacobi a démontré (*voir* recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal de Frenet (1891) que si l'on a une intégrale *première* de l'équation  $\frac{d^2\omega}{dt^2} = F(\omega, t)$  on peut obtenir une intégrale générale au moyen de quadratures. Dans l'occurrence l'intégrale première est loin d'être évidente.

Le lecteur pourra mettre en évidence les propriétés géométriques des surfaces qui correspondent à la forme

$$h = h_1(\varphi) h_2(\theta),$$

---

---

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES  
(SESSION DE 1927).

Composition de Géométrie.

On considère deux droites  $\Delta$  et  $\Delta'$  qui se coupent en O et font entre elles un angle  $2\alpha$ . Soient A un point de  $\Delta$ , A' un point de  $\Delta'$ . Le cercle qui a pour diamètre AA' recoupe  $\Delta$  en B,  $\Delta'$  en B'. Soient  $\omega$  le centre de ce cercle,  $\omega'$  le centre du cercle de diamètre BB'.

1° On suppose que  $\omega$  décrive une droite  $\delta$ . Démontrer que  $\omega'$

décrit une droite  $\delta'$  et que  $\omega\omega'$  enveloppe une conique P dont on construira les éléments géométriques usuels.

2° Cette conique P étant fixée, il lui correspond une droite  $\delta$  et une droite  $\delta'$  qui se coupent en I. Lieu du point I quand les droites  $\Delta$  et  $\Delta'$  varient en conservant des bissectrices fixes, la conique P ne variant pas.

3° Les droites  $\Delta$  et  $\Delta'$  étant de nouveau fixes, on suppose que la droite  $AA'$  varie de manière que le triangle  $OAA'$  conserve, soit une aire, soit un périmètre constant. Montrer que dans chacun de ces cas, les cercles  $\omega$  sont orthogonaux à un cercle fixe dont on précisera la position.

Même question pour les cercles  $\omega'$ .

4° On suppose enfin que l'axe radical des deux cercles  $\omega$  et  $\omega'$  passe par un point fixe P'. Montrer que les cercles  $\omega$  restent orthogonaux à un cercle fixe de centre Q et que les cercles  $\omega'$  restent orthogonaux à un cercle fixe de centre Q'. Étudier la disposition des quatre points O, P', Q, Q'. Quel est le lieu des P' quand Q ou Q' décrit un cercle de centre O et de rayon a.

SOLUTION par M. BERTRAND GAMBIER.

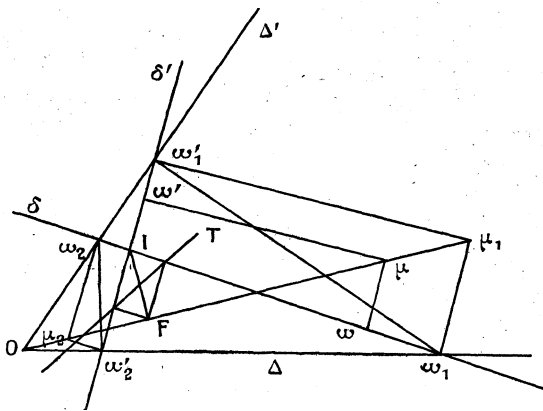
1. Le point B' s'obtient en projetant A sur  $\Delta'$ ; on peut dire que, si l'on a choisi un sens sur  $\Delta$  et sur  $\Delta'$ , B' se déduit de A par les deux opérations suivantes : d'abord symétrie autour de la bissectrice  $\mathcal{B}$  des deux droites orientées  $\Delta$  et  $\Delta'$ , puis homothétie par rapport à O, le rapport d'homothétie étant  $\cos 2\alpha$ , où  $2\alpha$  est l'angle des deux droites orientées  $\Delta$  et  $\Delta'$ ; l'ordre des deux opérations est échangeable; changer le sens de  $\Delta'$  par exemple revient à remplacer  $\mathcal{B}$  par la bissectrice perpendiculaire  $\mathcal{B}_1$  et à changer le signe du rapport d'homothétie, ce qui, au total, est indifférent. Le point B se déduit de A' par la même construction, donc  $\omega'$  se déduit de  $\omega$  par la même transformation; si donc  $\omega$  décrit une certaine courbe  $\gamma$ , le point  $\omega'$  décrit une courbe  $\gamma'$ , inversement semblable à  $\gamma$ . Ici les courbes sont deux droites  $\delta$  et  $\delta'$ . Pour construire  $\delta'$  quand  $\delta$  est donnée, il est commode d'introduire les points  $\omega_1, \omega_2$  où  $\delta$  coupe  $\Delta$  et  $\Delta'$  respectivement, de façon à avoir aussitôt  $\omega'_1$  et  $\omega'_2$  par simple projection sur l'autre droite  $\Delta'$  et  $\Delta$ .

Quand  $\omega$  décrit la droite indéfinie  $\delta$ ,  $\omega_1 \omega_2$  (orientée par exemple



de  $\omega_1$  vers  $\omega_2$ ),  $\omega'$  décrit la droite indéfinie  $\delta'$ ,  $\omega'_1\omega'_2$  (orientée dans le sens correspondant) et le rapport  $\frac{\omega_1\omega}{\omega'_1\omega'}$  reste constant en grandeur et signe : c'est une propriété connue que la droite  $\omega\omega'$  enveloppe une parabole P tangente à  $\delta$  et  $\delta'$ . Pour avoir les éléments usuels de P, il est commode de démontrer ainsi la propriété (fig. 1) : les perpendiculaires à  $\delta$  en  $\omega_1$  et  $\delta'$  en  $\omega'_1$  se coupent

Fig. 1.

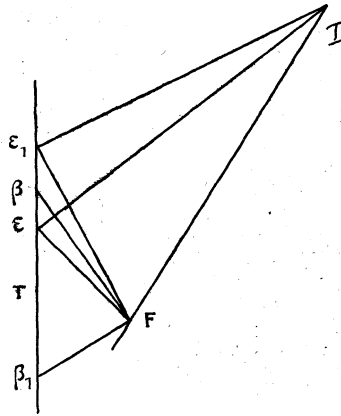


en  $\mu_1$ ; de même  $\omega_2$  et  $\omega'_2$  donnent  $\mu_2$ ; on joint  $\mu_1\mu_2$  et l'on déplace un point  $\mu$  sur  $\mu_1\mu_2$ ; les projections de  $\mu$  sur  $\delta$  et  $\delta'$  sont évidemment deux points  $\omega$  et  $\omega'$  homologues. Projétons I, point commun à  $\delta$  et  $\delta'$ , sur  $\mu_1\mu_2$  en F : le cercle décrit sur  $I\mu$  comme diamètre passe en  $\omega$ ,  $\omega'$  et F, de sorte que la droite de Simson de F relativement au triangle formé par  $\delta$ ,  $\delta'$  et  $\omega\omega'$  est fixe : c'est la droite T joignant les projections de F sur  $\delta$  et  $\delta'$ ;  $\omega\omega'$  enveloppe donc la parabole de foyer F admettant T pour tangente au sommet. D'autre part la bissectrice  $\mathcal{B}$  coupe évidemment  $\delta$  et  $\delta'$  en deux points  $\bar{\omega}$  et  $\bar{\omega}'$  homologues, donc  $\mathcal{B}$  est une tangente particulière de P. Pour la même raison, la seconde bissectrice  $\mathcal{B}_1$  touche P de sorte que la directrice D de P passe en O.

2. Soit une parabole P, un point O de sa directrice,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}_1$  les tangentes rectangulaires entre elles, issues de O à P; si l'on trace au hasard, un couple de deux droites  $\Delta$  et  $\Delta'$  issues de O et

admettant  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}_1$  pour bissectrices, on reconstitue aussitôt la figure précédente en menant à P la tangente perpendiculaire à  $\Delta$ , qui coupe  $\Delta$  en  $\omega'_2$  et  $\Delta'$  en  $\omega_2$ , de même la tangente à P perpendiculaire à  $\Delta'$  coupe  $\Delta$  en  $\omega_1$  et  $\Delta'$  en  $\omega'_1$ ;  $\delta$  est la droite  $\omega_1\omega_2$  et  $\delta'$ ,  $\omega'_1\omega'_2$ . Les droites  $\omega_1\omega_2$  et  $\omega'_1\omega'_2$ , sont, en direction, symétriques par rapport à  $\mathcal{B}$  ou  $\mathcal{B}_1$ ; les perpendiculaires  $F\varepsilon$ ,  $F\varepsilon'$  (*fig. 2*)

Fig. 2.



abaissées de F sur ces droites  $\omega_1\omega_2$  et  $\omega'_1\omega'_2$  ont leur pied  $\varepsilon$  ou  $\varepsilon'$  sur T et sont symétriques en direction relativement aux parallèles  $F\beta$  et  $F\beta_1$ , à  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}_1$ , issues de F : comme  $\beta$  et  $\beta_1$  pieds de ces parallèles sur la droite T sont conjugués harmoniques par rapport à  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$ , le cercle  $F\varepsilon\varepsilon'I$  de diamètre FI est orthogonal au cercle  $F\beta\beta_1$ , de diamètre  $\beta\beta_1$ , de sorte que FI est une droite fixe, tangente en F au cercle fixe  $F\beta\beta_1$  : c'est le lieu de I.

3. La puissance de O relativement au cercle de diamètre  $AA'$  est  $OA \cdot OB$  (remarquons, ce qui sera commode pour la suite, que cette puissance est la mesure du produit vectoriel intérieur  $\vec{OA} \cdot \vec{OA}'$ ); cette puissance  $p$  est égale à  $OA \cdot OA' \cdot \cos 2\alpha$ ; or l'aire du triangle  $OAA'$  qui est  $\frac{1}{2} OA \cdot OA' \sin 2\alpha$  reste constante par hypothèse : donc  $OA \cdot OB$  reste constant aussi et le cercle  $AA'$  reste orthogonal au cercle de centre O et rayon  $\sqrt{p}$ ; il est bon de

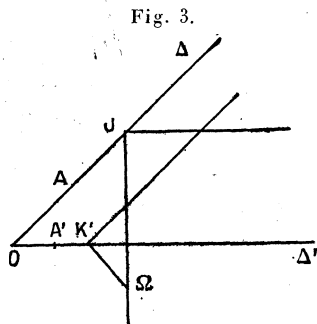
remarquer que  $p$  n'est positif que si le segment  $AA'$  est contenu dans l'un ou l'autre des angles aigus de  $\Delta$  et  $\Delta'$ .

Je vais maintenant démontrer, d'une façon générale mais élémentaire, la proposition suivante :

Si la droite  $AA'$  enveloppe une conique  $\Gamma$  tangente à  $\Delta$  et  $\Delta'$ , le cercle  $\omega$ , de diamètre  $AA'$ , reste orthogonal à un cercle fixe.

Cette proposition comprend comme cas particulier celui où le triangle  $OAA'$  garde une aire constante ( $AA'$  enveloppe une hyperbole d'asymptotes  $\Delta$  et  $\Delta'$ ), celui où le triangle  $OAA'$  garde un périmètre constant [ $AA'$  enveloppe un cercle tangent à  $\Delta$  et  $\Delta'$  (1)], celui où  $AA'$  passe par un point fixe  $P$  (quatrième partie), la conique se réduisant dans ce cas aux deux points  $P$  et  $O$ . La propriété est basée sur ce fait que  $\Delta$  et  $\Delta'$  étant orientées, les abscisses  $\alpha$  et  $\alpha'$  de  $A$  et  $A'$  sur  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont liées homographiquement, propriété qui se démontre en remarquant que,  $F$  étant foyer de  $\Gamma$ , l'angle  $(FA, FA')$  de droites illimitées est constant.

La seconde tangente à  $\Gamma$  supposée non parabolique parallèle à  $\Delta'$  donne sur  $\Delta$  le point  $J$  à distance finie dont le correspondant  $J'$  est rejeté à l'infini; on définit de même sur  $\Delta'$  le point  $K'$  homologue



du point à l'infini de  $\Delta$ ; la perpendiculaire abaissée de  $K'$  sur  $\Delta$  est un cercle dégénéré de la famille; de même la perpendiculaire abaissée de  $J$  sur  $\Delta'$  : ces deux perpendiculaires se coupent en un

---

(1)  $AA'$  n'enveloppe qu'une partie du cercle; mais en généralisant et affectant  $OA$  et  $OA'$  de signes convenables on peut avoir tout le cercle; à la rigueur on peut même faire intervenir quatre cercles, deux à deux symétriques relativement à  $O$ ; mais ce n'est qu'un détail.

point  $\Omega$  et tout revient à démontrer que le produit scalaire  $\vec{\Omega A} \cdot \vec{\Omega A'}$  est constant (*fig. 3*).

Or la figure 3 donne aussitôt

$$\begin{aligned}\vec{\Omega A} &= \vec{\Omega J} + \vec{JA}, \\ \vec{\Omega A'} &= \vec{\Omega K'} + \vec{K'A'},\end{aligned}$$

d'où par multiplication scalaire et se rappelant que  $\vec{\Omega K'}$  et  $\vec{JA}$  d'une part, puis  $\vec{\Omega J}$  et  $\vec{K'A'}$  ont des supports perpendiculaires

$$\vec{\Omega A} \cdot \vec{\Omega A'} = \vec{\Omega J} \cdot \vec{\Omega K'} + \vec{JA} \cdot \vec{K'A'},$$

ce qui démontre la propriété, car  $\vec{\Omega J}$  et  $\vec{\Omega K'}$  sont fixes et d'autre part la relation d'homographie est

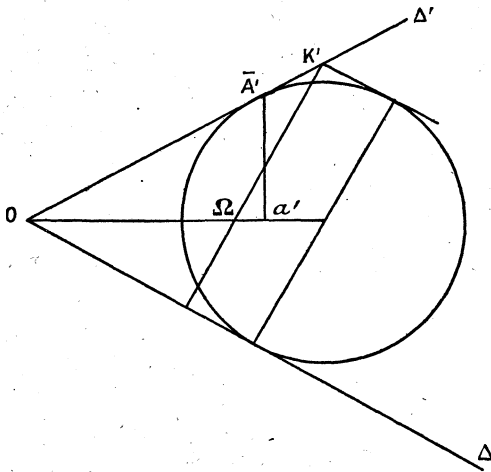
$$\text{mesure } \vec{JA} \times \text{mesure } \vec{K'A'} = \text{const.}$$

On déduit aussitôt de là que le cercle  $\omega$  de diamètre  $AA'$  enveloppe une courbe bicirculaire anallagmatique de degré 4 : le lieu de  $\omega$  est en effet une conique;  $\Gamma$  étant supposée non parabolique, on peut regarder la figure comme projection cylindrique d'un hyperboloïde à une nappe,  $\Gamma$  étant le contour apparent en projection,  $\Delta$  et  $\Delta'$  les projections de deux génératrices fixes  $G$ ,  $G'$  d'un même système et  $AA'$  la projection d'une génératrice variable de l'autre système : le plan parallèle à  $G$ ,  $G'$  et équidistant de  $G$  et  $G'$  coupe l'hyperboloïde suivant une conique contenant le milieu du segment de génératrice projeté en  $AA'$ ; le milieu de  $AA'$  décrit donc une conique d'asymptotes parallèles à  $\Delta$  et  $\Delta'$ ; le reste s'en déduit. Si la corde  $AA'$  passe par un point fixe  $P$  il n'y a rien de changé sauf que l'hyperboloïde admet deux génératrices verticales projetées en  $P$  et  $O$  (la démonstration élémentaire donnée plus haut subsiste puisque l'on sait aussitôt que  $A$  et  $A'$  se correspondent homographiquement; la notion de conique dégénérée en les deux points *distincts*  $P$  et  $O$  n'est utile que pour ce complément; les secondes tangentes parallèles à  $\Delta$  et  $\Delta'$  sont bien les parallèles à  $\Delta$  et  $\Delta'$  menées par  $P$ ). Dans ce cas où la corde  $AA'$  passe par le point fixe  $P$ , on peut remarquer, de plus, que si  $A$  et  $A'$  viennent simultanément en  $O$ , le cercle  $AA'$  se réduit au cercle-

point  $O$ ; donc tous les cercles  $\omega$  sont orthogonaux à un cercle fixe, dont le centre  $\Omega$  se trouve comme plus haut, et qui de plus passe en  $O$ .

Il est intéressant à ce propos de revenir sur la première partie où  $\omega$  décrit une droite  $\delta$ ; si de  $\omega$  l'on mène la parallèle à  $\Delta'$  on obtient sur  $\Delta$  le milieu  $\alpha$  de  $OA$ , donc  $\omega$  et  $\alpha$  ou  $\omega$  et  $A$  décrivent sur  $\delta$  et  $\Delta$  des divisions proportionnelles; de même  $\omega$  et  $A'$  sur  $\delta$  et  $\Delta'$ : donc, comme cela a été expliqué plus haut, la droite  $AA'$  enveloppe une parabole  $P_1$  tangente à  $\Delta$ ,  $\Delta'$  et  $\delta$ ; ce raisonnement démontre d'ailleurs que, réciproquement, le milieu du segment découpé sur une tangente mobile de la parabole  $P_1$  par deux tangentes fixes est une droite  $\delta$  tangente elle aussi à  $P_1$  (le raisonnement déduit de la géométrie dans l'espace le démontre aussi, mais d'une façon moins élémentaire); dans ce cas le cercle  $\omega$  reste manifestement orthogonal à la droite  $\delta$  lieu de son centre et le principe de continuité permet d'affirmer que l'enveloppe du cercle  $\omega$  est une quartique bicirculaire ayant  $\delta$  pour axe.

Fig. 4.



Calculons d'une façon précise la position de  $\Omega$  et la puissance constante dans le cas où le triangle  $OAA'$  a un périmètre constant  $2p$ ;  $AA'$  reste tangente à un cercle fixe de rayon  $p \tan \alpha$ , le point  $K'$  (*fig.* 4) s'obtient par la tangente parallèle à  $\Delta$ ; la perpen-

diculaire à  $\Delta$  issue de ce point est à la distance  $\frac{2p \operatorname{tang} \alpha}{\operatorname{tang} 2\alpha}$  ou  $p(1 - \operatorname{tang}^2 \alpha)$  ou  $\frac{p \cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}$  de O de sorte que

$$O\Omega = \frac{p \cos 2\alpha}{\cos^3 \alpha},$$

$\Omega$  étant par raison de symétrie sur la bissectrice de l'angle  $\Delta, \Delta'$ ; prenons comme sécante  $AA'$  particulière celle pour laquelle A est confondu avec O et  $A'$  avec le point de contact  $\overline{A'}$  de  $\Delta'$  et du cercle;  $\overline{A'}$  se projette en  $a'$  sur la bissectrice  $O\Omega$ ; la puissance constante est

$$\Omega O \times \Omega a' = \frac{-p \cos 2\alpha}{\cos^3 \alpha} \left[ p \cos \alpha - \frac{p \cos 2\alpha}{\cos^3 \alpha} \right].$$

Si l'on remarque que

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha,$$

on trouve aussitôt que la puissance est

$$\frac{-p \cos 2\alpha \sin^4 \alpha}{\cos^6 \alpha}.$$

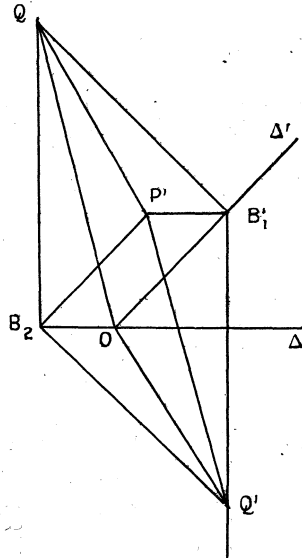
Elle est négative si l'angle  $2\alpha$  est aigu, positive si  $2\alpha$  est obtus. Le cas de  $2\alpha$  droit est un cas de dégénérescence étudié aussitôt.

D'autre part tout ce qui est relatif au cercle  $\omega'$  se déduit par la similitude déjà employée des résultats relatifs au cercle  $\omega$ .

4. Cette dernière question a été résolue en partie. L'axe radical de  $\omega$  et  $\omega'$  est en effet  $BB'$ ; la droite  $BB'$  passe par le point fixe  $P'$ : on obtient le point  $Q'$  par la construction simple suivante: la parallèle à  $\Delta$  issue de  $P'$  donne (*fig. 5*)  $B'_1$  sur  $\Delta'$  et par  $B'_1$  on mène la perpendiculaire à  $\Delta$ ; de même la parallèle à  $\Delta'$  issue de  $P'$  donne  $B_2$  sur  $\Delta$ , la perpendiculaire à  $\Delta'$  issue de  $B_2$  donne  $Q'$  par intersection avec la droite homologue issue de  $B'_1$ ; le point  $Q$  s'obtient manifestement comme intersection de la perpendiculaire en  $B'_1$  à  $\Delta'$ , et à  $\Delta$  en  $B_2$  de sorte que la figure  $B_2QB'_1Q'$  est un parallélogramme; comme il en est de même de  $P'B'_1OB_2$ , il en résulte que le centre commun des deux parallélogrammes est le milieu de  $OP', B_2B'_1, QQ'$ ; la figure  $OQP'Q'$  est donc un parallé-

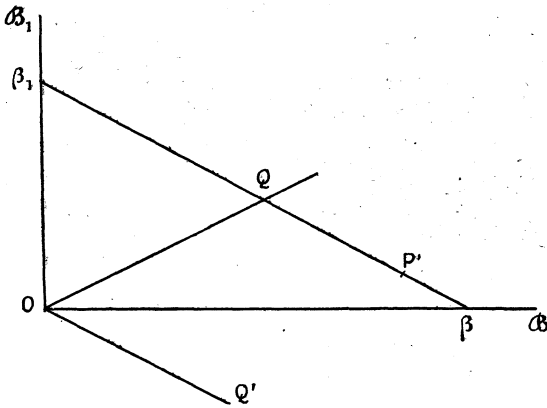
logramme.  $OQ$  et  $OQ'$  sont, comme nous le savons, symétrique-

Fig. 5.



ment inclinées sur les bissectrices  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}_1$ . Figurons donc  $\mathcal{B}, OQ$  et  $OQ'$ ; soit  $(\mathcal{B}, OQ) = \theta$ . On suppose  $OQ$  constant égal à  $a$  :

Fig. 6.



donc par rapport aux axes  $O\mathcal{B}, O\mathcal{B}_1$ , les coordonnées de  $Q, Q'$ ,

$P'$  sont respectivement ( $b = a \cos 2\alpha$ ) (fig. 6) :

Q.....	$a \cos \theta$	$a \sin \theta$
Q'.....	$b \cos \theta$	$-b \sin \theta$
P'.....	$(a + b) \cos \theta$	$(a - b) \sin \theta$

Le lieu de  $P'$  est donc une ellipse de demi-axes  $a + b$ ,  $a - b$  portés sur  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}_1$ ; d'ailleurs la droite  $QP'$  perce  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}_1$  aux points  $\beta$  et  $\beta_1$  et l'on a  $P'\beta_1 = a + b$ ,  $P'\beta = a - b$ , ce qui redonne la génération connue de l'ellipse par la bande de papier.

### SOLUTION DE QUESTION PROPOSÉE.

2497.

(1927 p. 110).

*Soit ABCD un quadrilatère inscrit, démontrer que le centre O du cercle circonscrit, le point de concours I des diagonales et le foyer F de la parabole inscrite sont sur une droite. Cette droite est symétrique, par rapport aux bissectrices des angles des diagonales du quadrilatère, de la droite joignant I au centre de l'hyperbole équilatère circonscrite.*

G. ROY.

SOLUTION.

Par E. BALLY.

1° Si un quadrangone est inscrit à un cercle et circonscrit à une parabole : le pôle  $O'$  de l'un de ses côtés relatif au cercle, le point de concours  $F'$  de ses deux côtés opposés qui sont adjacents au côté envisagé et le point de concours  $I$  de ses diagonales sont alignés (sur la polaire, relative au cercle, du point de concours du côté envisagé avec son opposé).

Quand le quadrangone varie en restant inscrit au cercle et circonscrit à la parabole, on sait que le point de concours  $I$  de ses diagonales reste fixe. Dans la position où l'un des côtés devient la droite de l'infini, les points  $O'$  et  $F'$  correspondant à ce côté deviennent respectivement le centre  $O$  du cercle et le foyer  $F$  de la parabole, qui sont donc alignés avec le point de concours  $I$  des diagonales du premier quadrangone.

2° On sait que les centres des coniques circonscrites à un quadrangle sont sur une conique ( $G$ ) (conique des neuf points), circonscrite au triangle conjugué et aux milieux des six segments du quadrangle, et qui a pour centre le centre de gravité  $G$  des sommets du quadrangle (point commun aux trois droites de jonction des milieux des segments opposés, et relativement auquel ces milieux sont deux à deux symétriques).



Si le quadrangle est inscriptible, la conique (G) lieu des centres est une hyperbole équilatère, qui a pour directions asymptotiques les directions rectangulaires fixes d'axes communes aux coniques circonscrites au quadrangle (directions des bissectrices des paires de côtés opposés du quadrangle inscriptible).

*Admettons* que les centres O et H du cercle (O) et de l'hyperbole équilatère (H) circonscrits au quadrangle, points situés sur l'hyperbole équilatère (G) lieu des centres, soient symétriques relativement au centre G de cette dernière.

Alors, les droites IO et IH qui joignent ces centres à un sommet I du triangle conjugué du quadrangle, point situé sur (G), sont parallèles à deux diamètres conjugués de l'hyperbole (G), et leurs bissectrices sont parallèles aux asymptotes de (G), ce qui résout la fin du problème.

Reste à établir que si un quadrangle ABCD est inscrit à un cercle de centre O, le symétrique de O relatif au centre de gravité du quadrangle est le centre de l'hyperbole équilatère circonscrite.

Soient K l'orthocentre du triangle ABC; M et N les milieux de AB et de CD; G, le milieu de MN (centre de gravité des sommets du quadrangle); H, le symétrique de O relatif à G.

Le segment OM étant égal et parallèle à la moitié du segment CK, il en est de même du segment NH, symétrique de OM relatif à G. Donc H est le milieu de DK.

Tout sommet D du quadrangle et l'orthocentre K du triangle ABC de ses trois autres sommets étant donc symétriques relativement à ce point H, ce dernier est bien le centre de l'hyperbole équilatère circonscrite à ABCD, puisque celle-ci contient les orthocentres des quatre triangles du quadrangle.

*Nota.* — Cette dernière démonstration résout aussi la première partie de la question n° 2487, proposée par E. Bally (*N. A.*, 1925, p. 24).

Autre solution de R. BOUVAIST.

---

## SOLUTIONS DE QUESTIONS DE LICENCE.

### Question C. 90.

[*Mécanique rationnelle; épreuve théorique; énoncé publié en février 1927, p. 64.*]

SOLUTION

Par J. LEDURE.

Une plaque a la forme d'un triangle équilatéral de côté  $a$ . Un côté est astreint à demeurer dans le plan fixe  $x_1 O y_1$ , le sommet opposé sur la verticale  $O_1 z_1$  (axes rectangulaires). On demande d'étudier le mouvement.

Les axes liés à la plaque sont  $Ox$  parallèle au côté horizontal,  $Oy$  passant par le sommet de la plaque qui est sur  $O_1 z_1$ ,  $Oz$  perpendiculaire;  $O$  est le centre de la plaque. Les angles d'Euler sont

$$\varphi = 0, \quad \psi = \left( \widehat{O_1 x_1, O x} \right), \quad \theta = \left( \widehat{O_1 z_1, O z} \right),$$

les moments d'inertie de la plaque par rapport aux axes qui lui sont liés sont

$$A = B = \frac{M a^2}{24}, \quad C = \frac{M a^2}{12}.$$

La force vive de la plaque est, tous calculs faits,

$$2T = \frac{M a^2}{8} (1 + 2 \sin^2 \theta) \theta'^2 + \frac{M a^2}{24} (1 + 9 \cos^2 \theta) \psi'^2;$$

et la fonction des forces

$$U = - \frac{M g a \sqrt{3}}{6} \sin \theta.$$

Le théorème des forces vives donne

$$(1) \quad 3(1 + 2 \sin^2 \theta) \theta'^2 + (1 + 9 \cos^2 \theta) \psi'^2 = h - \frac{8 g \sqrt{3}}{a} \sin \theta,$$

et, d'autre part, l'équation de Lagrange appliquée au paramètre  $\psi$  donne

$$(2) \quad (1 + 9 \cos^2 \theta) \psi' = c.$$

On voit donc que  $\psi'$  conserve toujours le même signe et que la rotation  $\psi$  se fait toujours dans le même sens.

Éliminons  $\psi'$  entre (1) et (2),

$$3(1 + 2 \sin^2 \theta)(1 + 9 \cos^2 \theta) \theta'^2 = \left( h - \frac{8 g \sqrt{3}}{a} \sin \theta \right) (10 - 9 \sin^2 \theta) - c^2.$$

Pour discuter graphiquement, on posera  $\sin \theta = x$  et l'on coupera la courbe

$$y = \frac{1}{10 - 9x^2}$$

par la droite

$$y = \frac{1}{c^2} \left( h - \frac{8 g \sqrt{3}}{a} x \right);$$

on trouvera, suivant les cas, oscillation du paramètre  $\theta$  entre deux valeurs  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , oscillations symétriques par rapport à  $\theta = -\frac{\pi}{2}$  ou mouvement révolutif.

Autre solution par J. LAUREAU.

Question C.91.

[*Mécanique rationnelle; épreuve pratique; énoncé publié en février 1927, p. 64.*]

SOLUTION

Par JACQUES DEVISME.

On donnait le système suivant : En O et O' (sur une même horizontale,  $OO' = l$ ) pendent deux fils OAB et O'C reliés par un autre fil AC, la figure d'équilibre formant un carré OO'CA dont le côté OA a été prolongé d'une longueur égale  $AB = OA$ . En A, B, C sont trois masses ponctuelles pesantes de masse  $m$ , les fils sont inextensibles et sans masse.

O'C ayant été écarté d'un angle  $\alpha$  dans le plan du tableau il s'agissait d'étudier l'état des vitesses au moment de la tension brusque de AC, quand O'C redevient vertical.

Considérons une position virtuelle du système donnée par les angles  $\theta, \varphi, \psi$  de OA, AB, O'C avec la verticale. La force vive est

$$2T = ml^2 [2\theta'^2 + \psi'^2 + \varphi'^2 + 2\varphi'\theta' \cos(\theta - \varphi)].$$

L'équation de liaison exprimant que  $AC = l$  s'écrit

$$(\cos \theta - \cos \psi)^2 + (\sin \theta - \sin \psi - 1)^2 = 1.$$

Au moment du choc on a  $\theta = \varphi = \psi = 0$ , il faut donc écrire que l'on a

$$\Delta\psi' \delta\psi + \Delta(2\theta' + \varphi') \delta\theta + \Delta(\varphi' + \theta') \delta\varphi = 0,$$

pour toutes les valeurs  $\delta\theta, \delta\varphi, \delta\psi$  liées par

$$\delta\theta - \delta\psi = 0.$$

Donc

$$\Delta(\varphi' + \theta') = 0,$$

$$\Delta(\psi' + 2\theta' + \varphi') = 0$$

ou encore

$$\Delta(\varphi' + \theta') = 0,$$

$$\Delta(\psi' + \theta') = 0.$$

Les valeurs initiales des vitesses sont

$$\theta'_0 = \varphi'_0 = 0, \quad \psi'_0 = \sqrt{\frac{2g}{l}} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Les valeurs finales seront donc

$$\theta'_1 = -\Delta\psi'_1; \quad \varphi'_1 = +\Delta\psi'_1, \quad \psi'_1 = \sqrt{\frac{2g}{l}} \sin \frac{\alpha}{2} + \Delta\psi'_1.$$

Ces valeurs doivent être compatibles avec la liaison, donc

$$\begin{aligned} \theta'_1 - \psi'_1 &= 0, \\ \sqrt{\frac{2g}{l}} \sin \frac{\alpha}{2} + 2\Delta\psi'_1 &= 0, \end{aligned}$$

et l'on a

$$\begin{aligned}\theta'_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2g}{l}} \sin \frac{\alpha}{2}, \\ \varphi'_1 &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2g}{l}} \sin \frac{\alpha}{2}, \\ \psi'_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2g}{l}} \sin \frac{\alpha}{2}.\end{aligned}$$

**CERTIFICAT DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.**

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Étudier les courbes dont le rayon de courbure se projette sur  $Ox$  suivant un segment constant  $a > 0$  (réponse : ces courbes sont les homoth. directes dans le rapport  $a$  de

$$X + \log |\sin Y| = 0).$$

II. Calculer l'intégrale double  $\int \int (x^2 + y^2) dx dy$  étendue au domaine défini par les inégalités

$$0 < \rho < \sqrt{\sin \omega \cos \omega} \quad 0 < \omega < \frac{\pi}{2}, \quad \text{Rép. } \frac{\pi}{64}.$$

III. Déterminer une fonction  $f$  telle que l'expression

$$e^x f(x^2 + y^2) [x^2 dy + y(x^2 + y^2 - x) dx]$$

soit une différentielle totale  $dU$ . Calculer la fonction  $U$  correspondante.

Comparer au résultat obtenu en intégrant l'équation différentielle

$$x^2 y' + y(x^2 + y^2 - x) = 0$$

par passage en coordonnées polaires.

$$\text{Rép. } U = A \frac{ye^x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + B.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° Intégrer l'équation différentielle

$$y' - y = xy^2.$$

2° Construire les courbes intégrales répondant aux conditions suivantes :

- |    |               |               |             |
|----|---------------|---------------|-------------|
| a. | Pour $x = 0,$ | $y = 0,$      | (courbe A), |
| b. | Pour $x = 0,$ | $y = 1,$      | (courbe B), |
| c. | Pour $x = 0,$ | $y = \infty,$ | (courbe C). |

(Poitiers, juin 1927.)

---

---

RÉCENTS PROGRÈS DE LA GÉOMÉTRIE ANALLAGMATIQUE (1);

PAR J. HADAMARD.

---

Dans un beau Mémoire inséré au *Journal de Mathématiques* (2), M. André Bloch établit relativement aux cercles de l'espace une série de propriétés dont quelques-unes avaient été aperçues par plusieurs auteurs, mais qui, dans leur ensemble, constituent, pour la Géométrie pure, une série de conquêtes véritablement surprenantes et inattendues. Ses démonstrations reposent sur la considération si féconde des *foyers* d'un cercle et sur celle des génératrices imaginaires de la sphère : il appelle l'attention sur l'utilité qu'il y aurait à obtenir, pour les mêmes résultats, des démonstrations purement géométriques, anallagmatiques et réelles.

J'ai constaté que les propriétés des rotations (au sens anallagmatique du mot) telles que je les avais énoncées dans mes *Leçons de Géométrie élémentaire* (3) permettent de développer la théorie en satisfaisant à cette triple condition, et même de simplifier et de compléter sur quelques points (voir particulièrement ci-après, section VI) les résultats de M. André Bloch. C'est ce que je vais exposer dans le présent travail.

Le premier qui se soit occupé, au point de vue anallagmatique, de la figure formée par deux cercles arbitraires de l'espace est M. Kœnigs (4), qui a obtenu un des invariants (lesquels sont au nombre de deux distincts) de la figure ainsi constituée, pendant que, un peu auparavant, M. Goursat (5) avait résolu une autre question que nous verrons fondamentale pour notre objet.

---

(1) L'original de ce travail a paru en langue espagnole dans *Revista Matemática Hispano-Americana*, 1927.

(2) 9<sup>e</sup> série, tome III, 1924, p. 51. Voir aussi *Comptes rendus Ac. Sc.*, t. 177, 1923, n<sup>os</sup> 17 et 19, et *Bulletin des Sciences mathématiques*.

(3) Tome II, 1901, ex. 1249-1254.

(4) *Annales Fac. Sc. Toulouse*, t. II, 1888. Un second invariant a été formé en 1915, sans connaissance de notre propre travail par M. D. F. Barrow (*Transactions of the American Math. Soc.*, t. XVI).

(5) *Annales Scient. École Normale supérieure*, t. VI, 1889.

*Ann. de Mathémat.*, 6<sup>e</sup> série, t. II. (Novembre 1927.)

Quelques années après (*loc. cit.*) nous avons formé les deux invariants du système de deux cercles  $C_1, C_2$ , en même temps que nous mettions ce problème en relation avec celui qui fait la base de la présente théorie, la recherche des cercles perpendiculaires communs à  $C_1$  et à  $C_2$ .

La résolution de ce dernier problème aurait dû, semble-t-il, forcément conduire à noter qu'il pouvait devenir indéterminé. Cette circonstance m'avait pourtant échappé. Elle est, au contraire, mise en lumière dans l'Ouvrage bien connu, *A Treatise on the Circle and the Sphere* (Oxford, 1916), dans lequel M. Coolidge reprend de son côté la même question et où les cercles *paratactiques*, dénomination créée par M. Coolidge pour ce cas remarquable d'indétermination, sont étudiés en détail au double point de vue analytique et géométrique et définis de manière particulièrement simple à l'aide de la relation qui existe entre leurs foyers. Cependant, à son tour, le géomètre américain laissait de côté certaines des conséquences géométriques les plus curieuses et les plus simples de la notion de parataxie ainsi introduite.

Or, entre temps, ces propriétés avaient été découvertes. Dans une courte Note des *Archiv der Math. und Phys.*, tome VII<sub>3</sub>, 1904, E. von Weber avait obtenu quelques-uns des plus importants résultats retrouvés depuis par M. André Bloch, non seulement la notion de cercles paratactiques et leur propriété géométrique caractéristique, mais aussi, avec la forme canonique déjà donnée par M. Goursat, le fait que la réduction d'une transformation sphérique à cette forme canonique peut, elle aussi, être un problème indéterminé, et, des lors, par voie de conséquence, la congruence que, avec M. André Bloch, nous appellerons *paratactique* (voir notre Section IV). La beauté des résultats de E. von Weber n'aurait certes pas manqué d'attirer la vive attention des mathématiciens si l'auteur l'avait lui-même soulignée comme elle le méritait (<sup>1</sup>).

D'autre part, en 1911, la propriété angulaire fondamentale des cercles paratactiques (l'un d'eux étant réduit à une droite) figurait dans un problème d'admission à l'École Normale supérieure posé par M. H. Lebesgue (voir le tome X<sub>4</sub> des présentes *Annales*, p. 558 et suiv.).

---

(<sup>2</sup>) Le travail plus étendu, annoncé par von Weber sur le même sujet, n'a pas paru, à notre connaissance.

Après les Notes où M. Demoulin <sup>(1)</sup>, puis M. Vessiot <sup>(2)</sup>, en vue de recherches de Géométrie infinitésimale, reprennent tout d'abord l'étude des invariants du système de deux cercles, celle des cercles perpendiculaires communs et du cas paratactique, ont paru les travaux de M. A. Bloch cités plus haut et dont le contenu fait l'objet principal de la présente étude. Parti de nos résultats de 1901, M. A. Bloch a d'ailleurs été inspiré, sur certains points, par les travaux et même par quelques suggestions personnelles de M. Demoulin. Au contraire, à notre connaissance, les travaux antérieurs à 1921 cités dans ce qui précède sont sans relation les uns avec les autres.

M. André Bloch, comme E. von Weber ainsi que MM. Goursat et Kœnigs, fait systématiquement appel aux propriétés des foyers et des autres éléments isotropes. Nous espérons montrer que des considérations de Géométrie réelle et, somme toute, élémentaire, fournissent des démonstrations ne laissant rien à désirer au point de vue de la simplicité et ne le cédant même pas aux premières (sauf peut-être en ce qui regarde la congruence paratactique à laquelle la considération des foyers conduit d'une manière particulièrement directe et immédiate).

Je me borne d'ailleurs, dans ce qui va suivre, à ce point de vue strictement élémentaire, à l'exclusion des points de vue de Géométrie analytique ou de Géométrie infinitésimale auxquels se sont placés des auteurs tels que MM. Cosserat, Demartres, Le Vavasseur, Demoulin, Guichard, Besserve, Vessiot, etc. Aussi ai-je cru pouvoir me contenter souvent d'indiquer l'essentiel des raisonnements, en omettant des détails faciles à suppléer.

Dans toute la Géométrie anallagmatique, sans même parler de la théorie actuelle, qui, on vient de le voir, a été étudiée à plusieurs reprises par des auteurs s'ignorant réciproquement, les terminologies se sont multipliées plus que de raison. Nous avons em-

---

<sup>(1)</sup> *Comptes rendus Ac. Sc.*, 8 août 1921, et surtout *Bull. Ac. Roy. Belgique*, 5 août 1922, n° 8, p. 499 et suiv.

<sup>(2)</sup> *Comptes rendus*, 10 et 25 avril 1922. Voir aussi *Journal de Mathématiques*, 9<sup>e</sup> série, t. II, 1923, p. 99 à 165 : la propriété angulaire remarquable qui caractérise deux cercles paratactiques figure, en particulier, à la page 116 de ce dernier travail.

prunté à M. Coolidge, dont l'ouvrage est classique en la matière, celle de *cercles en involution* (voir notre Section I) et aussi celle de *cercles paratactiques* : toutefois il y aurait déjà lieu de se demander si, pour cette dernière, le mot de *cercles isogonaux*, employé par M. Vessiot (*loc. cit.*)<sup>(1)</sup>, ou celui de *cercles périalèles* ne conviendraient pas mieux pour exprimer, le premier, la constance (découverte par E. von Weber, E. Vessiot et A. Bloch) de l'angle dit de parataxie; le second, l'analogie de la propriété dont il s'agit avec celle de parallélisme (que l'interprétation non euclidienne signalée par M. Demoulin<sup>(2)</sup> a permis de préciser si heureusement), ainsi que l'enlacement mutuel qu'offrent nécessairement deux cercles qui la possèdent. A la dénomination de cercles en *biinvolution*, adoptée par M. Königs, puis (concurrentement avec celle de *croix de cercles*), par M. Coolidge pour le cas *f* de notre section I (*anneau orthogonal* de Guichard, *cercles harmoniques* de M. A. Bloch) j'ai préféré celle de *cercles conjugués*, employée par M. Vessiot (*loc. cit.*) et qui, étant donnés les cercles conjugués spéciaux qui interviennent dans la congruence paratactique, m'offrait l'économie d'une dénomination; mais je ne sais si une relation aussi remarquable et aussi classique ne réclamerait pas un terme plus intuitif, tel que celui de cercles *axiaux*, rappelant que cette relation est celle d'un cercle avec son axe et n'est que la traduction anallagmatique (voir ci-après n° 7) de ce cas particulier. Les locutions de cercles *perpendiculaires* et de *symétrie par rapport à un cercle* sont également dues à M. Vessiot.

#### I. — RAPPEL DE PRINCIPES.

1. En général, non seulement les énoncés auxquels nous arriverons, mais les raisonnements, seront anallagmatiques, c'est-à-dire ne feront intervenir que des propriétés se conservant dans une inversion quelconque: cercles, sphères, angles sous lesquels peuvent se couper ces divers éléments, rapports anharmoniques. Toutefois, bien entendu, les déductions initiales, qui sont pour la

---

(1) Page 116 du Mémoire cité du *Journal de Mathématiques*. Dans le même ordre d'idées, M. A. Bloch, dans la rédaction qu'il m'avait communiquée tout d'abord, proposait le nom de cercles *monogonaux*.

(2) Voir A. Bloch, *loc. cit.*, n° 5, p. 60.



plupart bien connues et que nous rappelons dans cette première Section, sont forcément empruntées à la Géométrie générale. On ne pourrait opérer autrement qu'en constituant au préalable, pour la Géométrie anallagmatique une Axiomatique propre, ce qui a pu d'ailleurs être fait sans parvenir à notre connaissance, et qui a déjà été fait pour la Géométrie projective.

Le mot « inversion » signifiera toujours, dans ce qui va suivre, une inversion à puissance positive, et par conséquent, à sphère d'inversion réelle, à moins que nous ne parlions d'une « inversion négative ».

Les deux cas se différencient d'ailleurs par un caractère essentiel : une « inversion proprement dite », à notre sens, c'est-à-dire une inversion à puissance positive, change les dispositions des divers trièdres, au lieu qu'une inversion négative les conserve. Une inversion négative de puissance  $-k^2$  sera, pour nous, le produit de quatre inversions proprement dites : par exemple, de l'inversion de même pôle et de puissance  $k^2$  combinée avec une symétrie par rapport à ce pôle, c'est-à-dire avec des symétries par rapport aux trois faces d'un trièdre trirectangle ayant ce point pour sommet.

Nous appellerons, avec M. A. Bloch, « transformation ou opération sphérique » (ce que nous préférons à « transformation conforme », en raison de la profonde différence qui sépare à ce point de vue le plan et l'espace) un produit d'inversions (proprement dites) en nombre *pair* et qui conserve par conséquent les dispositions des angles polyèdres.

2. Nous ne nous interdirons pas d'ailleurs de raisonner à la manière ordinaire sur les diverses directions de droites (tangentes à divers cercles) et de plans (plans tangents à diverses sphères) issues d'un même point. Cela n'empêchera nullement nos considérations d'être anallagmatiques, puisque toute transformation sphérique respecte dans toutes ses propriétés la figure formée par les directions en question.

L'introduction du rapport anharmonique pourra se faire sous forme anallagmatique par l'emploi de la proposition suivante, traduction anallagmatique de la propriété fondamentale classique.

*Le rapport anharmonique de quatre points  $a, b, c, d$  d'un*

même cercle est égal à celui que forment, en  $O$ , les tangentes aux quatre cercles  $Opa$ ,  $Opb$ ,  $Opc$ ,  $Opd$ , en désignant par  $O$  un point du cercle considéré et par  $p$  un point pris arbitrairement en dehors de ce cercle.

3. Nous nous astreignons à ne raisonner que sur des figures réelles. Toutefois, nous pourrions faire intervenir des *sphères imaginaires pures* et des *cercles imaginaires purs*. L'un et l'autre de ces éléments sont en effet susceptibles d'une définition réelle. La sphère de centre  $O$  et de rayon purement imaginaire  $k\sqrt{-1}$  se définit par l'inversion (négative) correspondante; et, de même que, dans une inversion proprement dite, les sphères et les cercles qui se conservent sont ceux qui sont orthogonaux à la sphère d'inversion (abstraction faite de cette sphère elle-même et des cercles qui sont situés sur elle), nous pourrions parler de sphères ou de cercles orthogonaux à la sphère imaginaire pure, ou même, par extension, éventuellement, «orthogonaux à l'inversion négative»: ce seront par définition les cercles ou sphères qui se conserveront dans cette inversion, par exemple, tout cercle dont le plan passera par le pôle d'inversion, ce dernier point ayant, par rapport à lui, la puissance  $-k^2$ .

Quant au cercle imaginaire de centre  $O$  et de rayon  $k\sqrt{-1}$  tracé dans un plan  $P$  qui passe par  $O$ , ou, ce qui revient au même, au cercle intersection du plan  $P$  avec le cercle-point (cône isotrope) ayant pour centre l'un des deux points  $f, f'$  situés symétriquement l'un de l'autre sur la perpendiculaire élevée à  $P$  au point  $O$  à une distance  $Of = Of' = k$ , il est défini par le faisceau des sphères par rapport à chacune desquelles les points  $f, f'$  (qui ne sont autres que les foyers du cercle) sont inverses l'un de l'autre, de même qu'un cercle réel peut être défini par le faisceau des sphères qui le contiennent. Tout faisceau de sphères et, par conséquent, tout cercle réel ou imaginaire pur définit d'ailleurs une famille à deux paramètres de cercles dont chacun est orthogonal à toutes les sphères du faisceau: dans le cas du cercle imaginaire pur, cette famille est formée des cercles qui passent par les deux foyers  $f$  et  $f'$ ; ces points exceptés, il passe un cercle  $C$  orthogonal au faisceau et un seul par un point donné  $a$  quelconque de l'espace.

4. Le cercle dont il s'agit est le lieu des inverses du point  $a$  par rapport aux diverses sphères du faisceau. Mais, de plus, cette considération permet de définir la notion (importante à notre point de vue) de *rappor anharmonique de quatre de ces sphères* : on appellera ainsi, par définition, le rapport anharmonique formé par les quatre positions correspondantes de l'inverse de  $a$ , et qui est indépendant du choix de  $a$ , en vertu de la proposition énoncée au n° 2. Le rapport anharmonique en question est celui des quatre centres ou, si le cercle d'intersection  $G$  est réel, celui des quatre plans tangents en un même point quelconque de  $G$ , comme on le voit en prenant le point arbitraire  $a$  soit à l'infini, soit infiniment voisin du cercle  $G$ .

5. Lorsque deux sphères  $S, S'$  se coupent suivant un cercle réel  $G$ , la figure qu'elles forment a un invariant anallagmatique et un seul, qui est l'angle  $V$  sous lequel ces sphères se coupent. On sait qu'un tel invariant peut être formé même dans le cas de deux sphères  $S, S'$  sans point commun, en considérant le rapport anharmonique (constant) intercepté par  $S$  et  $S'$  sur un cercle quelconque orthogonal à toutes deux.

Dans le cas des sphères sécantes, leur angle  $V$  est défini au signe et à  $\pi$  près; il peut l'être, toutefois, à  $2\pi$  (et au signe) près si l'on a *orienté* la surface de chacune des sphères ou, ce qui revient au même, donné un signe au rayon correspondant.

Pareillement, nous aurons, conformément à la conception bien connue de Laguerre, à considérer des *cycles*, c'est-à-dire des cercles sur chacun desquels un sens aura été choisi. Le signe de l'angle de deux sphères est déterminé si l'on a choisi un sens sur leur cercle d'intersection.

6. On sait (et nous reviendrons d'ailleurs sur ce point dans la suite) qu'une transformation sphérique quelconque, ou même un produit d'un nombre quelconque (pair ou impair) d'inversions peut être obtenu par quatre inversions au plus.

Mais il y a lieu de considérer spécialement celles qui résultent de deux inversions par rapport à deux sphères  $S, S'$ . Si ces dernières sont réelles et sécantes, l'opération est anallagmatiquement équivalente à une rotation, à laquelle elle se réduit si l'on transforme

toute la figure par inversion de manière à changer le cercle d'intersection en une droite et, par conséquent, S et S' en des plans. Lorsque S et S' seront des sphères quelconques, on pourra, par extension, parler d'une *rotation anallagmatique* et, étant donné le point de vue auquel nous nous placerons dans tout ce qui va suivre, l'épithète d'*anallagmatique* pourra être sous-entendue sans inconvénient. L'angle de la rotation est le double de celui sous lequel se coupent S et S', et l'opération-produit ne change pas lorsqu'on remplace S et S' par deux autres sphères quelconques se coupant suivant le même cercle et sous le même angle que les premières.

Le cas de deux inversions, par rapport à des sphères tangentes (*translation anallagmatique*) ou sans points communs (*homothétie anallagmatique*) est moins intéressant pour nous. Mais il pourra arriver que nous ignorons *a priori* dans lequel des trois cas qui viennent d'être énumérés on se trouve : lorsqu'il en sera ainsi, le produit de deux inversions sera dit *opération simple*. Une homothétie anallagmatique peut d'ailleurs être considérée comme une rotation (d'angle imaginaire) autour d'un cercle imaginaire.

Lorsque les sphères S, S' se coupent à angle *droit*, le produit des deux inversions correspondantes (anallagmatiquement équivalent à une rotation de  $180^\circ$  autour d'une droite) prendra le nom de *transposition anallagmatique* ou (comme l'a fait Darboux dans le cas d'une droite) de *renversement*; on peut évidemment encore lui donner le nom de *symétrie* par rapport au cercle d'intersection, en appelant *symétrique* d'un point *a* par rapport à ce cercle, le transformé *a'* de *a* par l'opération en question. Dans le cas dont il s'agit et dans ce cas seulement <sup>(1)</sup> : 1° l'opération-produit est indépendante de l'ordre des inversions-facteurs; 2° elle est réciproque, c'est-à-dire que le transformé *a'* n'est autre que *a*.

On remarquera que tout cercle perpendiculaire (*voir* n° 7) au cercle considéré qui passe par *a* passe également par son symétrique *a'*, et que le symétrique, par rapport à un cercle quelconque, du point à l'infini, n'est autre que le centre du cercle.

#### 7. Positions particulières de deux cercles. — Nous aurons,

---

<sup>(1)</sup> On écarte, bien entendu, le cas où S et S' coïncident et où l'on trouve l'opération identique.

avant tout, à nous occuper de la figure formée par deux cercles  $C_1$ ,  $C_2$  de l'espace. Les résultats que nous énoncerons pourront éventuellement subir des modifications dans les cas spéciaux bien connus suivants :

a. Cercles ayant *un point commun* (il peut être commode de noter que ce cas correspond anallagmatiquement à celui de deux droites). Plus spécialement :

b. Cercles *cosphériques*, avec les deux cas plus particuliers encore;

c. Cercles *tangents*;

d. Cercles *perpendiculaires* (nous appellerons ainsi, avec M. Vessiot, deux cercles qui se coupent *en deux points* et à angle droit);

e. Cercles *en involution* (Kœnigs), c'est-à-dire que, par chacun d'eux, on puisse faire passer une sphère orthogonale à l'autre;

f. Cercles *conjugués* de M. Vessiot (cercles en *biinvolution* de M. Kœnigs) : on appellera ainsi deux cercles tels que toute sphère menée par l'un soit orthogonale à l'autre.

Il serait également indiqué de les appeler cercles *axiaux*. En effet cette relation est celle de deux cercles  $C_1$ ,  $C_2$  dont le second est décrit par un point déterminé  $a$  dans sa révolution (c'est-à-dire dans sa rotation d'angle continûment variable) autour de  $C_1$ .

8. Nous examinerons plus loin dans quels cas une opération sphérique quelconque conserve un cercle déterminé  $C$ . Pour une *rotation*, les cas pour lesquels il en est ainsi sont les suivants :

1° L'axe de rotation n'est autre que  $C$ ;

2° L'axe est axial à  $C$ ;

3° L'axe est perpendiculaire à  $C$ . Mais alors il s'agit d'une transposition et, de plus, il y a inversion du sens sur  $C$ , tandis que dans les cas 1° et 2°, le *cycle*  $C$  est conservé.

Cet énoncé reste valable (son interprétation résultant des conventions précédentes) pour un cercle imaginaire, pour une homothétie anallagmatique et même pour une translation (l'axe  $A$  de la rotation se réduisant à un point et les cercles axiaux à  $A$  à des cercles passant par ce point).

9. On sait que toute sphère qui coupe sous des angles égaux deux sphères données  $S_1$  et  $S_2$  est invariante par chacune des deux inversions qui transforment ces sphères l'une dans l'autre.

Un énoncé analogue s'applique à tout cercle  $C$  qui coupe  $S_1$  et  $S_2$  sous le même angle. *Il existe deux transpositions (l'une au moins réelle) qui échangent  $S_1$  avec  $S_2$  et laissent  $C$  invariant* (les axes de ces transpositions étant perpendiculaires à  $C$ ).

10. Deux cercles non cosphériques admettent une sphère orthogonale commune et une seule. Cette sphère — laquelle se réduit à un point dans le cas spécial  $a$  (n° 7) — peut toutefois être imaginaire, et c'est précisément ce qui se produira, en général, dans toutes les déductions qui vont suivre, et au cours desquelles cette sphère imaginaire ou (n° 3) inversion négative restera constamment la même. Tous les cercles et toutes les sphères sur lesquels nous aurons à raisonner seront, sans même qu'il soit utile de l'indiquer pour chacun d'eux, orthogonaux à cette même *inversion négative fondamentale*. Nous appellerons points *opposés* ceux qui se correspondent par cette inversion : ce sera en particulier le cas pour les points d'intersection d'un des cercles avec une sphère arbitraire passant par un autre d'entre eux. Ces points seront toujours réels, étant donné que la sphère orthogonale commune sera imaginaire.

11. Notons enfin que le produit de *deux transpositions dont les axes sont conjugués entre eux est l'inversion négative orthogonale à ces deux axes* : cet énoncé est la traduction analogmatique, autrement dit le transformé par inversion, de celui par lequel, au n° 1, nous avons représenté une inversion négative.

## II. — LES CERCLES PERPENDICULAIRES COMMUNS ET LA PARATAXIE.

12. Le problème fondamental dans le sujet qui nous occupe, celui que nous nous étions posé dans l'Ouvrage précédemment cité et dont sont partis également les auteurs dont nous avons parlé ci-dessus, est le suivant :

PROBLÈME. — *Trouver un cercle perpendiculaire commun à deux cercles donnés  $C_1$ ,  $C_2$  de l'espace.*

On reconnaît immédiatement que la recherche d'un tel cercle équivaut à celle de deux sphères  $S_1, S'_1$  orthogonales entre elles passant par  $C_1$ , et de deux sphères  $S_2, S'_2$  orthogonales entre elles passant par  $C_2$  de manière que  $S_1$  soit orthogonale à  $S'_2$  et  $S_2$  à  $S'_1$ . Le cercle cherché sera l'intersection de  $S_1$  avec  $S_2$ , si ces sphères sont sécantes ou, pareillement, celle de  $S'_1$  avec  $S'_2$ .

Or, lorsque deux sphères variables passent l'une par le cercle fixe  $C_1$ , l'autre par  $C_2$  et sont assujetties à être constamment orthogonales entre elles, *elles varient homographiquement*.

La définition précédemment donnée (n° 2), du rapport anharmonique de quatre sphères  $S^{(i)} (i = 1, 2, 3, 4)$  passant par  $C$  permet de mettre la démonstration de ce fait sous forme entièrement anallagmatique.

D'après cela, à deux sphères orthogonales arbitraires passant par  $C_1$  correspondront, de par l'homographie  $H$  qui vient d'être définie, deux sphères (respectivement orthogonales aux premières) qui décriront une involution. Il est clair que *la solution cherchée est fournie par les sphères rectangulaires de cette involution*.

On voit, du même coup, que les quatre sphères  $S_i, S'_i$  sont toujours réelles. Il n'en est pas nécessairement de même des cercles perpendiculaires communs  $\Gamma$  (intersection de  $S_1$  avec  $S_2$ ) et  $\Gamma'$  (intersection de  $S'_1$  avec  $S'_2$ ); toutefois, l'un d'entre eux au moins est réel. Dans le cas où ils existent tous deux, on voit que le problème a deux solutions *qui sont deux cercles conjugués entre eux*.

Il est aisé de voir ce que devient ce résultat dans les divers cas spéciaux énumérés tout à l'heure et où, d'ailleurs, il ne tombe pas véritablement en défaut. Dans les seuls cas *e* et *f*, le problème relatif aux sphères  $S_i, S'_i$  a une infinité de solutions. Mais c'est que, en réalité, les deux cas relèvent de celui de la parataxie dont il nous reste à parler.

13. Auparavant, rappelons que le problème que nous venons de traiter est en relation (1) avec les variations de l'angle  $\nu_1$  que fait  $C_2$  avec une sphère arbitraire  $S_1$  menée par  $C_1$ , ou encore avec les rapports anharmoniques extrêmes que  $C_1$  et  $C_2$  sont sus-

---

(1) Voir les travaux cités en commençant.

ceptibles de déterminer sur un cercle cosphérique commun. Cette relation résulte immédiatement du n° 9 : il suffit que l'on ait tracé par  $C_1$  deux sphères coupant  $C_2$  sous le même angle pour en déduire un cercle perpendiculaire commun; en particulier, les valeurs extrêmes  $V, V'$  de  $\nu_1$  ne peuvent correspondre qu'aux sphères  $S_1$  ou  $S'_1$ . On voit bien ainsi immédiatement qu'un au moins des cercles  $\Gamma, \Gamma'$  est réel, et l'on voit en outre que l'autre l'est ou non suivant que les cercles donnés sont ou non « enlacés » l'un dans l'autre, au sens topologique.

Une sphère quelconque passant par  $C_1$  sera déterminée par l'angle  $\mathfrak{S}_1$  qu'elle fait avec  $S_1$ ; une sphère quelconque contenant  $C_2$  par l'angle  $\mathfrak{S}_2$ , qu'elle fait avec  $S_2$ . Pour que les deux sphères ainsi définies soient orthogonales entre elles, il faut une relation d'homographie qui (étant donné que  $S_1$  et  $S'_2$  sont homologues, ainsi que  $S_2$  et  $S'_1$ ) est de la forme

$$(1) \quad \text{tang } \mathfrak{S}_1 \text{ tang } \mathfrak{S}_2 = \text{const.}$$

Mais on peut aller plus loin et établir, en réduisant l'un des deux cercles à une droite, les formules suivantes (pour lesquelles je ne possède pas de démonstration purement anallagmatique) :

$$\begin{aligned} \cos \nu_1 &= \cos V \frac{\cos \mathfrak{S}_1}{\sin \mathfrak{S}_2} = \cos V' \frac{\sin \mathfrak{S}_1}{\cos \mathfrak{S}_2}, \\ \cos \nu_2 &= \cos V \frac{\cos \mathfrak{S}_2}{\sin \mathfrak{S}_1} = \cos V' \frac{\sin \mathfrak{S}_2}{\cos \mathfrak{S}_1}, \end{aligned}$$

$\nu_2$  étant l'angle analogue à  $\nu_1$ , c'est-à-dire celui sous lequel la sphère  $S_2$  coupe  $C_1$ , formules qui donnent la valeur de la constante de l'équation (1), savoir  $\frac{\cos V}{\cos V'}$ ; la relation entre  $\nu_1$  et  $\nu_2$ , savoir

$$\cos \nu_1 \cos \nu_2 = \cos V \cos V',$$

et la valeur de  $\nu_1$  en fonction de  $\mathfrak{S}_1$ , donnée par

$$\cos^2 \nu_1 = \cos^2 V \cos^2 \mathfrak{S}_1 + \cos^2 V' \sin^2 \mathfrak{S}_1.$$

**14. Le cas paratactique.** — Nous venons de déterminer les quatre sphères  $S_i, S'_i$  et les cercles  $\Gamma, \Gamma'$  à l'aide du dièdre droit d'une involution, — celle qui correspond, par l'homographie  $H$ , à l'involution des sphères orthogonales passant par  $C_1$  —, et trouvé ainsi deux cercles perpendiculaires communs (au plus).



Mais supposons qu'à deux sphères orthogonales entre elles passant par  $C_1$ , correspondent toujours, de par la relation indiquée, deux sphères orthogonales entre elles passant par  $C_2$ ; alors le problème précédent devient indéterminé, et il y a une infinité de cercles perpendiculaires communs.

Nous dirons, dans ce cas, avec M. Coolidge, que les deux cercles donnés sont PARATACTIQUES.

Cela aura nécessairement lieu, d'après ce qui précède (sauf si les cercles donnés sont cosphériques), dès qu'il existera, soit plus de deux cercles perpendiculaires communs, soit deux cercles perpendiculaires communs non conjugués entre eux.

Les cercles paratactiques existent effectivement. Nous en donnerons une construction générale dans un instant. Dès maintenant, ils peuvent être fournis par la résolution du problème suivant.

*Par deux points donnés,  $a, b$ , faire passer un cercle paratactique à un cercle donné  $C$ .*

Résolution qui résulte sans difficulté de ce qui vient d'être combiné avec ce qui a été dit au n° 4.

Il y aurait lieu d'ailleurs d'obtenir également une solution géométrique (anallagmatique autant que possible) (1) et réelle des problèmes suivants, lesquels sont tous quadratiques ainsi qu'on le reconnaît par la considération des foyers :

*Trouver un cercle paratactique à un cercle donné et conjugué à un autre cercle donné;*

*Faire passer par un point donné un cercle paratactique à deux cercles donnés;*

*Trouver un cercle paratactique à deux cercles donnés et orthogonal à une sphère donnée;*

*Trouver un cercle paratactique à trois cercles donnés.*

15. Deux faisceaux de plans homographiques, tels que deux plans rectangulaires de l'un correspondent toujours à deux plans

---

(1) Si l'on renonce à remplir cette condition dans le problème dont nous venons de parler, il suffit de faire passer le point  $b$  à l'infini et, ceci fait, de prendre les focales réelles du cône qui a  $a$  pour sommet et  $C$  pour base (cf. A. BLOCH, *loc. cit.*).

rectangulaires de l'autre, sont nécessairement, ainsi qu'il est facile de s'en assurer, deux faisceaux égaux. On voit donc déjà que lorsque, par deux cercles paratactiques, on fait passer deux sphères orthogonales entre elles arbitraires, ces sphères tournent d'angles égaux; et ceci définit, sur les deux cercles, des sens correspondants. Il est aisé de voir que les sens correspondants en question sont aussi ceux dans lesquels se déplacent, sur  $C_1$  et  $C_2$  respectivement, les points de rencontre avec un même cercle perpendiculaire commun variable.

Nous aurons éventuellement à considérer deux cycles paratactiques au sens près, c'est-à-dire tels que le second soit paratactique du premier pris en sens inverse : deux tels cycles seront dits *antitactiques*. (A suivre.)

### SOLUTION DE QUESTION PROPOSÉE.

2505.

(1927, p. 18 r.)

*x et y désignant deux variables réelles, établir les relations*

$$\sum_1^{\infty} \text{Log} \left( \cos^2 \frac{x}{2^n} + \text{sh}^2 \frac{y}{2^n} \right) = \text{Log} \frac{\sin^2 x + \text{sh}^2 y}{x^2 + y^2},$$

$$\sum_1^{\infty} \text{Arc tang} \left( \text{tang} \frac{x}{2^n} \text{th} \frac{y}{2^n} \right) = \text{Arc tang} \frac{y \text{ tang } x - x \text{ th } y}{x \text{ tang } x + y \text{ th } y}.$$

A. LABROUSSE.

#### SOLUTION

Par M. R. MARCHAY.

La démonstration directe des relations annoncées peut s'obtenir de la façon suivante :

Envisageons d'abord la première et soit  $f(x, y)$  le second membre, il vient

$$f(2x, 2y) = f(x, y) + \text{Log} \frac{\sin^2 2x - \sin^2 2iy}{4(\sin^2 x - \sin^2 iy)}$$

puis

$$(1) \quad f(2x, 2y) = f(x, y) + \text{Log}(\cos^2 x + \text{sh}^2 y)$$

en remarquant que

$$\begin{aligned} \sin^2 2x - \sin^2 2iy &= \cos^2 2iy - \cos^2 2x \\ &= (\cos 2iy + \cos 2x)(\cos 2iy - \cos 2x) \\ &= 4(\cos^2 iy + \cos^2 x - 1)(\cos^2 iy - \cos^2 x) \\ &= 4(\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y)(\sin^2 x - \sin^2 iy). \end{aligned}$$

La formule (1) conduit immédiatement à

$$\operatorname{Log} \frac{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}{x^2 + y^2} = \sum_1^m \operatorname{Log} \left( \cos^2 \frac{x}{2^n} + \operatorname{sh}^2 \frac{y}{2^n} \right) + f \left( \frac{x}{2^m}, \frac{y}{2^m} \right);$$

si  $m$  tend vers l'infini, le dernier terme tend vers zéro et l'on obtient la formule de l'énoncé.

La seconde formule s'établit de façon analogue : en désignant par  $f(x, y)$  la quantité qui figure au second membre sous le signe arc tang, on vérifie que

$$f(2x, 2y) = \frac{f(x, y) + \operatorname{tang} x \operatorname{th} y}{1 - (\operatorname{tang} x \operatorname{th} y)f(x, y)},$$

d'où

$$(2) \quad \operatorname{arc} \operatorname{tang} f(2x, 2y) = \operatorname{arc} \operatorname{tang} f(x, y) + \operatorname{arc} \operatorname{tang} (\operatorname{tang} x \operatorname{th} y),$$

les arc tang prenant la valeur zéro pour  $x$  et  $y$  nuls.

On achèvera comme dans le cas de la formule (1).

*Remarque.* — On arrive au résultat plus simplement en remarquant que

$$\frac{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad - \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{y \operatorname{tang} x - x \operatorname{th} y}{x \operatorname{tang} x + y \operatorname{th} y}$$

sont respectivement le carré du module et l'argument de  $\frac{\sin z}{z}$  lorsque l'on pose  $z = x + iy$ .

La formule évidente

$$\frac{\sin 2z}{2z} = \frac{\sin z}{z} \cos z,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\sin z}{z} = \cos \frac{z}{2} \cos \frac{z}{4} \cdots \cos \frac{z}{2^n} \cdot \frac{\sin \frac{z}{2^n}}{\frac{z}{2^n}},$$

donne immédiatement, en passant à la limite pour  $n$  infini et prenant les logarithmes dont on égale partie réelle et coefficient de  $i$ , les deux formules annoncées.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (SESSION DE 1927).

Mathématiques spéciales.

On donne deux droites (D), (D') non situées dans un même plan. L'axe Oz est placé sur la perpendiculaire commune à ces deux droites, l'origine O en son milieu, les axes Ox, Oy sont parallèles aux bissectrices de l'angle de ces deux droites.

On propose d'étudier le complexe des droites (A), telles que chacune d'elles soit l'axe central d'un complexe linéaire auquel appartiennent (D) et (D').

1° On déterminera le cône C engendré par les droites (A) qui passent par un point quelconque S de l'espace et l'enveloppe  $\Gamma$  de celles de ces droites, qui sont situées dans un plan quelconque  $\Pi$ . L'enveloppe  $\Gamma$  est une parabole dont on placera le foyer.

2° Existe-t-il un point S et un plan  $\Pi$ , à distance finie ou infinie, tels que toutes les droites passant par S, ou situées dans  $\Pi$ , appartiennent au complexe des droites (A)? ✕

Existe-t-il des quadriques, et des complexes linéaires, tels que toutes les droites conjuguées (ou polaires) de toutes les droites (A), par rapport à l'une quelconque de ces quadriques, ou par rapport à l'un quelconque de ces complexes linéaires, appartiennent à ce même complexe des droites (A)?

3° Trouver le lieu des positions particulières du point S, à distance finie ou infinie, pour lesquelles le cône C se décompose en deux plans, et l'enveloppe des plans  $\Pi$  pour lesquels l'enveloppe  $\Gamma$  se décompose en deux points.

Ce lieu et cette enveloppe ont une partie commune  $\Sigma$ . Dans les cas de décomposition, on placera par rapport à  $\Sigma$  les deux plans ou les deux points de la décomposition. ✕

4° Lorsque S est sur  $\Sigma$ , le cône C se décompose en deux plans  $T_1, T_2$ , lesquels se coupent suivant une droite  $\Delta$ ; trouver les plans tangents à  $\Sigma$  menés par cette droite ( $\Delta$ ).

Lorsque  $\Pi$  est tangent à  $\Sigma$ , l'enveloppe  $\Gamma$  se décompose en deux points  $I_1, I_2$  qui définissent une droite  $(\Delta')$ ; trouver les points d'intersection de  $\Sigma$  et de cette droite  $(\Delta')$ .

Démontrer que les droites  $(\Delta)$  ou  $(\Delta')$  sont tangentes à deux surfaces conoïdes, dont on déterminera le degré et les sections par des plans contenant  $Oz$  ou perpendiculaires à  $Oz$ .

On indiquera comment les points  $I_1, I_2$  se placent par rapport aux points de contact de  $(\Delta')$  avec ces deux surfaces conoïdes, comment les plans  $\Gamma_1, \Gamma_2$  se placent par rapport aux plans tangents à ces surfaces en leurs points de contact avec la droite  $(\Delta)$ .

SOLUTION PAR M. BERTRAND GAMBIER.

1° La droite  $(D)$  est définie par le point  $(0, 0, h)$  et ses paramètres directeurs  $(1, \mu, 0)$ , de sorte qu'elle a pour coordonnées plückériennes

$$(1) \quad 1, \mu, 0, -h\mu, h, 0.$$

Un complexe linéaire d'axe central  $(A)$  peut être défini d'abord par un vecteur porté par  $(A)$ , de coordonnées plückériennes,

$$(2) \quad a, b, c, l, m, n,$$

avec les notations consacrées  $[a, b, c, \text{composantes du vecteur}; l, m, n, \text{moments par rapport aux axes } Ox, Oy, Oz]$ , puis par un couple d'axe  $(A)$ , correspondant aux éléments de réduction habituels pour les systèmes de vecteurs

$$(3), \quad 0, 0, 0, ta, tb, tc,$$

où  $t$  est un paramètre numérique; le complexe linéaire correspondant est formé par les droites de moment nul relativement au système de vecteurs formé par la réunion du vecteur (2) et du couple (3), soit

$$(4) \quad a, b, c, l + ta, m + tb, n + tc.$$

En écrivant cette condition pour  $(D)$  on a

$$(5) \quad l + ta + (m + tb)\mu - h\mu a + hb = 0.$$

La droite  $(D')$  donne l'équation analogue à (5), obtenue en chan-

geant  $h$  et  $\mu$  simultanément de signe. On a ainsi les deux équations

$$(6) \quad l - ah\mu + ta = 0, \quad m\mu + hb + t\mu b = 0.$$

En éliminant le paramètre auxiliaire  $t$ , on obtient l'équation du complexe des droites (A)

$$(7) \quad bl - am - kab = 0,$$

où l'on a, pour simplifier, écrit

$$(8) \quad k = h \left( \mu + \frac{1}{\mu} \right) = \frac{h}{\sin \varphi \cos \varphi},$$

$\varphi$  étant l'angle de  $Ox$  avec  $D$ , ou le demi-angle  $(D', D)$ . Remarquons tout de suite que le couple  $(D, D')$  peut être remplacé par  $\infty^1$  autres couples, engendrant, d'après la définition même de  $k$ , le conoïde droit de Plücker  $\Sigma$

$$(9) \quad \frac{z(x^2 + y^2)}{xy} = k$$

qui joue, d'après cette remarque, un rôle important relativement au complexe; nous retrouverons  $\Sigma$  plus loin.

Une droite du complexe (A) peut être définie par un point  $(x, y, z)$  et ses paramètres  $(a, b, c)$ , de sorte qu'elle a pour coordonnées plückériennes  $(a, b, c; cy - bz, az - cx, bx - ay)$ . On a donc l'équation équivalente à (7)

$$(7') \quad b(cy - bz) - a(az - cx) - kab = 0.$$

Si donc nous laissons le point à distance finie  $(x, y, z)$  fixe, ce que nous traduirons par l'indice 0 donné à  $(x, y, z)$ , nous avons l'équation du cône C de sommet  $S(x_0, y_0, z_0)$ :

$$(10) \quad z_0(a^2 + b^2) - y_0bc - x_0ca + kab = 0.$$

Si nous laissons au contraire  $(a, b, c)$  fixes, ce que nous traduirons par l'indice 0 donné à  $(a, b, c)$ , nous avons l'équation du cylindre parallèle à la direction  $(a_0, b_0, c_0)$ :

$$(11) \quad a_0c_0x + b_0c_0y - (a_0^2 + b_0^2)z - ka_0b_0 = 0.$$

Ce cylindre se réduit à un plan; en réalité, comme ce cylindre est ce que devient le cône C quand son sommet s'éloigne à l'infini,

nous devons considérer le cylindre comme formé du plan (11) et du plan de l'infini.

Pour avoir l'enveloppe  $\Gamma$  des droites (A) situées dans le plan  $(u_0, v_0, w_0, s_0)$  on se rappellera les coordonnées pluckériennes d'une droite définie par les deux plans

$$(12) \quad \begin{cases} u_0, & v_0, & w_0, & s_0, \\ U, & V, & W, & S, \end{cases}$$

$$(13) \quad \begin{cases} v_0 W - w_0 V, & w_0 U - u_0 W, & u_0 V - v_0 U, & s_0 U - u_0 S, & s_0 V - v_0 S, \\ & & & & s_0 W - w_0 S. \end{cases}$$

Nous avons ainsi l'équation tangentielle

$$(14) \quad (w_0 U - u_0 W)(s_0 U - u_0 S) - (v_0 W - w_0 V)(s_0 V - v_0 S) - k(v_0 W - w_0 V)(w_0 U - u_0 W) = 0.$$

C'est une parabole parce que le coefficient de  $S^2$  est nul; d'après la théorie des coniques dans l'espace à deux dimensions, transportée dans l'espace à trois dimensions, on mettra cette équation (14) sous la forme canonique

$$(14') \quad \lambda[x_1 U + y_1 V + W][x_2 U + y_2 V + W] + [v_0(v_0 W - w_0 V) - u_0(w_0 U - u_0 W)][\xi U + \eta V + \zeta W + S] = 0.$$

Les deux crochets, multiplicateurs de  $\lambda$ , sont les équations tangentielles des points cycliques  $(x_1, y_1, 1, 0)$  et  $(x_2, y_2, 1, 0)$  du plan  $(u_0, v_0, w_0, s_0)$ ; dans le second groupe de termes, le premier crochet est l'équation tangentielle du point à l'infini sur l'axe de la parabole (14), obtenue en prenant dans (14) les termes en S et enfin le dernier crochet est l'équation tangentielle du foyer  $(\xi, \eta, \zeta, 1)$  cherché. En identifiant (14) et (14'), où les termes en S sont les mêmes, on a, en prenant les termes en  $U^2, V^2, W^2$  les équations

$$(15) \quad \begin{cases} \lambda x_1 x_2 - u_0 w_0 \xi = w_0 s_0, \\ \lambda y_1 y_2 - v_0 w_0 \eta = w_0 s_0, \\ \lambda + (u_0^2 + v_0^2) \zeta = k u_0 v_0, \end{cases}$$

auxquelles on adjoint

$$(16) \quad u_0 \xi + v_0 \eta + w_0 \zeta + s_0 = 0.$$

On a ainsi quatre équations linéaires aux inconnues  $\xi, \eta, \zeta, \lambda$ .

D'ailleurs  $(x_1, y_1, 1, 0)$  s'obtient par le système

$$\begin{aligned} & u_0 x_1 + v_0 y_1 + w_0 = 0, \quad x_1^2 + y_1^2 + 1 = 0, \\ \text{d'où} & \\ (17) \quad & \left\{ \begin{array}{l} (u_0 x_1 + w_0)^2 + (x_1^2 + 1)v_0^2 = 0, \\ x_1 x_2 = \frac{v_0^2 + w_0^2}{u_0^2 + v_0^2}, \quad y_1 y_2 = \frac{u_0^2 + w_0^2}{u_0^2 + v_0^2}. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ajoutant les deux premières équations (15) et tenant compte de (16) on a

$$(18) \quad \frac{\lambda[u_0^2 + v_0^2 + 2w_0^2]}{u_0^2 + v_0^2} + w_0^2 \zeta = w_0 s_0,$$

de sorte que la dernière (15) et (18) donnent  $\lambda$  et  $\zeta$ . Le calcul s'achève sans difficulté et donne

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda[u_0^2 + v_0^2 + w_0^2] = [s_0(u_0^2 + v_0^2) - ku_0 v_0 w_0] w_0, \\ \xi = \frac{-s_0 u_0}{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2} - \frac{kv_0 w_0 (v_0^2 + w_0^2)}{(u_0^2 + v_0^2)(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)}, \\ \eta = \frac{-s_0 v_0}{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2} - \frac{ku_0 w_0 (v_0^2 + w_0^2)}{(u_0^2 + v_0^2)(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)}, \\ \zeta = \frac{-s_0 w_0}{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2} + \frac{ku_0 v_0 (u_0^2 + v_0^2 + 2w_0^2)}{(u_0^2 + v_0^2)(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)}. \end{array} \right.$$

Ce calcul suppose  $w_0 \neq 0$ , car on a eu à simplifier des fractions où  $w_0$  est en facteur haut et bas; mais le résultat du calcul continue à être vrai pour  $w_0 = 0$ : d'ailleurs dans ce cas l'équation (14) se décompose en deux facteurs:  $W = 0$ , qui donne le point à l'infini sur  $Oz$ , et un autre facteur, équation tangentielle d'un point qui est le foyer à distance finie. Je n'indique pas ce qui arrive pour les plans isotropes ( $u_0^2 + v_0^2 + w_0^2 = 0$ ) ni pour les solutions imaginaires de  $u_0^2 + v_0^2 = 0$ ; je signale simplement que si  $u_0 = v_0 = 0$ , autrement dit s'il s'agit d'un plan horizontal, l'équation (14) se réduit à  $s_0(U^2 + V^2) + k w_0 UV = 0$ , de sorte que l'on obtient deux points à l'infini et qu'il n'y a plus à parler de foyer: les droites du complexe (A) situées dans un plan horizontal sont perpendiculaires aux génératrices de la surface  $\Sigma$  contenues dans ce plan.

2° Si le point S est à distance finie, l'équation du cône C n'est jamais indéterminée; si S est à distance infinie, il n'y a indétermination, pour le plan indiqué plus haut, que si le point S



s'éloigne dans la direction  $Oz$ ; toutes les droites parallèles à  $Oz$  sont des droites du complexe (A). L'équation de  $\Gamma$  n'est indéterminée que si  $u_0 = v_0 = w_0 = 0$ , comme on le voit aisément en regardant les termes en  $U^2, V^2, W^2$  déjà utilisés et les termes contenant  $S$  en facteur. Autrement dit toute droite du plan de l'infini appartient au complexe et c'est d'ailleurs pourquoi chaque enveloppe  $\Gamma$  est une parabole.

Si la quadrique  $Q$  demandée existe, cela prouve que le complexe (A) coïncide avec sa figure polaire réciproque relativement à  $Q$ ; mais alors, le cône  $C$  de sommet  $S$  se transforme en la parabole  $\Gamma$  située dans le plan  $\Pi$  polaire de  $S$  relativement à  $Q$ : cela entraîne que le centre  $\omega$  (à distance finie ou infinie) de  $Q$  soit situé sur  $C$ , de façon que  $\Gamma$  soit tangente au plan de l'infini; donc, puisque le point  $S$  est arbitraire, toutes les droites partant de  $\omega$  sont des droites du complexe et  $\omega$  est le point à l'infini de  $Oz$ ;  $Q$  est un parabolôïde d'axe parallèle à  $Oz$ .

D'autre part, d'après sa définition, le complexe (A) admet trois axes de symétrie, à savoir les axes coordonnés. Cela ne prouve pas, bien entendu, que  $Q$  doive admettre ces axes comme axes de symétrie, mais il est permis d'essayer d'abord un parabolôïde les admettant: or un parabolôïde ne peut avoir trois axes de symétrie que s'il est équilatère et nous avons ainsi à essayer les parabolôïdes ( $\lambda$  constante numérique)

$$(1) \quad xy + \lambda z = 0.$$

Si donc on part d'une droite  $A$  joignant deux points,

$$(2) \quad \left\| \begin{array}{cccc} x_0 & y_0 & z_0 & t_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \end{array} \right\|,$$

d'où

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{lll} a = x_1 t_0 - x_0 t_1, & b = y_1 t_0 - y_0 t_1, & c = z_1 t_0 - z_0 t_1, \\ l = y_0 z_1 - y_1 z_0, & m = z_0 x_1 - z_1 x_0, & n = x_0 y_1 - x_1 y_0, \end{array} \right.$$

la droite polaire réciproque  $\bar{A}$  est l'intersection des plans

$$(4) \quad \left\| \begin{array}{cccc} y_0 & x_0 & \lambda t_0 & \lambda z_0 \\ y_1 & x_1 & \lambda t_1 & \lambda z_1 \end{array} \right\|,$$

d'où

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \bar{a} = \lambda(x_1 t_0 - x_0 t_1), & \bar{b} = \lambda(y_0 t_1 - y_1 t_0), & \bar{c} = y_1 x_0 - x_1 y_0, \\ \bar{l} = \lambda(y_0 z_1 - y_1 z_0), & \bar{m} = \lambda(x_0 z_1 - x_1 z_0), & \bar{n} = \lambda^2(t_0 z_1 - t_1 z_0) \end{array} \right.$$

ou plus simplement

$$(6) \quad \begin{cases} \bar{a} = \lambda \alpha, & \bar{b} = -\lambda b, & \bar{c} = n, \\ \bar{l} = \lambda l, & \bar{m} = -\lambda m, & \bar{n} = \lambda^2 c, \end{cases}$$

et l'on constate aussitôt que la substitution  $(\alpha, b, l, m; \bar{\alpha}, \bar{b}, \bar{l}, \bar{m})$  n'altère pas l'équation du complexe A. On a donc obtenu  $\infty^1$  quadriques Q de l'espèce demandée. Pour découvrir les autres quadriques Q' raisonnons ainsi : deux transformations successives par polaires réciproques relativement à Q puis Q' équivalent, comme on sait, à une transformation homographique dans laquelle la surface  $\Sigma$  définie plus haut doit se conserver (si, en ne se servant que de la notion d'axe central, cette propriété n'est pas immédiate, elle le devient si l'on songe aux propriétés énoncées dans la partie 3<sup>o</sup> pour  $\Sigma$ ); or  $\Sigma$  a quatre droites remarquables : l'axe Oz ligne double de la surface; la droite à l'infini du plan xOy, droite accidentelle de  $\Sigma$ ; les deux droites  $z = \pm \frac{k}{2}$  qui sont des génératrices G et G' stationnaires. Donc, dans l'homographie, en jeu, qui conserve d'ailleurs le plan de l'infini et le point à l'infini sur Oz, l'axe des z doit se conserver (au moins dans son ensemble); la droite à l'infini du plan xOy se conserve dans les mêmes conditions; quant à G et G' ou bien chacune se conserve (dans son ensemble) ou bien elles s'échangent l'une avec l'autre. Dans le premier cas, les points de l'axe des z sont soumis à une homographie sur Oz laissant trois points invariants, de sorte que Oz s'échange avec lui-même *point pour point* : chaque plan horizontal s'échange donc (dans son ensemble) avec lui-même, de sorte que l'origine O s'échange avec elle-même, le plan xOy avec lui-même, et les deux génératrices Ox, Oy de  $\Sigma$  ne peuvent que s'échanger chacune avec elle-même ou chacune avec l'autre; dans la seconde hypothèse, chaque point de Oz est remplacé par son symétrique relativement à O, ainsi que chaque plan horizontal, de sorte que finalement O, xOy, Ox, Oy se trouvent échangés dans les mêmes conditions que précédemment; bien que nous n'ayons pas achevé la discussion, cette conclusion suffit. En effet la quadrique particulière Q  $\equiv xy + z = 0$  change O en xOy, xOy en O; donc Q' doit changer xOy en O et O en xOy, autrement dit Q' est aussi tangente au plan xOy en O; d'autre part Q change Ox en Ox

et  $Oy$  en  $Oy$  donc  $Q'$  doit changer, soit  $Ox$ , avec  $Ox$  et  $Oy$  en  $Oy$ , soit  $Ox$  avec  $Oy$ ; dans le premier cas  $Q'$  admet  $Ox$  et  $Oy$  comme génératrices, et nous retrouvons les quadriques  $xy + \lambda z = 0$  déjà trouvées et l'homographie annoncée est  $(x; y; z; t | \lambda x; \lambda y; z; t)$ ; dans le second cas,  $Ox$  et  $Oy$ , tangentes à  $Q'$ , sont conjuguées par rapport à  $Q'$  (au sens à la fois de la théorie des quadriques et de l'indicatrice de Dupin), de sorte que les plans directeurs de  $Q'$  sont donnés par une équation  $x^2 + \lambda y^2 = 0$ , où  $\lambda$  est une certaine constante. On essaie donc la quadrique

$$(7) \quad Q' \equiv x^2 + \lambda y^2 + 2\mu z = 0,$$

on remplace ainsi les tableaux (4), (5), (6) par

$$(8) \quad \begin{vmatrix} x_0 & \lambda y_0 & \mu t_0 & \mu z_0 \\ x_1 & \lambda y_1 & \mu t_1 & \mu z_1 \end{vmatrix},$$

$$(9) \quad \begin{cases} \bar{a} = \lambda \mu b & \bar{b} = -\mu a, & \bar{c} = -\lambda n, \\ \bar{l} = -\mu m, & \bar{m} = \lambda \mu l, & \bar{n} = \mu^2 c. \end{cases}$$

L'équation

$$\bar{b}\bar{l} - \bar{a}\bar{m} - k\bar{a}\bar{b} = 0$$

équivalent à

$$am - \lambda^2 bl + k\lambda ab = 0;$$

pour que le complexe réciproque de  $(\bar{A})$  coïncide avec  $(A)$ , il faut donc que  $\lambda = 1$ ;  $Q'$  est un paraboloidé quelconque de révolution de sommet  $O$  et axe  $Oz$ ; on constate bien que les deux points  $(x, y, z, t)$  et  $(\mu y, \mu x, z, t)$  ont même plan polaire, le premier par rapport à  $Q$ , le second par rapport à  $Q'$ .

Des considérations de même nature font découvrir les complexes  $\mathcal{C}$  demandés; comme le cône  $C$  doit être remplacé par une parabole  $\Gamma$ , l'axe du complexe  $\mathcal{C}$  doit être génératrice du cône, quel que soit  $S$ ; donc l'axe du complexe est parallèle à  $Oz$ ; d'autre part, la transformation de  $(A)$  par rapport à l'une des quadriques  $Q$  précédemment obtenues, suivie de la transformation relativement au complexe  $\mathcal{C}$ , doit reconstituer comme précédemment  $(A)$  et  $\Sigma$ ; or l'axe  $Oz$  est devenu la droite de l'infini du plan  $xOy$  dans la première transformation; donc  $Oz$  est précisément l'axe central de  $\mathcal{C}$ . On constate aussitôt que, *réciproquement*, le complexe  $n + \lambda c = 0$  où  $\lambda$  est une constante arbitraire, jouit bien de la propriété; le plan polaire du point  $(x, y, z)$  est,

en effet  $\lambda(Z - z) + Yx - Xy = 0$ ; la droite polaire de celle qui joint  $(x_0, y_0, z_0, t_0)$  et  $(x_1, y_1, z_1, t_1)$  est l'intersection des plans

$$(10) \quad \left\| \begin{array}{cccc} -y_0 & x_0 & \lambda t_0 & -\lambda z_0 \\ -y_1 & x_1 & \lambda t_1 & -\lambda z_1 \end{array} \right\|,$$

d'où, par calcul analogue à celui du tableau (4),

$$(10) \quad \bar{a} = \lambda a, \quad \bar{b} = \lambda b, \quad \bar{c} = -n, \quad \bar{l} = \lambda l, \quad \bar{m} = \lambda m, \quad \bar{n} = -\lambda c,$$

et même vérification. On a ainsi vérifié que les points  $(x, y, z, t)$ ,  $(y, x, z, t)$ ,  $(x, -y, -z, t)$  ont même plan polaire relativement aux quadriques  $xy + \lambda z = 0$  pour le premier,  $x^2 + y^2 + 2\lambda z = 0$  pour le second, ou au complexe  $n + \lambda c = 0$  pour le dernier. On n'obtient qu'une série  $\infty^1$  de complexes  $\mathcal{C}$ , tandis que l'on avait obtenu deux séries  $\infty^1$  de quadriques; le procédé employé permet d'affirmer que  $\bar{n} + \bar{c} = 0$  étant un complexe particulier, les complexes polaires de ce premier par rapport aux quadriques

$$xy + \lambda z = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 + 2\mu z = 0$$

sont toutes les solutions; or les transformés de  $\bar{n} + \bar{c} = 0$  sont respectivement  $\lambda^2 c + n = 0$  et  $\mu^2 c - n = 0$ , de sorte que nous pouvons néanmoins dire que nous avons deux séries  $\infty^1$  de complexes et non une seule, suivant le signe de la quantité constante  $\frac{c}{n}$ ; du reste, on sait que dans la théorie de la réduction d'un système de vecteurs, il y a deux cas bien distincts au point de vue de l'orientation, suivant que, sur l'axe central, la résultante générale et l'axe du couple sont ou non du même sens.

3° Le cône C de sommet S  $(x_0, y_0, z_0)$  se décompose si le sommet est sur la surface  $\Sigma$  déjà rencontrée

$$(1) \quad z(x^2 + y^2) - kxy = 0.$$

La parabole  $\Gamma$  ne se décompose que, si dans le calcul fait plus haut, on trouve  $\lambda = 0$ , d'où une équation tangentielle décomposée

$$(2) \quad w[s(u^2 + v^2) - kuvw] = 0.$$

On voit aisément que l'équation tangentielle de  $\Sigma$  est précisément donnée par le crochet multiplicateur de  $w$  dans (2). Sans

calcul, cela résulte de ce que la conjuguée d'une droite horizontale rencontrant  $Oz$  est, relativement au paraboloidé  $xy + z = 0$ , la droite horizontale obtenue en changeant  $z$  et  $\frac{y}{x}$  simultanément de signe, de sorte que  $\Sigma$  est à elle-même sa surface réciproque; cette transformation revient à prendre

$$(3) \quad u : v : w : s :: y : x : t : z.$$

Je rappelle que  $w = 0$  est l'équation tangentielle du point à l'infini sur  $Oz$ ; d'autre part,  $S$  à distance infinie décompose le cône  $C$  en le plan de l'infini et un plan à distance finie.

Pour la clarté, je prends sur  $\Sigma$  un point  $M$

$$(M) \quad \rho \cos \varphi, \quad \rho \sin \varphi, \quad k \sin \varphi \cos \varphi,$$

où  $\rho$  et  $\varphi$  sont deux coordonnées curvilignes de signification évidente; un calcul aisé donne pour coordonnées du plan tangent  $T$  à  $\Sigma$  en  $M$  (j'adopte la notation  $T \equiv M\Sigma$  pour rappeler la définition du plan  $T$ ),

$$(M\Sigma) \equiv (T) \quad k\rho \sin \varphi \cos 2\varphi, \quad -k\rho \cos \varphi \cos 2\varphi, \quad \rho^2, \quad -k\rho^2 \sin \varphi \cos \varphi.$$

Le foyer  $F$  du plan  $T$  a pour coordonnées (fin de partie 1°), avec notation semblable  $F \equiv T\Sigma$  pour rappeler la définition du point  $F$ ,

$$(F) \equiv (T\Sigma) \quad \rho \frac{\cos \varphi}{\cos 2\varphi}, \quad \frac{-\rho \sin \varphi}{\cos 2\varphi}, \quad -k \sin \varphi \cos \varphi.$$

La droite  $MF$  est tangente à  $\Sigma$  en  $M$ ; le plan méridien  $OzF$  correspond à l'angle  $-\varphi$  tandis que  $OzM$  correspond à  $\varphi$ , et la cote de  $F$  est égale à celle de  $M$  changée de signe; autrement dit,  $F$  est sur la génératrice  $G'$  associée à celle  $G$  de  $M$ , le couple  $GG'$  pouvant remplacer  $DD'$  comme il a été dit plus haut; la droite  $MF$  a pour paramètres directeurs

$$(4) \quad \rho \sin \varphi, \quad -\rho \cos \varphi, \quad -k \cos 2\varphi,$$

de sorte qu'en projection horizontale  $MF$  est orthogonale à  $G$ : cela donne une construction simple du plan tangent en  $M$ ; car nous pouvons figurer  $\Sigma$  en *cotée*: les génératrices deviennent les rayons issus de  $O$ ,  $G$  et  $G'$  sont deux droites symétriques par rapport à  $Ox$  (ou  $Oy$ ) et  $MF$  est perpendiculaire en  $M$  à  $OM$ ; c'est

la ligne de plus grande pente du plan tangent qui se trouve ainsi coté (le lecteur est prié de faire cette figure très simple nécessaire pour la suite).

Cela posé, au point M, le cône C se décompose manifestement ; en remplaçant  $z_0$  par  $\frac{kx_0y_0}{x_0^2 + y_0^2}$ , on obtient

$$(5) \quad (x_0 a + y_0 b) \left( \frac{a}{x_0} + \frac{b}{y_0} - \frac{c}{z_0} \right) = 0.$$

Le premier facteur donne le plan  $T_1$ ,

$$x_0(X - x_0) + y_0(Y - y_0) = 0$$

ou, si l'on préfère,

$$X \cos \varphi + Y \sin \varphi - \rho = 0,$$

perpendiculaire en M à la génératrice G ; ce plan donne manifestement une parabole dégénérée en deux points, l'un à l'infini sur  $Oz$ , l'autre étant M lui-même ; réciproquement, un plan parallèle à  $Oz$  admet pour foyer le pied sur ce plan de l'unique génératrice de  $\Sigma$  perpendiculaire à ce plan. Le second facteur donne un plan  $T_2$  pour lequel la parabole  $\Gamma$  se décompose pour la même raison en deux points dont l'un est M lui-même ; l'équation du plan  $T_2$  peut s'écrire

$$(6) \quad (T_2) \quad \frac{X}{x_0} + \frac{Y}{y_0} - \frac{Z}{z_0} - 1 = 0,$$

de sorte que ce plan perce les axes aux points  $(x_0)$ ,  $(y_0)$ ,  $(-z_0)$  ; une figure simple que le lecteur fera, montre donc que ce plan contient la génératrice  $G'$  ; il est tangent à  $\Sigma$ , et pour ce plan le point M est foyer : d'après ce qui a été dit plus haut (il n'y a ici qu'à échanger les rôles de G et de  $G'$ ) le point de contact de ce second plan avec  $\Sigma$  s'obtient sur le plan horizontal coté en abaissant de M la perpendiculaire  $M\mu$  sur  $G'$  et le point  $\mu$  a pour coordonnées

$$(\mu) \quad \rho \cos 2\varphi \cos \varphi, \quad - \rho \cos 2\varphi \sin \varphi, \quad - k \sin \varphi \cos \varphi.$$

On remarque sur cette figure simple que la droite MF est contenue : dans le plan tangent à  $\Sigma$  en M, dans le premier plan  $T_1$  qui est perpendiculaire à G, puis dans le second plan  $T_2$  qui est tangent à  $\Sigma$  en  $\mu$ , et par suite, contient  $G'$  et F. Or, dans le plan  $T_2$ ,

la parabole  $\Gamma$  se décompose en deux points dont l'un est  $M$  et l'autre rejeté à l'infini précisément dans la direction  $M\mu$ .

Cela devient évident si nous étudions le plan

$$(11) \quad a_0 c_0 x + b_0 c_0 y - (a_0^2 + b_0^2) z - k a_0 b_0 = 0$$

correspondant à la direction  $a_0, b_0, c_0$  : on voit immédiatement qu'il est tangent à  $\Sigma$ ; si nous choisissons pour  $a_0, b_0, c_0$  la direction  $MF$ , l'équation (11) devient celle du plan  $T$  tangent à  $\Sigma$  en  $M$ ; donc en échangeant les rôles de  $G$  et  $G'$ , le plan  $T_2$  tangent à  $\Sigma$  en  $\mu$  correspond à la direction  $M\mu$ .

La discussion a donc, pour le cas de décomposition de  $\Gamma$ , fourni les deux points : si  $\omega = 0$ , c'est le pied de la génératrice de  $\Sigma$  perpendiculaire au plan, réuni au point à l'infini de  $Oz$ ; si le plan est tangent à  $\Sigma$  en un point  $M$ , on a comme points de décomposition  $F$  et le point à l'infini sur la direction  $MF$  (ce qui est d'ailleurs évident puisque  $MF$  est droite double du cône dégénéré  $C$  de sommet  $M$ ).

4° Cette question se trouve déjà traitée au moins en partie; quand le point  $S$  vient coïncider avec le point  $M$  de  $\Sigma$ , la droite  $\Delta$  est la droite  $MF$  de la figure déjà tracée;  $\Delta$  coupe  $\Sigma$  en trois points : deux confondus avec  $M$ , un avec  $F$ , de sorte que les trois plans tangents issus de  $(\Delta)$  à  $\Sigma$  sont : le plan tangent en  $M$  compté deux fois et le plan tangent en  $F$  (tout de suite coté d'après la remarque faite plus haut, grâce à la perpendiculaire menée à  $G'$  par  $F$ ).

Si le plan  $\Pi$  devient tangent à  $\Sigma$  en  $M$ , les points  $I_1$  et  $I_2$  sont  $F$  et le point à l'infini de  $MF$ , de sorte que la droite  $(\Delta')$  est la même que précédemment, pourvu que  $S$  et  $\Pi$  soient un point de  $\Sigma$  et son plan tangent.

Le fait que chaque droite  $\Delta$  peut être définie comme droite  $(\Delta)$  ou  $(\Delta')$  tient à ce fait bien connu de la théorie des congruences et complexes que chaque droite peut être définie à deux points de vue corrélatifs, comme lieu de points ou comme enveloppe de plans; ceci s'applique aux surfaces focales des congruences, aux surfaces des singularités des complexes.

Ici la surface des singularités du complexe  $(A)$  est : *au point de*

vue ponctuel, constituée par  $\Sigma$  et le plan de l'infini; au point de vue tangentiel, par  $\Sigma$  et le point à l'infini de  $Oz$ ; la surface  $\Sigma$  d'une part (considérée avec ses éléments de contact) se correspond à elle-même et, d'autre part, l'élément de contact isolé (point à l'infini sur  $Oz$  et plan de l'infini) se correspond à lui-même.

Sur chaque droite du complexe (A), il y a une relation homographique entre le point S de la droite et le plan  $\Pi$  tangent au cône du complexe de sommet S, suivant la droite considérée; ici, si l'on prend la droite MF, au point M le cône du complexe de sommet M se compose du plan tangent en  $\mu$  et du plan perpendiculaire sur la génératrice G; MF est leur droite d'intersection, de sorte que tout plan passant par MF doit être considéré comme tangent au cône dégénéré; l'homographie annoncée est singulière, le plan correspondant à M étant indéterminé; à un plan *quelconque* passant par MF correspond toujours le point M; pour le plan tangent en M à  $\Sigma$  le point correspondant (point de contact de  $\Gamma$  avec MF) est indéterminé, puisque  $\Gamma$  se réduit alors à deux points situés sur MF (F et le point à l'infini sur MF).

Les droites  $\Delta$  dépendent de deux paramètres (ceux qui fixent M sur  $\Sigma$ ); donc elles engendrent une congruence; l'une des surfaces focales est évidemment  $\Sigma$ .

J'applique maintenant la méthode classique relative aux congruences : une droite de la congruence étant définie par des équations paramétriques

$$(1) \quad X = x + \lambda f, \quad Y = y + \lambda g, \quad Z = z + \lambda h,$$

où  $x, y, z, f, g, h$  sont des fonctions connues de deux paramètres  $u, v$ , on cherche à déterminer une relation entre  $u, v$  pour que la droite (1) engendre une développable; cela se traduit par

$$(2) \quad \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ df & dg & dh \\ f & g & h \end{vmatrix} = 0$$

et le paramètre  $\lambda$  est alors déterminé par les deux équations compatibles

$$(3) \quad \frac{dx + \lambda df}{f} = \frac{dy + \lambda dg}{g} = \frac{dz + \lambda dh}{h}.$$



Ici on prend, avec les paramètres  $\rho, \varphi$  pour la droite MF,

$$(4) \quad \begin{cases} x = \rho \cos \varphi, & y = \rho \sin \varphi, & z = k \sin \varphi \cos \varphi, \\ f = \rho \sin \varphi, & g = -\rho \cos \varphi, & h = -k \cos 2\varphi. \end{cases}$$

Le déterminant (2) se simplifie aussitôt en ajoutant à la première ligne le produit de la dernière par  $d\varphi$ ;  $d\rho$  est mis en facteur (ce facteur donne sur le conoïde  $\Sigma$  les trajectoires orthogonales des génératrices,  $\rho = C$  où  $C$  est une constante arbitraire); dans le déterminant ainsi réduit, on retranche de la deuxième ligne le produit de la nouvelle première ligne par  $\rho d\varphi$ , et il reste l'équation très simple

$$(5) \quad d\rho \cos 2\varphi + 2\rho \sin 2\varphi d\varphi = 0$$

qui s'intègre en divisant par  $\rho \cos 2\varphi$  et donne

$$(6) \quad \rho = C_1 \cos 2\varphi,$$

où  $C_1$  est une constante arbitraire : cela détermine ainsi sur  $\Sigma$  les courbes conjuguées des courbes  $\rho = C$ . En remplaçant dans (3)  $x, y, z, f, g, h$  par les valeurs (4) avec  $\rho = C_1 \cos 2\varphi$ , on trouve aussitôt

$$(7) \quad \lambda = \frac{2 \sin 2\varphi}{\cos 2\varphi};$$

de la sorte les droites  $\Delta$  restent tangentes à une nouvelle surface  $\Sigma'$  définie par les équations paramétriques ( $C_1$  et  $\varphi$  étant regardés comme paramètres curvilignes) :

$$(8) \quad \begin{cases} X = C_1(\cos \varphi \cos 2\varphi + 2 \sin \varphi \sin 2\varphi) = C_1 \cos \varphi (3 - 2 \cos^2 \varphi), \\ Y = C_1(\sin \varphi \cos 2\varphi - 2 \cos \varphi \sin 2\varphi) = C_1 \sin \varphi (2 \sin^2 \varphi - 3), \\ Z = k(\sin \varphi \cos \varphi - 2 \sin 2\varphi) = -3k \sin \varphi \cos \varphi. \end{cases}$$

Sur cette surface les courbes  $C_1 = \text{const.}$  sont les enveloppes des droites MF; les courbes conjuguées s'obtiennent en écrivant

$$C_1 \cos 2\varphi = C,$$

où  $C$  est une constante arbitraire (celle qui a été employée plus haut).

Si l'on appelle  $f$  le point où MF touche  $\Sigma'$ , on a une relation simple entre M, F,  $f$ ; il suffit de considérer leurs cotes :

$$k \sin \varphi \cos \varphi, \quad -k \sin \varphi \cos \varphi, \quad -3k \sin \varphi \cos \varphi;$$

le point  $F$  est le milieu de  $Mf$ ; le plan tangent en  $M$  à  $\Sigma$  a été déterminé par  $G$  et  $MF$ ; le plan tangent en  $f$  à  $\Sigma'$  est le plan osculateur en  $M$  à la trajectoire orthogonale de  $G$  qui passe en  $M$ : or pour  $\Delta$ , considérée comme droite ( $\Delta'$ ), les points  $I_1$  et  $I_2$  sont  $F$  et le point à l'infini, de sorte que  $M$  et  $f$  sont conjugués harmoniques relativement à  $I_1$  et  $I_2$ ; d'après les propriétés corrélatives [d'ailleurs (A) se transforme en lui-même par les transformations dualistiques indiquées dans la seconde partie], les deux plans  $T_1, T_2$  ( $T_1$  perpendiculaire à  $G$  en  $M$ , contenant  $MF$ , puis  $T_2$  tangent à  $\Sigma$  en  $\mu$ , contenant  $MF$  aussi) sont conjugués harmoniques relativement aux plans tangents à  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  en  $M$  et  $f$ .

Il reste à indiquer le degré de  $\Sigma'$ . Les équations paramétriques (8) donnent

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{X}{Y} = \operatorname{tang} \varphi \frac{-3 - \operatorname{tang}^2 \varphi}{3 \operatorname{tang}^2 \varphi + 1}, \\ Z = -3k \frac{\operatorname{tang} \varphi}{1 + \operatorname{tang}^2 \varphi}. \end{cases}$$

On voit bien que  $\Sigma'$  est un conoïde; un plan horizontal donne deux valeurs de  $\operatorname{tang} \varphi$  donnant deux génératrices symétriques par rapport aux bissecteurs du dièdre  $x(Oz)y$  (comme sur  $\Sigma$ ); un plan contenant  $Oz$  donne trois valeurs de  $\operatorname{tang} \varphi$ ; il résulte de là que  $Oz$  est ligne double de la surface et que  $\Sigma'$  est un conoïde de degré 5; la ligne à l'infini du plan  $xOy$  est ligne triple de  $\Sigma'$ .

*Remarques géométriques.* — *A priori* il est évident que si  $M$  est un point de la droite  $D$ , toute droite issue de  $M$  et s'appuyant sur  $D'$  est l'axe central d'un complexe spécial dont  $D$  et  $D'$  font partie: le lieu de ces droites est le plan  $M(D')$ ; de même si par  $M$  on mène une droite  $\delta$  perpendiculaire à  $D$ , cette droite répond évidemment à la question pour  $D$ , car un vecteur quelconque porté par  $\delta$  et un couple quelconque d'axe  $\delta$  ont séparément un moment nul relativement à  $D$ ; or on peut disposer du rapport numérique des longueurs représentant le vecteur et l'axe du couple de façon que le système ainsi obtenu ait un moment nul relativement à  $D'$ : donc pour chaque point de  $D$ , il y a un lieu de droites (A) réduit à deux plans. Comme le problème reste le même si nous remplaçons le couple  $D, D'$  par un couple  $G, G'$  de deux génératrices de  $\Sigma$  symétriques relativement à  $Ox$  (ou  $Oy$ ),

nous voyons aussitôt que  $\Sigma$  est lieu des points pour lesquels le cône  $C$  se décompose.

D'autre part  $M$  étant un point quelconque de l'espace, la droite issue de  $M$  et s'appuyant sur  $D$  et  $D'$  est l'axe d'un complexe spécial répondant à la question. Cette propriété donne le moyen d'obtenir successivement les  $\infty^1$  génératrices du cône  $C$ , en utilisant successivement tous les systèmes  $G, G'$  : les points ainsi obtenus sur  $G$  et  $G'$  décrivent, comme on le verra plus bas, une biquadratique gauche.

Il faut remarquer à ce propos que si l'on remplace un couple  $D, D'$  par un autre  $G, G'$  on ne change pas le résultat du problème, mais sur chaque droite du complexe (A) le paramètre  $t$  introduit dans la première partie varie. Ce paramètre correspond à l'invariant  $\frac{AL + BM + CN}{A^2 + B^2 + C^2}$  du complexe linéaire introduit : il ne faut pas oublier cette remarque, si l'on veut éviter des fautes.

D'autre part la surface  $\Sigma$  est le lieu des axes centraux des complexes linéaires du faisceau  $C + \lambda C' = 0$ , où  $C$  et  $C'$  sont les complexes spéciaux définis par  $D$  et  $D'$ .

Nous allons indiquer une seconde construction géométrique du cône  $C$  relatif au point  $M$ ; puisque toute droite qui coupe à angle droit une génératrice  $G$  de  $\Sigma$  appartient au complexe (A), on obtient  $C$  en abaissant de  $M$  la perpendiculaire sur chaque génératrice de  $\Sigma$ ; la figure précédemment faite en cotée montre que les pieds de ces perpendiculaires sont sur le cylindre de révolution d'axe vertical ayant pour section droite le cercle décrit, dans le plan de projection sur  $Om$  comme diamètre,  $m$  étant la projection horizontale de  $M$ . Or un cylindre de révolution vertical quelconque coupe  $\Sigma$  suivant une biquadratique gauche (complétée par les droites à l'infini des plans  $x \pm iy = 0$ ); si le cylindre contient  $Oz$ , cette biquadratique comprend  $Oz$  comptant pour deux unités, et il reste une ellipse  $E$ ; cette ellipse  $E$  est la base du cône  $C$ . [Je rappelle la propriété classique que l'intersection de  $\Sigma$  avec un cylindre de révolution vertical contenant  $Oz$  reste invariable en grandeur quand le cylindre tourne autour de  $Oz$ .] L'intersection de  $C$  et de  $\Sigma$  se compose donc de l'ellipse trouvée par cette seconde construction et d'une biquadratique gauche donnée au contraire par la première construction.

---

---

**CERTIFICAT DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.**

---

ÉPREUVE THÉORIQUE — C.122. — I. Soit l'équation aux dérivées partielles

$$(E) \quad p^2 - q^2 = 2f(z).$$

1° Quelle que soit la fonction  $f(z)$ , (E) admet une intégrale complète formée de surfaces développables. Quelle est la nature de ces développables ?

2° Calculer le rayon de courbure des projections sur le plan  $xOy$  des courbes caractéristiques  $C$  de (E). En déduire un caractère géométrique des courbes  $C$ .

3° Trouver sur chaque surface intégrale  $S$  de (E) les conjuguées des courbes  $C$  situées sur  $S$ .

4° Les courbes  $C$  peuvent-elles être lignes de courbure des surfaces  $S$  ?

5° Déterminer  $f(z)$  de façon que (E) admette pour intégrales des surfaces de révolution autour d'une parallèle à  $Ox$  située dans le plan  $xOy$ . Quelles sont ces surfaces de révolution ?

6° Peut-on choisir  $f(z)$  de façon que (E) admette pour intégrales des surfaces hélicoïdes d'axes  $Ox$  ? Et quelles sont ces surfaces (1) ?

C.123. — II. Déterminer la fonction  $U(u)$  de manière que les images dans le plan  $(u, v)$  des géodésiques des surfaces d'élément linéaire

$$ds^2 = U^2(u)(du^2 + dv^2)$$

soient des circonférences. [On pourra exprimer, si l'on veut, que le rayon de courbure de ces courbes images est constant.]

ÉPREUVE PRATIQUE. — C.124. — Déterminer une fonction monogène analytique  $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$  de la variable complexe  $z = x + iy$  telle que l'argument de  $f(z)$  ne dépende que du produit  $x\gamma$ , et que l'on ait  $f(0) = 1$ ;  $f''(0) = 2$ .

N. B. — On pourra exprimer  $P$  et  $Q$  en fonction du module et de l'argument de  $f(z)$ ; on pourra également utiliser une transformation analytique  $z = \varphi(u)$  qui, appliquée à  $u = f(z)$ , abrège les calculs.

(Poitiers, juin 1927.)

---

(1) Cette dernière question n'était pas posée aux candidats.

---

---

## RÉCENTS PROGRÈS DE LA GÉOMÉTRIE ANALLAGMATIQUE ;

PAR J. HADAMARD.

(*Suite et fin.*)

---

### III. — LES SYMÉTRIÉS DU SYSTÈME DE DEUX CERCLES.

16. Les propriétés précédentes découlent immédiatement de la notion de parataxie. Mais, comme nous l'avons dit, d'autres plus cachées et plus importantes se rattachent naturellement à la considération des transpositions admises par les cercles donnés.

Il est clair, en effet, que *chaque cercle perpendiculaire commun à deux cercles  $C_1, C_2$  (quelconques jusqu'à nouvel ordre) est l'axe d'une transposition qui conserve ces deux cercles*, tout en en renversant le sens.

Réciproquement, sauf si les cercles donnés sont cosphériques ou en involution, on obtient ainsi toutes les rotations qui les conservent tous deux.

Dans le cas général, on voit qu'on a ainsi soit une, soit deux symétries communes à  $C_1$  et à  $C_2$ .

Ceci rend tout d'abord intuitives les conséquences relatives à la variation de l'angle  $\nu$ , sous lequel  $C_2$  est coupé par une sphère arbitraire  $\mathcal{S}$  menée par  $C_1$ . Deux telles sphères symétriques l'une de l'autre par rapport à un cercle perpendiculaire commun  $\Gamma$  donnant évidemment la même valeur de  $\nu$ , une sphère passant par  $\Gamma$  donne nécessairement un maximum ou un minimum.

Inversement, d'après le n° 9, deux sphères passant par  $C_1$  et coupant  $C_2$  sous le même angle sont nécessairement symétriques l'une de l'autre par rapport à un cercle perpendiculaire commun.

17. Supposons maintenant  $C_1$  et  $C_2$  *paratactiques*.

Il y a alors une infinité de cercles perpendiculaires communs ; d'une manière plus précise, on peut se donner arbitrairement l'un

des points  $\alpha, \bar{\alpha}$  où un tel cercle coupe  $C_1$  (l'autre étant évidemment l'opposé du premier).

Donc il y a une infinité de transpositions qui conservent chacun des deux cercles  $C_1, C_2$ ; et, plus précisément, on peut en trouver une qui échange entre eux deux points  $m, n$  arbitrairement donnés sur  $C_1$ , ou encore, qui échange entre elles deux sphères  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}'_1$  arbitrairement données passant par  $C_1$ .

Donc enfin *deux sphères quelconques passant par  $C_1$  coupant  $C_2$  sous le même angle* (comme on le voit immédiatement en échangeant ces sphères l'une avec l'autre par la transposition dont nous venons de parler).

C'est le premier résultat fondamental de MM. von Weber, Vessiot et André Bloch.

18. Inversement, on obtient, de la manière la plus générale, deux cercles paratactiques par la construction suivante : deux cercles cosphériques et sécants  $C_1, \mathcal{C}$  étant coupés par un cercle orthogonal commun  $\Gamma$ , on fait tourner (n° 6)  $C$  autour de  $\Gamma$  d'un angle égal à celui sous lequel se coupent  $\mathcal{C}$  et  $C_1$ . La nouvelle position  $C_2$  occupée par  $\mathcal{C}$  après cette rotation est un cercle paratactique avec  $C_1$  : car on leur connaît déjà deux cercles perpendiculaires communs,  $\Gamma$  et le lieu  $\varpi$  engendré, dans sa rotation autour de  $\Gamma$ , par un point d'intersection de  $C$  et de  $\mathcal{C}$ ; et, de plus, les sphères  $(C_1, \mathcal{C})$  et  $(C_1, \varpi)$  coupent  $C_2$  sous le même angle, d'où (n° 9) l'existence d'un troisième cercle perpendiculaire commun, assurément distinct des deux premiers.

19.  $C_1$  et  $C_2$  étant supposés paratactiques et non conjugués, soient  $\Gamma_1, \Gamma_2$  deux de leurs cercles perpendiculaires communs, non conjugués entre eux.  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont paratactiques, puisqu'ils admettent les cercles perpendiculaires communs  $C_1, C_2$  non conjugués. Ils admettent donc, eux aussi, une infinité de cercles perpendiculaires communs  $C$ , tous paratactiques les uns aux autres.

*La nouvelle série de cercles ainsi obtenue est indépendante du choix de  $\Gamma_1$  et de  $\Gamma_2$  parmi les diverses positions qu'ils peuvent occuper. On peut, en effet (avec la précaution de prendre opposés l'un de l'autre les points où le cercle variable  $\mathcal{C}$  coupe à angle droit  $\Gamma_1$ ) construire  $C$  par la méthode du numéro précédent en*

partant de  $C_1$  et de  $\Gamma_1$ , et l'on voit ainsi qu'elle est indépendante de  $\Gamma_2$ . Semblablement, elle est indépendante de  $\Gamma_1$ .

En particulier, le conjugué de  $C_1$ , dans la série en question, est bien déterminé.

On a ainsi deux séries de cercles en relations parfaitement réciproques l'une avec l'autre, tout cercle de l'une étant perpendiculaire à tout cercle de l'autre. Chacune d'elles sera ce que nous appellerons (pour une raison qui apparaîtra dans la suite) une *série de Villarceau droite*.

Les deux cercles donnés, ainsi que tous ceux de la série dont ils font partie, sont conservés, mais avec inversion du sens, par l'une quelconque des transpositions  $\Gamma$ . Si maintenant on combine deux ou un nombre pair quelconque de telles transpositions, l'opération-produit conservera chacun des *cycles*  $C_1, C_2, C$ . Sans aborder immédiatement l'étude du groupe continu ainsi engendré, contentons-nous pour le moment de noter qu'il est transitif : il existe manifestement une de ses transformations qui change un point quelconque donné de  $C_1$  en un autre point donné quelconque du même cercle, et, par conséquent aussi, il existe deux transformations de ce groupe changeant un quelconque donné des cercles perpendiculaires communs en un autre quelconque donné de ces cercles.

20. Après avoir parlé des opérations qui conservent chacun des cercles donnés, occupons-nous de celles qui les changent l'un dans l'autre.

Il existe une infinité d'opérations simples qui changent  $C_1$  en  $C_2$ . Il est facile d'en donner une construction générale : l'une quelconque d'entre elles est le produit de deux inversions dont la première changera  $C_1$  en un cercle  $\gamma$  cosphérique tant avec  $C_1$  qu'avec  $C_2$ . Inversement, dès lors, en se donnant le cercle cosphérique  $\gamma$ , on construira immédiatement les deux inversions en question; d'une manière plus précise, si l'on s'est donné les deux *cycles*  $C_1, C_2$  et que l'on se donne aussi le *cycle*  $\gamma$ , la construction sera parfaitement déterminée. Toutefois, on ne doit pas oublier que chaque opération peut être obtenue par une infinité de choix de ces inversions.

Il résulte de là aisément qu'il existe une opération de l'espèce

considérée et une seule, qui, changeant  $C_1$  en  $C_2$ , change un point donné  $a_1$  de  $C_1$  en un point donné  $a_2$  de  $C_2$ .

21. Mais parmi les opérations précédentes, nous avons encore à considérer spécialement les *transpositions*, qui, changeant  $C_1$  en  $C_2$ , changent également  $C_2$  en  $C_1$ .

Soit  $G$  l'axe d'une telle transposition, que nous appellerons un *bisecteur* des deux cercles (ou, s'il y a lieu, des deux cycles) donnés. Tout cercle perpendiculaire commun à  $G$  et à  $C_1$  sera également perpendiculaire à  $C_2$  et, un tel cercle étant connu, on pourra trouver, de deux manières différentes (dont l'une au moins sera réelle), ses points d'intersection avec  $G$ , et, dès lors, obtenir  $G$  lui-même de deux ou de quatre manières différentes suivant que l'on se sera donné seulement les cercles ou, plus précisément, les cycles que l'on se propose d'échanger l'un avec l'autre.

Si les cercles donnés ne sont pas paratactiques, il n'y a que deux ou quatre solutions, déterminées comme nous venons de le dire. Mais dans le cas de parataxie des cercles donnés, nous ne savons pas *a priori* si  $C_1$  et le cercle inconnu  $G$  auront ou non entre eux cette même relation. Dans le premier cas, tous les cercles perpendiculaires communs à  $C_1$  et à  $C_2$  seront aussi perpendiculaires à  $G$ , et ne fourniront qu'un seul et même système de deux ou de quatre solutions; il n'en sera rien dans le second, et le nombre des solutions sera infini.

Pour décider entre ces deux hypothèses, après avoir construit les deux points d'intersection  $p, p'$  d'un cercle perpendiculaire commun  $\Gamma$  avec  $G$ , remarquons que par l'un de ces points et, par conséquent, par les deux, puisqu'ils sont opposés, passe un cercle déterminé de la série de Villarceau droite ( $C_1, C_2$ ); la transposition correspondante change nécessairement  $C_1$  en un cercle de la même série coupant  $\Gamma$  aux mêmes points que  $C_2$ , c'est-à-dire (n° 18) en  $C_2$  lui-même. Plus précisément, ce seront les deux *cycles*  $C_1, C_2$  qui sont ainsi permutés puisqu'une telle transposition conserve tous les cercles de la série perpendiculaire.

Les deux solutions du problème sont ainsi obtenues pour deux cycles paratactiques : on voit qu'elles correspondent à la première des deux hypothèses précédemment envisagées.

Au contraire, c'est la seconde qui se présente évidemment pour



deux cycles antitactiques. Dans ce cas, et dans ce cas seulement <sup>(1)</sup>, on a une infinité de bissecteurs.

Dans ce cas aussi, et dans ce cas seulement, on a cette circonstance remarquable que *toutes les opérations simples qui transforment l'un des cycles dans l'autre sont des transpositions* d'après ce que nous avons vu au numéro précédent.

Nous appellerons encore *faux bissecteurs* de deux cycles paratactiques, les bissecteurs du premier cycle et du second renversé.

22. L'existence des transpositions (toutes deux réelles, d'ailleurs, dans ce cas), qui changent l'un dans l'autre deux cycles paratactiques, montre que les pieds d'un cercle perpendiculaire commun variable décrivent des divisions homographiques. La même conclusion appliquée à la série perpendiculaire exprime que le rapport anharmonique déterminé par les deux cercles donnés sur un cercle perpendiculaire commun est constant, comme l'ont noté les deux auteurs précités.

Le théorème énoncé par les mêmes auteurs, que *tout cercle cosphérique commun  $\gamma$  coupe  $C_1$  et  $C_2$  sous des angles égaux*, résulte de l'existence des faux bissecteurs, dont il existe toujours un perpendiculaire à  $\gamma$ .

#### IV. — FORME CANONIQUE DES OPÉRATIONS SPHÉRIQUES. OPÉRATIONS PARATACTIQUES.

23. C'est M. Goursat <sup>(2)</sup> qui, le premier, a remarqué que l'opération sphérique la plus générale pouvait être représentée par un produit de deux opérations simples (l'une au moins étant une rotation proprement dite) autour de deux cercles conjugués entre eux. Cette conclusion a été retrouvée également par MM. von Weber et André Bloch. Pour l'établir par voie purement géométrique, anallagmatique et réelle, nous allons avoir besoin d'autres formes intermédiaires données à l'opération la plus générale en question.

Il est bien connu que toute opération sphérique  $\omega$  peut être,

---

<sup>(1)</sup> Nous laissons de côté les cas spéciaux du n° 7.

<sup>(2)</sup> *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 1889.

d'une infinité de manières, décomposée en quatre inversions. On peut aisément présenter la démonstration sous forme anallagmatique et même s'arranger pour que les deux premières sphères d'inversion soient sécantes entre elles, ainsi que les deux dernières, de manière à avoir affaire au produit de deux *rotations* proprement dites.

Notons tout de suite, en vue de notre résultat final, ce qui arrive dans le cas où l'on sait que l'opération sphérique donnée conserve un cycle donné  $C$ . On peut alors aisément diriger le raisonnement auquel il vient d'être fait allusion de manière à décomposer en une rotation autour de  $C$  et une opération simple conjuguée à  $C$  (produit de deux inversions par rapport à des sphères orthogonales à  $C$ ); mais cette fois, la seconde opération simple pourra ne pas être une rotation proprement dite. Le fait que toute rotation anallagmatique conserve son axe et conserve aussi tout cycle conjugué trouve ainsi sa réciproque.

24. On a, en second lieu, le théorème suivant, tout analogue au résultat bien connu, relatif aux déplacements ordinaires :

*Une transformation sphérique peut se représenter d'une infinité de manières par un produit de deux transpositions.*

En partant de notre premier résultat, celui-ci se démontre sans difficulté par la même méthode qui a servi à Halphen dans le cas des déplacements ordinaires.

*Remarque* (1). — Le résultat ainsi démontré n'a pas la même portée que dans cette dernière théorie, parce qu'il ne permet pas d'obtenir aisément le produit de deux opérations quelconques.

Il nous sera toutefois utile de noter qu'on peut très aisément combiner un nombre quelconque de rotations d'axes tous conjugués à un même cercle, grâce au fait que deux quelconques de ces axes sont toujours cosphériques entre eux.

---

(1) La décomposition en quatre inversions ou deux rotations pouvant se faire d'une infinité de manières, il en est de même de la construction du texte. Il n'en résulte pas en toute évidence qu'il en soit de même pour le résultat, c'est-à-dire pour la décomposition en deux transpositions; mais cela ressort au contraire immédiatement de notre résultat définitif (numéro suivant).

25. Du théorème qui vient d'être démontré, on déduit maintenant sans difficulté le théorème que nous avons en vue :

THÉORÈME. — *Toute transformation sphérique est le produit (évidemment permutable) de deux opérations simples conjuguées entre elles.*

(L'une au moins de ces opérations est d'ailleurs une véritable rotation.)

En effet, l'opération étant, conformément à ce que nous venons de voir, décomposée en deux transpositions  $A_1, A_2$ , construisons les quatre sphères  $S_1, S'_1, S_2, S'_2$  qui conduisent aux deux cercles  $\Gamma, \Gamma'$  perpendiculaires communs à  $A_1$  et à  $A_2$  : la première transposition est le produit des deux inversions  $S_1, S'_1$  ; la seconde, celui des inversions  $S_2, S'_2$ . En vertu des relations d'orthogonalité qui existent entre les quatre sphères et des permutabilités qu'elles entraînent entre les inversions correspondantes, on arrive immédiatement à représenter l'opération par le produit de deux opérations simples d'axes respectifs  $\Gamma, \Gamma'$ , une d'elles au moins étant une vraie rotation puisque l'un au moins des cercles  $\Gamma, \Gamma'$  est réel.

25 bis. Mais on voit aussi apparaître immédiatement le résultat remarquable de MM. von Weber et André Bloch : *il se peut que la décomposition précédente soit possible d'une infinité de manières.*

C'est ce qui arrivera en effet dès que les axes  $A_1, A_2$  des deux transpositions seront paratactiques entre eux : il suffira de prendre pour  $\Gamma$  l'un des cercles perpendiculaires communs, à condition de prendre pour  $\Gamma'$  son conjugué. C'est la transformation paratactique de M. A. Bloch. Dans ce cas, les angles des deux rotations sont égaux entre eux : ils sont doubles de l'angle de paratàxie de  $A_1$  et  $A_2$ . Ceci nous renseigne en particulier sur le groupe continu envisagé au n° 19 : il est évidemment à un paramètre et obtenu par la variation continue de l'angle commun des deux rotations que nous venons d'obtenir, les axes conjugués restant fixes.

Pour l'angle de rotation  $\pi$ , chacun des cercles perpendiculaires communs est conservé, avec changement de l'un quelconque de ses points en son opposé. En un mot, on retombe ainsi sur l'*inversion négative fondamentale.*

26. Inversement, le produit de deux rotations égales autour de deux cycles  $\Gamma$ ,  $\Gamma'$  conjugués entre eux est une transformation paratactique, conformément à la définition précédente.

Chaque série de Villarceau droite contenant  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  donne, pour cette transformation, une infinité de décompositions canoniques.

Mais il existe une infinité de séries de Villarceau de cette espèce. Tout cercle  $A$  perpendiculaire commun à  $\Gamma$  et à  $\Gamma'$  définit une telle série, formée de cercles  $C$  perpendiculaires à  $A$ .

$\Gamma$  et  $\Gamma'$  étant donnés, il passe un cercle  $A$  par un point arbitraire  $m$  de l'espace (cercle unique si  $m$  n'appartient ni à  $\Gamma$  ni à  $\Gamma'$ ) et la série de Villarceau qui en résulte contient également un cercle  $C$  qui est issu de  $m$ .

Donc, *notre transformation, produit de deux rotations conjuguées et égales entre elles, admet une infinité DOUBLE de représentations sous la forme canonique de M. Goursat.*

*Elle laisse invariant chaque cercle d'une congruence (C); il passe un cercle de (C) par un point quelconque de l'espace.*

*C'est la congruence paratactique de M. A. Bloch.*

*Deux cercles (C) quelconques sont paratactiques entre eux.*

*Les cercles de la congruence sont conjugués deux à deux. Le produit de deux rotations égales quelconques autour de  $\Gamma$  et de  $\Gamma'$  peut se remplacer par le produit analogue (avec rotations de même angle) autour de deux cercles conjugués pris arbitrairement dans la congruence.*

Tel est le beau théorème découvert par MM. von Weber et André Bloch, à l'aide de la considération des foyers et des génératrices imaginaires de la sphère imaginaire fondamentale (celle qui est orthogonale commune à  $\Gamma$  et à  $\Gamma'$ ).

27. Il est assez curieux de rattacher ce même résultat à un principe classique de la théorie des substitutions. On sait que la condition nécessaire et suffisante pour que deux opérations  $R$  et  $T$  soient permutable entre elles est que  $R$  coïncide avec sa transformée par  $T$ , de sorte que, s'il en est ainsi,  $T$  coïncidera également avec sa transformée par  $R$ .

Prenons pour  $R$  notre produit  $\Omega$  de deux rotations du même angle  $\alpha$  autour de  $\Gamma$  et de  $\Gamma'$ , et soit  $G$  un de leurs bissecteurs. Il est clair que la transposition  $G$  laisse invariante notre opéra-

tion  $\Omega$ . Donc d'après le principe qui vient d'être rappelé, celle-ci conserve la transposition  $G$  et, par conséquent,  $G$  lui même (<sup>1</sup>). On a ainsi déjà une simple infinité de cercles invariants par l'opération  $\Omega$ ; mais si maintenant on remarque que, d'après ce qui vient d'être établi, cette dernière laisse invariante toute rotation d'axe  $G$ , on en déduira encore, par une nouvelle application du même principe, que  $\Omega$  est invariante par une telle rotation et, par exemple, que, pour l'engendrer, on peut remplacer  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  par leurs nouvelles positions après la rotation en question.

Les cercles de notre congruence sont les seuls qui soient invariants par l'opération lorsque son angle reste arbitraire : si, en effet, on fait varier cet angle, le transformé d'un point déterminé  $m$  de l'espace décrit un lieu parfaitement déterminé, lequel ne peut être autre que le cercle  $C$  de la congruence issu de ce point.

Les cercles de la congruence sont même les seuls qui soient invariants par l'opération  $\Omega$  pour une valeur déterminée quelconque de l'angle  $\alpha$  autre que  $\pi$ . Il ne peut passer par un même point de l'espace deux cercles différents invariants par l'opération  $\Omega$  pour une valeur déterminée de son angle, pourvu que cette valeur ne soit pas un multiple de  $\pi$  : car on aperçoit immédiatement à ces deux cercles trois points communs.

Il en résulte que les décompositions, en nombre doublement infini, de notre opération en deux rotations conjuguées sont les seules qui existent.

28. Il y a lieu également d'établir que la décomposition en deux rotations conjuguées est unique toutes les fois que les angles de ces deux rotations ne sont pas égaux, c'est-à-dire que le produit de deux rotations conjuguées à angles inégaux et non multiples de  $\pi$  ne laisse invariant aucun cercle de l'espace autre que les axes. C'est à quoi on arrive sans difficulté en distinguant les cas d'un cercle perpendiculaire à l'un des axes, d'un cercle paratactique à l'un des axes, et d'un cercle ne présentant aucune de ces deux propriétés.

---

(<sup>1</sup>) L'hypothèse dans laquelle le sens sur  $G$  serait inversé par  $\Omega$  est écartée du moment que le fait a lieu pour toute valeur de l'angle  $\alpha$ .

Dans le même ordre d'idées, deux cercles distincts de la congruence ne sont jamais cosphériques et, par conséquent, un cercle de la congruence n'a dans celle-ci qu'un seul conjugué (1).

Une congruence paratactique est définie par deux quelconques de ses cycles conjugués (ou même par deux quelconques de ces cycles) : il en résulte qu'elle est transformée en elle-même par une rotation arbitraire autour d'un des cercles qui la composent.

Toutes les congruences de cette espèce sont d'ailleurs transformables les unes dans les autres par opérations sphériques. La figure que nous venons de définir est anallagmatiquement unique.

29. Il est encore intéressant de définir chaque cercle de la congruence précédente, non plus comme lieu d'un point variable, mais au contraire, par l'ensemble des sphères qui le contiennent.

*L'opération paratactique, lorsque son angle n'est pas multiple de  $\pi$ , ne laisse invariante aucune sphère, réelle ou imaginaire pure, autre que la sphère imaginaire fondamentale, comme on le voit immédiatement en considérant les points limites d'une telle sphère et de la sphère fondamentale, et notant que l'opération en question, lorsqu'elle ne se réduit pas à l'opération identique, ne laisse aucun point réel (2) invariant.*

*Toute sphère orthogonale à l'inversion négative fondamentale contient un cercle de la congruence (et évidemment un seul), cercle que l'on déterminera comme intersection de la sphère donnée avec une de ses transformées.*

V. — PROPRIÉTÉS DE LA CYCLIDE DE DUPIN. PUISSANCE RÉDUITE.  
OPÉRATIONS PERMUTABLES AVEC L'OPÉRATION PARATACTIQUE.

30. La *cyclide de Dupin*, anallagmatiquement équivalente au tore, peut être, comme lui, définie par la révolution d'un cercle autour d'un autre cosphérique avec lui. Si — seul cas qui interviendra dans ce qui va suivre, et qui correspond au tore véritable — les deux cercles sont sans point commun, la surface peut

---

(1) Ceci ressort d'ailleurs immédiatement de ce qu'un cercle conjugué au cercle donné et orthogonal à la sphère imaginaire fondamentale est parfaitement défini par cet ensemble de conditions (Note ajoutée lors de la trad.).

(2) On sait, au contraire, qu'elle conserve les foyers des différents cercles (C).

encore être définie en disant que tous ses points dérivent de l'un déterminé quelconque d'entre eux par deux rotations arbitraires (permutables entre elles) respectivement autour de deux cercles fixes  $\Gamma, \Gamma'$  conjugués entre eux (cercles principaux ou axes de la surface).

Lorsque les deux angles de rotation varient en restant égaux entre eux ou égaux et de signes contraires, ou, plus généralement, en gardant une différence ou une somme constante, le point mobile décrit sur la surface, d'après ce qui précède, un cercle. *C'est le théorème d'Yvon Villarceau*, dont la démonstration ainsi obtenue dégage ainsi la cause véritable et profonde.

31. Rappelons maintenant une notion remarquable qui appartient en propre à M. André Bloch : celle de la *puissance réduite* d'un point  $m$  par rapport à un cercle quelconque  $C$  de l'espace : on appelle ainsi le produit des deux distances maxima et minima du point  $m$  au cercle  $C$ , divisé par le diamètre du cercle. Le théorème démontré à cet égard par M. A. Bloch est que, dans une inversion quelconque, *la puissance réduite se retrouve, à un facteur près qui ne dépend que de l'inversion donnée et de la position du point  $m$ , à l'exclusion de celle du cercle.*

En conséquence, *le rapport des puissances réduites d'un même point  $m$  par rapport à deux cercles  $C_1, C_2$  est un invariant anallagmatique.*

Je dois à une communication personnelle de M. A. Bloch une forme parfaitement anallagmatique de la définition et du théorème précédent : il suffit de remplacer le point  $m$  par une très petite sphère quelconque  $\mathcal{N}$  tracée autour de ce point et de considérer le rapport anharmonique (constant) déterminé par  $\mathcal{N}$  et le cercle donné  $C$  sur un cercle quelconque  $\Gamma$  orthogonal à l'une et perpendiculaire à l'autre. La *puissance réduite* est le quotient de ce rapport anharmonique par le diamètre de la petite sphère, lorsque le rayon de celle-ci devient infiniment petit, et, comme on le voit, le facteur par lequel elle est multipliée du fait d'une inversion n'est autre que l'inverse de la dilatation linéaire correspondant au point  $m$  <sup>(1)</sup>.

---

(1) Il y aurait lieu de démontrer également sous forme anallagmatique, la relation que nous avons donnée, à la suite d'une communication de M. A. Bloch

Du théorème ainsi établi, il ressort que le rapport des puissances réduites d'un point cyclide de Dupin par rapport aux deux cercles principaux est constant. Pour affirmer que *le lieu des points tels que le rapport de leurs puissances réduites par rapport à deux cercles fixes  $\Gamma, \Gamma'$  conjugués entre eux soit constant, est une cyclide de Dupin* (au lieu de se composer de plusieurs cyclides), il n'y qu'à partir de la formule

$$(2) \quad k = \cot V,$$

qui exprime le rapport  $k$  des puissances réduites en fonction de l'angle de parataxie entre le cercle  $\Gamma$  et le cercle de la congruence ( $\Gamma, \Gamma'$ ) qui passe en  $m$ , et que l'on établit aisément (quoique je n'en aie pas obtenu de démonstration sous forme anallagmatique).  $k$  devant rester constant, il doit en être de même de  $V$ , d'où la conclusion demandée.

L'extension, donnée également par M. Bloch, du même théorème au cas où les cercles fixes, au lieu d'être conjugués, sont seulement paratactiques, dépend de principes auxquels nous arriverons un peu plus loin.

32. Nous avons précédemment noté que deux sphères orthogonales passant respectivement par deux cercles paratactiques donnés  $C_1, C_2$  restent orthogonales lorsqu'on les fait tourner d'un même angle quelconque autour des deux cycles  $C_1, C_2$ . Plus généralement, deux sphères quelconques passant respectivement par  $C_1$  et  $C_2$  se coupent sous un angle qui reste constant lorsqu'on les fait tourner respectivement, autour des deux cycles en question, d'un même angle arbitraire  $\alpha$ . Cette proposition (qui se déduit d'ailleurs aisément de la première par l'étude du trièdre formé en un point quelconque de  $C_1$  par les tangentes à  $C_1$ , à un cercle perpendiculaire commun et au cercle d'intersection  $\gamma$  des sphères qu'il s'agit d'étudier) apparaît immédiatement d'après les principes posés dans la section précédente, les diverses positions de la

---

(*C. R. Ac. Sc., loc. cit*) entre la puissance réduite de  $m$  par rapport à  $C$  et la puissance réduite du même point par rapport à une sphère contenant ce cercle et qui, lorsque  $C$  se réduit à une droite, devient la relation habituelle entre les distances d'un point à une droite et à un plan mené par cette droite.



figure considérée dérivant les unes des autres par l'opération paratactique qui conserve à la fois  $C_1$  et  $C_2$ .

M. André Bloch (*loc. cit.*, p. 57) l'énonce en la rattachant à une cyclide de Dupin dont  $C_1$  et  $C_2$  sont deux cercles de Villarceau du même système,  $\gamma$  étant un cercle variable du système opposé. On ne peut s'empêcher de relever avec lui ce qu'il y a de remarquable dans l'analogie qui existe entre ce théorème et la propriété classique de l'angle inscrit, surtout lorsqu'on y adjoint le fait que l'angle constant entre les sphères  $(\gamma, C_1)$  et  $(\gamma, C_2)$  est, comme il l'établit sans difficulté, la moitié de l'angle dont il faut faire tourner  $C_1$  autour d'un des axes de la surface pour l'amener sur  $C_2$ .

33. Mais le problème posé au numéro précédent et celui de M. A. Bloch sont-ils équivalents? Le lieu du cercle  $\gamma$  est-il une cyclide de Dupin; et, en conséquence, est-il légitime de nommer *série de Villarceau* l'ensemble des positions de ce cercle, comme nous l'avons fait au n° 9 pour l'ensemble des cercles perpendiculaires communs? Nous allons pouvoir répondre par l'affirmative (<sup>1</sup>).

Nous partons de deux cercles paratactiques  $C_1, C_2$  qui définissent une congruence paratactique, et d'un cercle  $p$  cosphérique commun  $\gamma$ , auquel nous faisons subir l'opération paratactique correspondante. Notons d'abord que, dans cette opération, tout point de  $\gamma$  décrit un cercle  $C$  de la congruence, de sorte que la surface engendrée est au moins doublement cerclée.

D'autre part,  $\gamma$  est perpendiculaire à un faux bissecteur déterminé  $H_0$  de  $C_1$  et de  $C_2$  et invariant par la transposition correspondante. Toute autre position de  $\gamma$  dérivant de la première par deux transpositions autour de cercles perpendiculaires communs, il en résulte qu'elle peut aussi en être déduite par une transposition autour d'un faux bissecteur variable  $H$ , et inversement, toute transposition autour d'un faux bissecteur permute entre eux les cercles  $\gamma$ .

---

(<sup>1</sup>) On remarquera qu'on peut prendre pour  $C_1$  et  $\gamma$  deux cercles quelconques se coupant en deux points  $m, \bar{m}$ , en prenant pour  $\Omega$  l'une quelconque des transformations paratactiques qui conservent  $C_1$  et ont  $m$  et  $\bar{m}$  pour points opposés.

Prenons maintenant un sens sur  $\gamma$ . Soient  $\Sigma_1$  la sphère par laquelle il faut inverser pour passer du cycle ainsi défini au cycle  $C_1$ ;  $\Sigma_2$ , la sphère par rapport à laquelle il faut inverser pour passer du même cycle à  $C_2$  *renversé*, c'est-à-dire au cycle  $-C_2$  antitactique à  $C_1$ . L'ensemble de ces deux inversions étant une rotation qui change l'un dans l'autre les deux cycles  $C_1$  et  $-C_2$ , il en résulte (n° 11) que les deux sphères  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  se coupent à angle droit et suivant un faux bissecteur des cercles donnés. Dès lors, l'inversion  $\Sigma_1$  change  $C_2$  en une des positions du cercle  $\gamma$ .

Mais ce même raisonnement peut être recommencé en conservant, par exemple, le cercle  $C_1$  et remplaçant  $C_2$  par un quelconque des cercles  $C$ , trajectoires des divers points de  $\gamma$ , on voit que la série des  $\gamma$  est symétrique de la série des  $C$  par rapport à  $\Sigma_1$  et, de même, par rapport à toute sphère  $\Sigma'_1$  transformée de  $\Sigma_1$  par notre opération  $\Omega$ .

Dès lors le produit des deux inversions  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma'_1$  conserve la congruence primitive, autrement dit, est permutable avec elle, ce qui exige que le cercle d'intersection de  $\Sigma_1$  et de  $\Sigma'_1$  appartienne à cette congruence.

De même, toutes les positions successives de la sphère  $\Sigma_2$  passent par un même cercle appartenant à la congruence (C), qui est d'ailleurs le conjugué du premier, car il ressort de l'ensemble de ce qui précède que toute position de  $\Sigma_1$  est orthogonale à toute position de  $\Sigma_2$ .

Les deux cercles conjugués ainsi obtenus sont les deux axes de la cyclide cherchée, et la démonstration du théorème est ainsi obtenue. Chacune des congruences C et  $\gamma$  peut être considérée comme définie par les cercles conjugués en question, mais avec des sens opposés sur l'un deux.

34. Le problème qui vient d'être résolu conduit naturellement à se poser le suivant :

PROBLÈME. — *Trouver tous les cas dans lesquels deux opérations sphériques sont permutables.*

Soient  $\omega$ ,  $\omega'$  ces deux opérations. Supposons d'abord que l'une au moins d'entre elles, soit  $\omega'$ , ne soit pas paratactique. Alors elle aura, soit un axe (cas d'une opération simple), soit deux

axes conjugués, les angles de rotation autour de ces axes étant inégaux. Dès lors, chacun de ces axes devra être invariant par  $\omega$  : les conditions pour qu'il en soit ainsi découlent évidemment, soit des résultats que nous venons d'obtenir, soit de ceux du n° 8.

Venons maintenant au cas où les deux opérations considérées sont paratactiques. C'est le cas des deux opérations correspondant aux congruences (C), ( $\gamma$ ) des numéros précédents, lesquelles sont bien permutable entre elles. Nous allons voir que la réciproque est vraie, c'est-à-dire que deux opérations paratactiques permutable entre elles correspondent à la même congruence [de sorte qu'elles diffèrent tout au plus par l'angle (<sup>1</sup>)] ou ont entre elles les relations considérées au numéro précédent, c'est-à-dire peuvent se déduire d'un couple commun de cercles conjugués.

Tout d'abord, en effet, l'opération  $\omega'$  doit laisser invariante l'inversion négative fondamentale de  $\omega$  et, dès lors (n° 29), cette inversion négative fondamentale doit être la même pour les deux opérations. Soient alors C,  $\gamma$  deux cercles respectivement invariants par les deux opérations et ayant un point commun  $a$ . Il y a nécessairement un second point commun, l'opposé  $\bar{a}$  de  $a$ . Si donc les deux opérations sont essentiellement différentes, et si, par conséquent, les deux cercles C et  $\gamma$  le sont (sauf peut-être pour des positions particulières de  $a$ ), la congruence correspondant à  $\omega'$  contiendra le cercle  $\gamma$  cosphérique à C et tous ses transformés par  $\omega$  lorsqu'on fait varier l'angle de celle-ci. C'est bien la conclusion demandée.

Une opération sphérique quelconque  $\omega'$ , en général non paratactique, permutable avec  $\omega$ , a nécessairement son axe ou ses axes dans la congruence C. On voit que cette conclusion subsiste lorsque  $\omega'$  est paratactique, moyennant un choix convenable des axes en question.

L'opération  $\omega'$ , supposée permutable à  $\omega$ , ne perd pas ce caractère si on la multiplie par une opération  $\omega$  d'angle arbitraire. Moyennant cette modification, on voit qu'elle peut être réduite :

De deux manières, à une rotation unique autour d'un de ses axes ;

---

(<sup>1</sup>) Le cas de l'opération d'angle  $\pi$ , qui n'est autre que l'inversion négative fondamentale, doit être mis à part, et d'ailleurs est évidemment d'un examen facile.

D'une manière unique, à une opération  $\Omega$  autour de ces deux axes à la fois.

Les opérations sphériques  $\omega'$  permutable à une opération paratactique donnée  $\omega$  forment un groupe ponctuel continu à quatre paramètres. Chacune d'elles donne une certaine permutation entre les cercles  $C$  et le groupe formé par ces permutations, isomorphe méridrique du groupe des  $\omega'$ , est, d'après ce que nous constatons, à trois paramètres (<sup>1</sup>).

Ainsi lorsque l'on considère chacun des cercles  $C$  comme un élément unique, la figure qu'ils forment admet un groupe à trois paramètres de transformations en elle-même. Les éléments en question formant une infinité double, on reconnaît là la propriété fondamentale commune à la géométrie du plan et à celle de la sphère.

Le dernier anneau de la chaîne des déductions précédentes sera en effet l'identification de la géométrie des congruences  $C$  avec la géométrie sphérique.

#### VI. — LA REPRÉSENTATION SPHÉRIQUE DE LA CONGRUENCE PARATACTIQUE.

33. *Le lieu des symétriques d'un point donné  $a$  de l'espace par rapport aux cercles d'une même série droite de Villarceau est un cercle.*

Soient, en effet,  $C_0, C$  deux cercles de la série, l'un pris une fois pour toutes, l'autre variable;  $a'_0, a'$  les symétriques de  $a$  par rapport à ces deux cercles.  $a'$  dérive de  $a'_0$  par deux transpositions successives autour de  $C_0$  et de  $C$ , c'est-à-dire par une transformation paratactique autour de deux cercles conjugués  $\gamma, \gamma'$  de la série perpendiculaire, avec un angle  $2\alpha$  égal au double de l'angle de parataxie de  $C_0$  et de  $C$ . Donc, lorsque  $\alpha$  varie, le lieu de  $a'$  est bien un cercle  $\gamma_1$  appartenant à la même congruence paratactique que  $\gamma$  et  $\gamma'$ . Sur ce cercle  $\gamma_1$ , d'ailleurs,  $a'$  peut encore être considéré comme déduit de  $a'_0$  par une rotation unique d'angle  $2\alpha$

---

(<sup>1</sup>) Le groupe des opérations sphériques  $\omega''$  permutable avec le groupe  $\omega'$  se réduit à l'ensemble du groupe  $\omega'$  et d'une famille complémentaire formée des opérations  $\omega''$  qui inversent  $\omega$ , les opérations  $\omega''$  étant d'ailleurs des transpositions.

autour du conjugué  $\gamma'_1$  de  $\gamma_1$ , ou par une inversion par rapport à une sphère menée par  $\gamma_1$  et faisant avec la sphère  $(\gamma_1, a'_0)$  l'angle  $\alpha$ .

En conséquence, *le rapport anharmonique de quatre positions successives du point  $a$  est le même que celui que forment, dans un plan, quatre directions définies par les valeurs correspondantes de  $\alpha$ .*

Enfin, *les symétriques de  $a$  par rapport à deux cercles conjugués sont deux points opposés*, en vertu du n° 11.

36. *Le lieu des symétriques d'un même point  $a$  par rapport aux cercles d'une même congruence paratactique est une sphère.*

On peut tout d'abord déduire ceci de ce fait qu'une transposition par rapport à un cercle  $C$  de la congruence peut se représenter par le produit de deux inversions l'une par rapport à une sphère  $\Sigma$  qui passe par  $a$  et, par conséquent, aussi par son opposé, l'autre par rapport à une sphère  $\Sigma'$  orthogonale à  $\Sigma$ . Celle-ci, dérivant de la première par l'opération d'angle  $\frac{\pi}{2}$ , passe par les deux points  $b, \bar{b}$  que l'on déduit de  $a$  par les deux opérations d'angle  $+\frac{\pi}{2}$  et  $-\frac{\pi}{2}$  respectivement.

Le lieu cherché est donc le lieu des inverses du point  $a$  par rapport à toutes les sphères qui passent par  $b$  et  $\bar{b}$ , à savoir la sphère  $S$  qui passe par  $a$  et qui appartient au faisceau déterminé par les sphères-points  $b, \bar{b}$ .

Mais on peut aussi rattacher le même résultat à celui qui vient d'être obtenu au numéro précédent. Soient  $C_1$  le cercle de la congruence qui passe en  $a$ ;  $C'_1$ , son conjugué;  $C$ , un troisième cercle arbitraire de la congruence déterminant avec les premiers une série droite de Villarceau. A cette série correspond (numéro précédent) un premier cercle appartenant au lieu, et qui passe par  $a$  ainsi que par son opposé  $\bar{a}$ . Ce cercle est invariant par la transposition  $C_1$ , car une telle transposition conserve la série de Villarceau : il est donc perpendiculaire à  $C_1$  en  $a$  et en  $\bar{a}$ , d'où résulte en particulier qu'il est cosphérique avec  $C_1$ .

Il suffira de faire tourner autour de  $C_1$  la série droite et, avec elle, le cercle qui vient d'être construit, pour obtenir toute la congruence et, par conséquent, tout le lieu cherché. On voit donc

non seulement que ce lieu est une sphère, mais que cette sphère est celle qui passe par  $a$  et par  $C_1$ , résultat que l'on aurait pu aussi obtenir en partant de notre première démonstration.

En particulier, pour  $a$  pris à l'infini, on voit que *le lieu des centres des cercles C est un plan*, le plan du cercle  $C_0$  conjugué à la droite (unique) que contient la congruence, c'est-à-dire ayant cette droite pour axe.

Le point construit par M. A. Bloch (*loc. cit.*, p. 60) comme représentatif plan du cercle  $C$  n'est autre que le centre de ce cercle.

37. Les points opposés dérivant l'un de l'autre par une inversion négative déterminée, on peut soumettre la sphère  $S$ , lieu des symétriques du point  $a$ , à une inversion ou à une opération sphérique  $\sigma$  telle que ces points opposés deviennent des points diamétralement opposés <sup>(1)</sup>. Sur la sphère  $S_0$  ainsi obtenue :

1° *Toutes les séries droites de Villarceau appartenant à la congruence seront représentées par des grands cercles*, puisque les cercles d'une telle série sont conjugués deux à deux.

2° *La distance sphérique de deux points représentatifs est double de l'angle de parataxie des deux cercles C auxquels ils correspondent.*

Cette distance sphérique  $\delta$  est, en effet, liée au rapport anharmonique  $h$  des deux points en question et de leurs opposés par la relation

$$(3) \quad h = -\operatorname{tang}^2 \frac{\delta}{2},$$

et nous savons, d'autre part, que  $h$  n'est autre que le rapport anharmonique des quatre directions définies par les azimuts  $0, \frac{\pi}{2}, V, \frac{\pi}{2} + V$ , c'est-à-dire à <sup>(2)</sup>  $-\operatorname{tang}^2 V$ .

(1) Cette condition sera remplie d'elle-même et, par conséquent, l'opération complémentaire inutile, si l'on a pris pour  $a$  l'un des pôles du cercle  $C_0$  sur la sphère qui a ce cercle pour grand cercle.

(2) La considération des points opposés permet, comme on le voit, de transporter dans le domaine réel l'expression de l'angle de parataxie par le rapport anharmonique des quatre génératrices sphériques (André BLOCH, *loc. cit.* p. 59).

38. Une conséquence du résultat ainsi obtenu est tout d'abord que *la figure sphérique ainsi obtenue finalement est la même, quel que soit le point  $a$  dont on a pris les symétriques successifs*. Si, en effet, on s'est arrangé pour donner à la sphère finale le rayon  $r$ , les deux figures correspondant à deux positions différentes du point  $a$  ne peuvent être qu'égales ou symétriques, puisque les distances des points homologues sont égales chacune à chacune; et c'est évidemment le premier cas qui est réalisé par raison de continuité <sup>(1)</sup>. Une *représentation sphérique* de notre congruence est ainsi parfaitement définie, représentation dans laquelle nous savons déjà que les séries droites de Villarceau donnent des grands cercles et que la distance sphérique de deux points représentatifs est double de l'angle de parataxie correspondant.

Une *série oblique* de Villarceau, engendrée par la révolution d'un cercle  $C$  de la congruence autour d'un autre cercle  $C'$  appartenant également à celle-ci, donne un petit cercle de la sphère : c'est ce qu'on voit immédiatement, moyennant la possibilité que nous venons de constater de prendre à notre convenance le point  $a$ , en choisissant celui-ci sur l'axe de révolution; et réciproquement, tout petit cercle de la sphère est représentatif d'une série oblique.

39. La même remarque va nous permettre de compléter notre résultat du n° 37 en trouvant ce qui, dans notre congruence, correspond à l'angle de deux grands cercles de la sphère. Les deux grands cercles en question correspondent à deux séries droites ayant deux cercles conjugués communs  $C, C'$ . Il est clair que l'une des deux séries peut être amenée sur l'autre par une rotation d'un angle convenable autour de  $C$  et que cet angle peut être considéré comme celui que forment, suivant  $C$ , les deux séries en question. (L'angle suivant  $C'$  serait, d'après ce qui précède; égal au précédent et d'ailleurs de sens contraire, en tenant compte des sens pris sur  $C$  et  $C'$ .) Or, en choisissant

---

(1) Il serait intéressant de définir, étant donnés deux points  $a$  et  $b$ , l'opération sphérique qui permet de transformer l'un dans l'autre les symétriques de ces deux points par rapport à un même cercle arbitraire de la congruence.

encore le point  $a$  sur  $C$ , nous voyons immédiatement que c'est cet angle, ou *angle dièdre des deux séries*, qui est égal à l'angle des deux grands cercles sur la sphère.

A chacune de nos deux séries correspond une série perpendiculaire. Soient, dans chacune de ces deux dernières,  $\Gamma_1, \Gamma_2$  les deux cercles qui partent d'un point  $a$  de  $C$  : l'angle  $(\Gamma_1, \Gamma_2)$  sera l'angle plan du dièdre qui vient d'être défini, et mesurera, par conséquent, l'angle des deux grands cercles.

Avec les notations fondamentales précédentes, nous avons le moyen de traduire en propriétés de la congruence paratactique toutes les propriétés de géométrie sphérique, aussi bien que l'on peut faire éventuellement l'inverse.

Par exemple, à un couple quelconque de cercles  $A, B$  de la congruence correspondent deux bissecteurs conjugués  $G, G'$ . Considérons la série droite qui passe par ces deux bissecteurs et par un troisième cercle  $C$  de la congruence; et, de même, les séries droites qui passent par  $B$  et les bissecteurs de  $A, C$ , par  $A$  et les bissecteurs de  $B, C$ . Ces trois séries droites ont deux cercles conjugués communs. Si l'on modifie l'un des couples de bissecteurs, le premier par exemple, en remplaçant l'un des deux cercles  $A$  ou  $B$ , et un seul, par son conjugué, on a six bissecteurs qui appartiennent à une même série droite; etc.

D'autre part, et surtout, *on peut maintenant transporter à la géométrie de la congruence paratactique les diverses formules de la trigonométrie sphérique.*

Le lieu, également découvert par M. A. Bloch, des points dont le rapport des puissances réduites par rapport à deux cercles paratactiques (et non plus conjugués) donnés soit égal à un nombre donné  $k$ , se déduit immédiatement des mêmes considérations. En effet, tout d'abord, le rapport en question est constant le long de tout cercle de la congruence. Il résulte d'autre part, de nos données actuelles, qu'il est égal à celui des distances rectilignes entre le point représentatif du cercle en question et ceux des cercles donnés. Donc, le lieu cherché est représenté sur la sphère par un cercle, c'est-à-dire qu'il est une cyclide de Dupin.

Il nous intéressera de constater qu'une démonstration directe, sans intervention de la représentation sphérique, peut être fournie pour  $k = 1$ . On peut, en effet, immédiatement indiquer comme



appartenant au lieu, c'est-à-dire ayant des puissances réduites égales par rapport aux deux cercles  $A$  et  $B$  :

- 1° Tous les points des bissecteurs  $G, G'$ ;
- 2° Tous les points de l'un quelconque  $H$  des faux bissecteurs.

Or ces derniers décrivent une cyclide de Dupin équilatère, qui est le lieu cherché (la démonstration qu'elle est le seul lieu restant toutefois à fournir). On peut démontrer que la série droite tracée sur cette cyclide, et dont font partie  $G$  et  $G'$ , est formée des axes des rotations qui changent  $A$  en  $B$ . Car si, par un point quelconque du lieu, on mène le cercle qui fait partie de la même congruence paratactique que  $A$  et  $B$ , ce cercle fera, avec  $A$  et  $B$ , des angles de parataxie égaux, d'où résulte aisément toujours en vertu de la construction du n° 18 qu'il sera l'axe d'une rotation permettant d'amener un point de  $A$  sur un point de  $B$  et, par conséquent,  $A$  sur  $B$ .

On voit immédiatement, à l'aide de la représentation sphérique, que deux séries droites quelconques appartenant à la congruence ont toujours en commun deux cercles conjugués l'un de l'autre. Si l'on démontrait ce résultat directement, on aurait, en le combinant avec celui que nous venons d'obtenir, une construction directe de la cyclide de Dupin passant par trois cercles donnés quelconques de la congruence.

40. Une telle construction permettrait, comme nous allons le voir, de retrouver sous une autre forme les résultats précédents, par une voie exactement inverse de celle que nous avons suivie précédemment et en commençant par démontrer les relations trigonométriques.

Considérons la figure — sorte de prisme — formée par trois cercles de la congruence et les séries droites qui les joignent deux à deux (ou, exactement, des portions de ces séries droites, chacune des séries étant divisée en quatre parties par les cercles considérés et une seule de ces parties étant retenue chaque fois). Sur une telle figure, nous pourrions nous proposer d'établir directement les relations classiques de la trigonométrie sphérique.

La démonstration est plus simple en supposant le prisme isocèle, c'est-à-dire deux des angles de parataxie égaux entre eux : l'intérêt

de la remarque du numéro précédent est précisément que le cas général peut se ramener à celui-là par décomposition (additive ou soustractive) du prisme quelconque en prismes isocèles. Soient donc  $A, B, B'$  trois cercles paratactiques les uns aux autres,  $B'$  se déduisant de  $B$  par une rotation d'angle  $2\alpha$  autour de  $A$  (de sorte que  $2\alpha$  est un des angles du prisme).  $B$  et  $B'$  étant ainsi deux cercles de Villarceau d'une même cyclide ayant  $A$  pour un de ses axes, soit  $C$  un cercle de Villarceau de la série opposée, lequel coupe  $B$  en un point  $b$  ainsi qu'en son opposé  $\bar{b}$ , et  $B'$  en  $b'$ . Ces cercles et ces sphères étant tous orthogonaux à la sphère imaginaire fondamentale, on peut d'ailleurs, sans diminuer la généralité, les réduire, si l'on veut <sup>(1)</sup>, à des droites et à des plans : il suffira de soumettre toute la figure à une inversion de pôle  $\bar{b}$ . Droites et plans pourront être représentés par leurs traces sur une sphère de centre  $b$ . Il suffira d'appliquer les formules classiques de la trigonométrie sphérique aux diverses directions ainsi issues de  $b$ .

Une première relation donnant l'angle  $V$  de parataxie de  $B, B'$ , savoir

$$\sin V = \sin \alpha \sin \omega,$$

dans laquelle l'angle  $\omega = (B, C)$  est double de l'angle de parataxie de  $A, B$ , a déjà été écrite par M. A. Bloch (*loc. cit.*, p. 58). Elle doit être, à notre point de vue, complétée par une autre donnant le « dièdre »  $\hat{B}$  suivant  $B$ , c'est-à-dire l'angle d'un cercle  $b\beta$  perpendiculaire commun à  $B, B'$  avec un cercle  $b\nu$  perpendiculaire commun à  $B, A$ . On trouve aisément

$$\sin \hat{B} = \frac{\cos \alpha}{\cos V} = \frac{\sin \omega \sin 2\alpha}{\sin 2V}.$$

Les deux relations précédentes (dont la seconde a également lieu pour le dièdre en  $B'$ ) donnent l'ensemble des relations entre les six éléments, « faces » et « dièdres », du prisme. Or ce sont les mêmes relations qui subsistent entre les éléments d'un triangle isocèle ayant pour angle au sommet  $2\alpha$ , pour angles à la base  $\hat{B}$  pendant que les côtés sont  $\omega, \omega, 2V$ , c'est-à-dire les doubles des dièdres.

---

<sup>(1)</sup> Ceci n'a d'ailleurs d'autre avantage que de simplifier la figure. Il n'y a rien là qui empêche les raisonnements de rester anallagmatiques.

L'identité entre les deux Trigonométries s'étend, comme nous l'avons dit, du prisme et du triangle isocèles au prisme et au triangle quelconques. Ceci fait, on pourra en déduire la représentation sphérique de la congruence en définissant un cercle quelconque de celle-ci par ses coordonnées polaires rapportées à un premier cercle fixe, et lui faisant correspondre le point de la sphère qui a mêmes coordonnées, compte tenu de la relation entre distances sphériques et angles de parataxie.

41. Cette seconde méthode est donc équivalente à la première, à ceci près qu'elle ne donne pas une construction aussi claire et aussi géométriquement définie de la représentation sphérique. Mais, par contre, elle conduit, en outre, à un élément nouveau qui mérite peut-être d'être remarqué, à savoir celui qui correspond à l'aire du triangle sphérique.

M. Cartan (<sup>1</sup>) a attiré l'attention sur l'intégrale curviligne

$$\int_c \alpha dx + \beta dy + \gamma dz$$

que l'on peut attacher à un pinceau quelconque pris dans une congruence donnée, et dans laquelle  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sont, en un point quelconque, les cosinus directeurs de la direction que la congruence fait correspondre à ce point, et sur le fait que cette intégrale, — en relation connue, dans le cas des congruences rectilignes, avec l'existence de surfaces normales à la congruence, — peut, lorsqu'elle est prise le long d'un contour fermé, se remplacer par une intégrale double étendue au pinceau des lignes de la congruence intérieures au contour. Comme il l'a remarqué également, la propriété fondamentale de cette intégrale peut s'exprimer de la façon suivante : « Partons d'un point d'une des droites qui limitent le pinceau et considérons la trajectoire orthogonale issue de  $a$  des droites limites : en général elle ne reviendra pas au point  $a$ , mais coupera de nouveau la première droite en un certain point différent de  $a$ . » Le contraire aura évidemment lieu si l'on a affaire à une congruence de normales. Ce caractère géométrique, ainsi énoncé par M. Cartan pour les congruences de droites, s'étend de

---

(<sup>1</sup>) *Bull. Soc. math. Fr.*, t. XXIV, 1896, p. 160.

lui-même aux congruences de courbes : il traduit, comme on le voit, le fait que la congruence n'est pas normale à une famille de surfaces, par un certain « décalage » entre les points de départ et d'arrivée d'une trajectoire orthogonale faisant le tour d'une petite surface tubulaire formée de lignes de la congruence, et c'est ce décalage qui peut s'exprimer par une intégrale double.

C'est précisément ainsi que nous allons procéder pour notre congruence actuelle, en partant du prisme triangulaire curviligne considéré dans ce qui précède. Par un point arbitraire  $a$  pris sur le premier de nos trois cercles, traçons le cercle perpendiculaire commun à ce premier cercle et au second, de manière à couper celui-ci en un point  $b$  <sup>(1)</sup>; par celui-ci, traçons de même l'arc de  $bc$  perpendiculaire commun au second et au troisième cercle donnés, puis par  $c$ , l'arc de cercle  $ca_1$  perpendiculaire commun au troisième cercle donné et au premier. Si — ce qui ne sera pas le cas — notre congruence était normale à une famille de surfaces, le point  $a_1$  coïnciderait avec  $a$ . Sinon, il y a lieu de considérer le décalage entre ces deux points : nous porterons notre attention sur le décalage *angulaire*, c'est-à-dire sur l'angle de l'opération  $\Omega$  qui permet de passer de  $a$  à  $a_1$ , autrement dit sur l'angle dont il faut faire tourner l'un de ces points pour l'amener sur l'autre, autour du conjugué du cercle qui les porte.

Un tel angle est indépendant de la position du point  $a$  sur le premier cercle, ainsi que du choix de celui-ci parmi les trois qui sont donnés; de plus, si un prisme de l'espèce que nous considérons est formé de deux autres adjacents entre eux, l'angle de décalage relatif au prisme somme est la somme des angles correspondant aux prismes partiels, conformément à la remarque générale de M. Cartan.

Un tel angle, étant, d'autre part, invariant par toute transformation qui, sur notre représentation sphérique de la congruence, se traduit par une rotation, doit être proportionnel à l'aire du triangle sphérique dont les sommets sont les représentations des cercles donnés.

On constate en effet (en raisonnant toujours par projection

---

(1) Le point  $b$ , de même que chacun des points  $c$ ,  $a_1$ , peut avoir deux positions opposées, de sorte que le décalage étudié n'est, jusqu'à nouvel ordre, défini qu'à  $\pi$  près. Le raisonnement du texte pourrait sans doute être utilement précisé sur ce point.

gnomonique sur la sphère de centre  $b$ ) qu'il est (toujours à  $\pi$  près) la moitié de cet aire.

42. Par l'une quelconque des deux voies précédentes, nous établissons l'identité entre la Géométrie des figures empruntées à notre congruence et la Géométrie sphérique.

Une sorte de projection de l'espace sur la sphère est ainsi opérée par l'intermédiaire des cercles  $C$ . C'est un fait imprévu et remarquable que l'existence d'une pareille projection, si profondément différente des deux projections classiques, projection orthogonale sur le plan et projection gnomonique sur la sphère, qui partagent avec elle cette propriété que la congruence des projetantes admet  $\infty^3$  transformations en elle-même.

A noter que, contrairement aux deux premières, la nouvelle méthode de projection donne un résultat unique et déterminé pour chaque point, à distance finie ou à l'infini, de l'espace.

Notre représentation sphérique est d'ailleurs celle même que l'on doit à M. André Bloch, lequel, dans le Mémoire cité, énonce, comme nous l'avons fait ci-dessus, des relations de correspondance entre les propriétés de la congruence paratactique et les théorèmes de la Géométrie classique. Mais, fait non moins digne d'attention que les précédents, *les correspondances ainsi établies ne sont pas les mêmes de part et d'autre.*

M. A. Bloch n'envisage pas l'angle dièdre introduit ci-dessus entre les séries droites  $(AB)$  et  $(AC)$ , mais bien,  $a$  étant un point quelconque de  $A$ , l'angle sous lequel se coupent les deux sphères  $(a, B)$  et  $(a, C)$ , angle différent du premier, et qui partage seulement avec lui la propriété d'être indépendant de la position du point  $a$  sur  $A$ . Cet angle n'est donc pas égal à un angle du triangle sphérique représentatif : mais (A. BLOCH, *loc. cit.*, p. 59) il est égal à un angle *du triangle rectiligne de mêmes sommets.*

En particulier, comme nous l'avons noté précédemment, la considération de ce même angle entre deux sphères a fourni à l'auteur des résultats analogues aux propriétés de l'angle inscrit, c'est-à-dire à des théorèmes de Géométrie *plane.*

Cette double analogie avec deux chapitres différents de la Géométrie classique n'est pas, pour qui veut réfléchir, ce qu'il y a de moins remarquable dans la théorie ainsi découverte.

---

---

## SUR LA GÉOMÉTRIE ANALLAGMATIQUE

(Addition à l'article précédent);

PAR J. HADAMARD.

---

A la suite de l'article qui précède (article qui sera désigné dans ce qui suit par l'abréviation A), M. Cartan m'a communiqué plusieurs compléments remarquables. J'indique ici le plus simple d'entre eux.

Parmi les diverses congruences paratactiques qui ont même sphère imaginaire principale <sup>(1)</sup>, distinguons deux espèces <sup>(2)</sup>, suivant que les sens qui se correspondent sur deux cercles de la congruence sont *dextrorsum* ou *sinistrorsum*, l'un par rapport à l'autre. Dans ces conditions, *deux congruences paratactiques*

---

(1) Je substitue ici cette dénomination à celle de sphère « fondamentale » employée précédemment : le mot de sphère *principale* avait été employé par les auteurs qui se sont occupés de cette question ou de la cyclide de Dupin, et il n'y a pas de raison de l'abandonner.

(2) Cette distinction se rattache à une autre relative aux génératrices de la sphère imaginaire principale et qui avait été antérieurement, entre M. Cartan et nous-même, l'objet d'un échange de vues. Au lieu que sur une sphère réelle, deux génératrices imaginaires conjuguées sont toujours de système différents, sur une sphère imaginaire pure, deux génératrices conjuguées sont du *même* système, de sorte qu'il doit être évidemment possible de rattacher à des constructions *réelles* la distinction entre les deux systèmes de génératrices : et c'est à quoi répond précisément, comme l'avait remarqué M. Cartan, la distinction indiquée dans le texte.

Beaucoup d'autres interprétations seraient encore possibles dans le même but, si l'on ne s'astreignait pas à leur donner une forme anallagmatique. C'est ainsi que n'importe quel paraboloïde hyperbolique équilatère de paramètre  $a$  ayant son sommet en O, coupe la sphère imaginaire de centre O et de rayon  $a\sqrt{-1}$  suivant quatre génératrices appartenant respectivement aux deux systèmes. Or, sur le paraboloïde, les deux systèmes se distinguent l'un de l'autre, dans le domaine réel, par le sens dans lequel tournent les génératrices de l'un d'eux autour d'une génératrice déterminée quelconque de l'autre.

*de même sphère principale et de même espèce se coupent sous un angle constant en tout point de l'espace.*

M. Cartan rattache ce théorème aux interprétations imaginaires que l'on peut donner des figures anallagmatiques réelles que nous considérons. Proposons-nous, conformément au programme que nous nous étions tracé précédemment, d'en donner une démonstration directe, et, tout d'abord, d'établir le suivant dont il découle immédiatement :

*Deux opérations paratactiques de même sphère principale et d'espèces différentes sont toujours permutable.*

On peut considérer ce dernier fait comme démontré par celui que nous avons établi dans notre précédent article (A, 34), relativement aux diverses positions que prend un cercle  $C$  lorsqu'on lui applique le groupe d'opérations paratactiques défini par une congruence dont un cercle  $C$  coupe  $C'$  en deux points opposés. Nous avons constaté en effet que ces positions successives font partie d'une seconde congruence paratactique, permutable avec la première et (ce qui revient d'ailleurs au même) ayant avec elle deux cercles conjugués communs.

Or, deux congruences paratactiques d'espèces différentes et de même sphère principale, peuvent toujours être considérées comme définies de cette façon : car une congruence paratactique est définie par sa sphère principale, son espèce et un de ses cercles. Dans ces conditions, la proposition devient évidente.

Au reste, on peut (et cette méthode pourrait, au fond, remplacer celle de notre n° 34 précédent) déterminer directement les deux cercles conjugués communs aux deux congruences. Par les deux points opposés  $a, \bar{a}$ , communs à  $C$  et à  $C'$ , nous pouvons en effet faire passer un cercle  $\Gamma$  et un seul qui soit perpendiculaire à tous deux. Ceci fait, une série de cercles paratactiques à  $C$  et, de même, une série de cercles paratactiques à  $C'$ , pourront s'obtenir par la construction du n° 18 (article précédent), laquelle fait intervenir un angle arbitraire  $\theta$ , celui dont tourne autour de  $\Gamma$  une sphère variable passant primitivement par  $C$  ou par  $C'$ . L'angle  $\theta$  est d'ailleurs déterminé lorsqu'on se donne l'un des points opposés  $m, \bar{m}$  où le cercle variable coupe  $\Gamma$  (il est lié au rapport

anharmonique  $\overline{aamm}$  par la relation mentionnée, au n° 5 de notre précédent article). Cela posé, si les deux congruences auxquelles appartiennent respectivement  $C$  et  $C'$  sont d'espèces différentes, la rotation de la sphère variable s'effectuera, pour un même déplacement des points  $m, \overline{m}$ , en sens contraires, et l'on pourra, par conséquent (de deux manières différentes), disposer de l'angle  $\theta$  de manière que la construction à laquelle nous venons de faire allusion donne le même cercle de part et d'autre.

A l'aide du résultat que nous venons d'obtenir, celui de M. Cartan s'obtient sans difficulté. Soient, dans l'espace où l'on considère deux congruences paratactiques  $(\mathcal{C})$ ,  $(\mathcal{C}')$  de même sphère principale et de même espèce, deux points quelconques  $a, b$ , non opposés entre eux, et par chacun desquels nous ferons passer des cercles qui appartiennent respectivement aux deux congruences. Par  $a$  et  $b$ , d'autre part, il passera un cercle orthogonal à la sphère principale et qui pourra servir à définir une congruence paratactique d'espèce opposée à la première. Puisque, dans ces conditions, il y a permutabilité, l'opération paratactique résultant de cette construction, et qui permet de passer du point  $a$  au point  $b$ , transforme la figure tracée en  $a$  en la figure correspondante relative à  $b$ .

C. Q. F. D.

Le résultat précédent fournit la solution d'une question que nous avons laissée ouverte (A, n° 39, note). A cet effet, on en déduira d'abord la remarque suivante :

Soient  $(\mathcal{C})$ ,  $(\mathcal{C}')$  deux congruences paratactiques de même sphère principale et de même espèce. Autour d'un cercle  $C$  quelconque de la première, faisons tourner la seconde d'un certain angle  $\theta$ , de manière à obtenir une troisième congruence analogue à la première. *La congruence  $(\mathcal{C}'')$  ainsi obtenue est indépendante du choix du cercle  $C$  dans la première congruence.*

Prenons, en effet, deux positions successives quelconques  $(C_1, C_2)$  de ce cercle dans la congruence à laquelle il appartient et, sur  $C_1$  et  $C_2$  respectivement, deux points  $a_1, a_2$  par lesquels nous ferons passer les cercles  $C'_1, C'_2$  qui appartiennent à  $(\mathcal{C}')$  et qui coupent les premiers, d'après ce qui vient d'être démontré, sous un même angle  $\alpha$ . Si maintenant nous faisons tourner de l'angle  $\theta$ ,  $C'_1$  autour de  $C_1$  et  $C'_2$  autour de  $C_2$ , nous obtenons deux cercles  $C''_1$



et  $C_2''$  tels que les trièdres ainsi formés en  $a_1$  et en  $a_2$ , par les tangentes aux différents cercles qui partent soit de l'un, soit de l'autre de ces points, soient égaux. Appliquant enfin à nouveau le résultat de M. Cartan aux deux congruences données et à celle (de même sphère principale et de même espèce) qui est définie par le cercle  $C_1''$ , on voit que cette dernière contient nécessairement  $C_2''$  : ce qui est le fait à démontrer.

On voit donc que le fait de *faire tourner d'un angle  $\theta$*  (en un sens donné) *une congruence paratactique autour d'une autre* (de même sphère principale et de même espèce) a un sens bien déterminé <sup>(1)</sup>.

Cela posé, soient pris deux points déterminés quelconques  $a$ ,  $b$  de l'espace et prenons les symétrique  $a'$ ,  $b'$ , de chacun d'eux par rapport aux différents cercles d'une congruence paratactique ( $\mathcal{C}$ ) donnée. Il s'agit de trouver l'opération qui transforme l'une dans l'autre les deux figures (sphériques) décrites l'une par  $a'$ , l'autre par  $b'$ .

Pour cela, nous n'avons qu'à observer qu'il existe une opération paratactique bien déterminée (en laissant de côté le cas où  $a$  et  $b$  sont opposés, dans lequel la réponse à la question posée est immédiate), de même sphère principale et de même espèce que ( $\mathcal{C}$ ), qui change  $a$  en  $b$ . L'opération demandée s'obtient en faisant tourner la précédente de  $\pi$  autour de ( $\mathcal{C}$ ).

Mais il semble que chaque propriété de la figure vraiment merveilleuse, découverte par E. von Weber et M. A. Bloch, ouvre la voie à d'autres résultats plus curieux encore. La solution que nous venons d'obtenir appelle une généralisation évidente. Elle s'étend d'elle-même au cas où les points  $a'$ ,  $b'$ , au lieu d'être les symétriques de  $a$ ,  $b$  par rapport à un cercle variable  $C$  de la congruence ( $\mathcal{C}$ ), se déduisent des premiers par une rotation d'un angle donné *quelconque*  $\theta$  autour du cercle  $C$ . Le point  $b'$ , dans

---

<sup>(1)</sup> Pour  $\theta = \pi$ , la démonstration peut se donner sous une autre forme. Prenons d'abord la symétrique ( $\mathcal{C}'_0$ ) de la congruence ( $\mathcal{C}$ ) par rapport à un premier cercle  $C_0$  de ( $\mathcal{C}$ ). La symétrique par rapport à un autre cercle analogue arbitraire  $C$  se déduira de la première par une double symétrie relative à  $C_0$  et à  $C$ , c'est-à-dire (A, n° 26) par une transformation paratactique, laquelle est d'espèce opposée à celle que définit ( $\mathcal{C}$ ) et, par conséquent, d'après ce que nous venons de voir, permutable avec elle.

ces nouvelles conditions, se déduit encore de  $a'$  par une opération sphérique que l'on peut assigner, transformée par la rotation dont il s'agit de celle qui change  $a$  en  $b$ .

On est conduit naturellement à se demander quels sont les lieux ainsi décrits par les points  $a'$ ,  $b'$ . *Ce sont encore des sphères.* La première démonstration donnée à cet égard pour le cas de  $\theta = \pi$  (A, n° 36) reste en effet valable pour le cas actuel.  $\alpha$  et  $\bar{\alpha}$  étant les transformés de  $a$  et de son opposé par l'opération d'angle  $\frac{\theta}{2}$ , le point  $a'$  sera l'inverse de  $a$  par rapport à une sphère variable passant par  $\alpha$  et  $\bar{\alpha}$  et décrira, par conséquent, la sphère qui passe par  $a$  et par rapport à laquelle  $\alpha$  et  $\bar{\alpha}$  sont inverses l'un de l'autre.

Il resterait à comparer entre elles les diverses figures ainsi obtenues lorsque  $\theta$  varie.

On remarquera que si, après avoir construit  $a'$  par rotation de  $a$  autour de C, on fait tourner à son tour ce point  $a'$  du même angle  $\theta$  autour du conjugué de C, on obtient un point  $a_1$  indépendant du choix de C dans la congruence, à savoir le transformé de  $a$  par l'opération d'angle  $\theta$ . Le lieu du point  $a'$  ne change donc pas si l'on remplace  $a$  par  $a_1$  en renversant en même temps le sens de l'angle de rotation. C'est une sphère qui peut, d'après cela, être définie comme passant par les points  $a$ ,  $a_1$  et orthogonale en ces points au cercle de la congruence qui les contient. Les points  $\alpha$ ,  $\bar{\alpha}$  peuvent être considérés comme les « milieux », en un sens généralisé, des deux arcs déterminés sur ce cercle par  $a$  et  $a_1$  (ils en seraient les milieux au sens ordinaire du mot, si le conjugué du cercle en question était une droite).

Il était évident *a priori* que l'opération qui change  $a'$  en  $b'$  dans l'un ou l'autre des cas que nous venons d'étudier, devait être paratactique. La sphère principale de la congruence donnée permet, en effet, de définir une géométrie riemannienne dans laquelle les diverses transformations sphériques intervenant dans nos raisonnements représentent les déplacements; et l'opération cherchée doit évidemment présenter cette propriété que la distance riemannienne d'un point à son transformé est constante. Or cette propriété appartient aux transformations paratactiques et à celles-là seulement (comme on le voit en prenant le point à transformer

successivement sur chacun des axes conjugués de la transformation (1).

Ceci, combiné encore avec le résultat de M. Cartan, permet d'établir le fait (évident lorsqu'on fait intervenir les génératrices de la sphère principale) que *les transformations paractatiques de même sphère principale et de même espèce forment un groupe.*

Appliquons, en effet, à un point quelconque  $a$  une première transformation paractatique qui le change en  $a'$ , puis à celui-ci une seconde transformation qui le change en  $a''$ . Les distances riemanniennes  $aa'$ ,  $a'a''$  sont constantes, et il en est de même de l'angle en  $a'$ , d'après la proposition de M. Cartan. Or le triangle  $aa'a''$  obéit aux lois de la géométrie riemannienne, qui sont celles de la géométrie sphérique.

Donc la distance riemannienne  $aa''$  est aussi constante et la transformation correspondante est nécessairement paractatique (et de même espèce que les premières, en vertu de la continuité).

Il pourrait d'ailleurs être intéressant d'étudier de plus près la composition des transformations paractatiques de même espèce; et ceci introduirait sans doute les propriétés des cercles conjugués telles que nous les avons considérées dans tout ce qui précède, propriétés qui méritent, elles aussi, de retenir l'attention quoiqu'elles soient connues à titre de résultats de géométrie non euclidienne.

$C$  étant un cercle quelconque orthogonal à la sphère principale  $\Sigma$ , son conjugué est, nous l'avons vu, déterminé entièrement par le fait qu'il est : 1° axial au premier; 2° orthogonal, lui aussi, à la sphère principale. Supposons maintenant qu'on ne donne pas le cercle  $C$ , mais qu'on en connaisse seulement le point  $a$  ou, ce qui revient au même, deux points opposés,  $a, \bar{a}$ . Le conjugué  $C'$  sera sur une sphère connue à savoir celle qui est orthogonale à  $\Sigma$  et par rapport à laquelle  $a$  et  $\bar{a}$  sont inverses l'un de l'autre.

(1) Si un seul de ces axes était réel, il aurait sur lui deux points invariants, de sorte que la propriété ne pourrait avoir lieu. Dans une transformation quelconque à axes réels mais à angles différents  $\varphi$  et  $\psi$ , la distance riemannienne  $\delta$  d'un point  $a$  à son transformé est donné par

$$\cos \delta = \cos^2 \tau \cos \varphi + \sin^2 \tau \cos \psi,$$

en désignant par  $\tau$  l'angle qui a pour tangente le rapport  $k$  des puissances réduite (A, 32) du point  $a$  aux deux axes.

La dualité ainsi obtenue, correspondant à la transformation par polaires réciproques, possède une propriété remarquable que ne possède pas cette dernière à savoir que deux droites riemanniennes  $C_1, C_2$  (c'est-à-dire deux cercles orthogonaux à  $\Sigma$ ) cosphériques entre elles, se coupent sous le même angle que leurs transformées. A trois cercles passant par un même point (et par son opposé) et y formant un trièdre, correspondent trois cercles formant, sur une même sphère, un triangle sphérique, dont les éléments sont ceux du trièdre supplémentaire du premier.

---

---

### SUR UN THÉORÈME DE STEINER ;

PAR J. MARCHAND,

Docteur ès sciences, professeur au Gymnase cantonal (Lausanne).

---

1. Dans le tome XVIII des *Annales de Gergonne* Steiner a énoncé, sans en donner les démonstrations, les plus intéressants des théorèmes connus de la géométrie du quadrilatère complet.

Certains d'entre eux méritent certainement encore d'attirer notre attention. Ils ont été démontrés par Mention <sup>(1)</sup> et par M. Oppermann <sup>(2)</sup>, mais ces auteurs, ne mettant en œuvre que des propositions de géométrie élémentaire, analysent des figures si compliquées que leurs démonstrations n'éclairent guère. En outre, s'il serait vain de vouloir retrouver la pensée de l'illustre géomètre que fut Steiner, il peut être intéressant d'arriver à ses énoncés par un chemin qu'il eût pu suivre naturellement, et par des méthodes qui *lui étaient habituelles*.

C'est ainsi que, déjà, quelques-unes des propositions de Steiner ont été démontrées par de fort élégantes considérations de géométrie projective. Mais les dernières d'entre elles n'avaient pu être traitées de la même façon, bien qu'on ne doutât pas que cela fût possible.

---

(1) *Nouvelles Annales*, 2<sup>e</sup> série, t. I, 1862.

(2) *Premiers éléments d'une théorie du quadrilatère complet*.

Je m'en vais donc exposer une solution de ce genre et voici les théorèmes dont il s'agit :

*« Dans chacun des quatre triangles formés par les côtés d'un quadrilatère complet, il y a un cercle inscrit et trois cercles exinscrits; ce qui fait en tout seize cercles, dont les centres sont quatre par quatre sur une circonférence de manière à donner naissance à huit nouveaux cercles. Ces huit cercles se partagent en deux groupes de quatre, tels que chacun des cercles de l'un des groupes coupe orthogonalement tous les cercles de l'autre. On en conclut que les centres des cercles des deux groupes sont sur deux droites perpendiculaires l'une à l'autre.*

*» Enfin, ces deux dernières droites se coupent au point de rencontre des cercles circonscrits aux quatre triangles. »*

2. Soient  $A, B, C, A', B', C'$  les sommets d'un quadrilatère complet et  $AA', BB'$  et  $CC'$  ses diagonales.

Les confocales des coniques inscrites dans ce quadrilatère forment un réseau tangenciel dont les coniques dégénérées en une paire de points sont constituées par les paires de foyers associés des coniques inscrites. On peut facilement donner quelques-unes de ces coniques dégénérées; par exemple deux sommets opposés du quadrilatère en forment une, de même que la paire  $IJ$  des points cycliques ou encore que le foyer  $O$  et le point à l'infini  $O'$  de la parabole inscrite.

Les hyperboles équilatères harmoniquement circonscrites aux coniques inscrites sont soumises à trois conditions linéaires indépendantes, et forment par conséquent un réseau ponctuel. Les coniques de ce réseau, dégénérées en deux droites, sont encore des hyperboles équilatères, donc des paires de droites rectangulaires; ce sont les paires de droites conjuguées aux coniques inscrites et à la paire des points cycliques. Telles sont, par exemple, la paire des bissectrices issues de chacun des sommets du quadrilatère, la droite de l'infini et le lieu  $O'n$  des centres des coniques inscrites, enfin une paire de droites issues de chacun des points cycliques et conjuguées aux coniques inscrites.

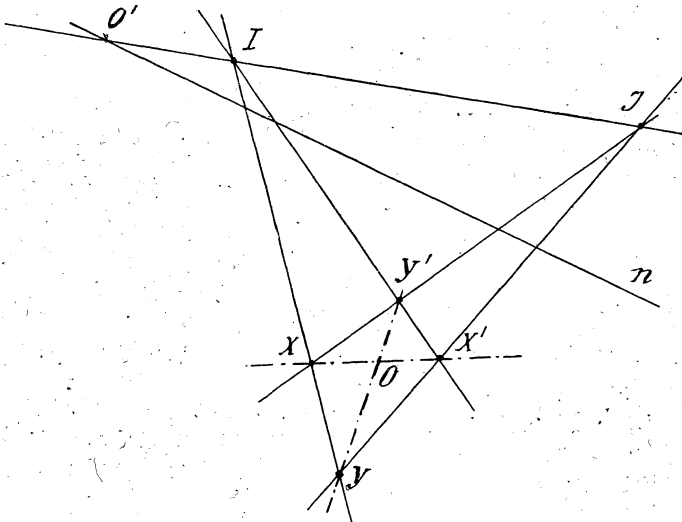
D'autre part, il résulte d'un théorème dû à Hermite qu'une cubique est complètement déterminée par le réseau de ses coniques

polaires. Il existe donc une cubique  $S$  dont le réseau d'hyperboles équilatères précédent est le réseau des coniques polaires. C'est d'ailleurs une stelloïde cubique et nous la nommerons *stelloïde conjuguée du quadrilatère*. Sa hessienne  $H$  est le lieu des foyers des coniques inscrites et sa cayleyenne  $\Gamma$  est l'enveloppe des axes des coniques inscrites, ou, ce qui revient au même, l'enveloppe des paires de droites rectangulaires conjuguées aux coniques inscrites <sup>(1)</sup>.

3. Mais on sait qu'une courbe donnée de troisième classe est la cayleyenne de trois cubiques.  $\Gamma$ , qui est donc la cayleyenne de la stelloïde  $S$ , est encore celle de deux autres cubiques  $C_1$  et  $C_2$ . Essayons de déterminer les réseaux des coniques polaires de  $C_1$  et de  $C_2$ .

De chacun des points cycliques  $I$  et  $J$ , on peut mener à  $\Gamma$  deux

Fig. 1.



tangentes différentes de la droite de l'infini. Ce sont deux paires de côtés opposés d'un quadrangle complet  $XX'YY'$  (fig. 1). Et parce

<sup>(1)</sup> La stelloïde conjuguée et les deux réseaux de coniques dont nous venons de parler conduisent à de nombreuses propriétés métriques du quadrilatère, en particulier à celles qui ressortent de la considération de ses bissectrices.

que I et J sont deux points conjugués de la hessienne H, les points de contact de ces quatre tangentes sont sur une nouvelle tangente de la cayleyenne; celle, précisément, qui est la conjuguée de la tangente I J, donc la droite  $O'n$ . Pour la même raison, les côtés opposés  $XX'$  et  $YY'$  du quadrangle  $XX'YY'$ , qui sont aussi deux tangentes de  $\Gamma$ , se coupent au point O, conjugué du troisième point à l'infini  $O'$  de la hessienne H. O est donc le foyer de la parabole inscrite dans le quadrilatère donné ABC A' B' C'.

En associant maintenant à l'une des tangentes IX, IX', JX, JX' successivement chacune des trois autres, nous formerons successivement une conique polaire de la stelloïde S, puis une conique polaire de la cubique  $C_1$  et enfin une conique polaire de  $C_2$ . Ce sont les deux tangentes XI et X'I qui constituent une conique polaire de la stelloïde. Imaginons que XI et X'J forment une conique polaire de la cubique  $C_1$ . Aux trois tangentes XI, XJ et  $XX'$  de la cayleyenne  $\Gamma$  de  $C_1$ , seront conjuguées trois autres tangentes formant un triangle dont les sommets sont sur les droites XI, XJ et  $XX'$ . Ce sont respectivement X'J, XI et IJ. Et les trois paires de droites ainsi obtenues sont les paires de côtés opposés d'un quadrangle complet  $YY'IJ$ . Toutes les coniques circonscrites à ce quadrangle sont des coniques polaires de  $C_4$ .

Dans le réseau des coniques polaires de  $C_1$ , il y a donc un faisceau de cercles dont Y et Y' sont les points fondamentaux.

On verrait de la même façon que le réseau des coniques polaires de  $C_2$  contient aussi un faisceau de cercles dont les points fondamentaux sont les associés X et X' des points Y et Y' <sup>(1)</sup>.

Ces deux faisceaux de cercles sont donc deux faisceaux orthogonaux; les lieux de leurs centres sont les droites rectangulaires  $XX'$  et  $YY'$ . Nous allons voir que ces faisceaux sont précisément ceux des cercles de Steiner.

4. Comme nous l'avons fait pour les tangentes à  $\Gamma$ , issues de I et de J, remarquons que les bissectrices des angles en deux sommets opposés du quadrilatère, A et A' par exemple (*fig. 2*), touchent la cayleyenne  $\Gamma$  en des points situés sur une nouvelle tangente de  $\Gamma$ .

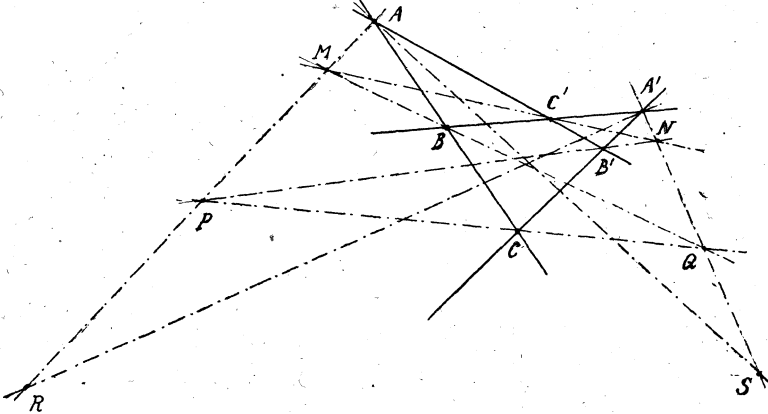
---

<sup>(1)</sup> Points associés au sens de Darboux (*Principes de géométrie analytiques*, p. 149).

En associant les deux bissectrices issues d'un même sommet, on forme une conique polaire de la stelloïde  $S$ .

En associant deux bissectrices issues de deux sommets

Fig. 2.



opposés,  $A$  et  $A'$ , on forme ou une conique polaire de  $C_1$  ou une conique polaire de  $C_2$ . Imaginons donc que les bissectrices  $AP$  et  $A'Q$  forment une conique polaire de la cubique  $C_1$ . Il sera aisé de voir, par une démonstration analogue à celle du n° 3, que toutes les coniques circonscrites au quadrangle  $MNPQ$  sont aussi des coniques polaires de  $C_1$ . Et comme deux faisceaux de coniques polaires d'une même cubique ont toujours une conique commune, les sommets  $M, N, P$  et  $Q$  sont sur un cercle de l'un des faisceaux du n° 3.

On pourrait maintenant faire voir facilement les huit cercles de Steiner. Il suffirait de dessiner une figure complète. Remarquons seulement que si, en associant les bissectrices  $AP$  et  $A'Q$ , on obtient un cercle de l'un des faisceaux, on déterminera un cercle de l'autre faisceau, en associant les bissectrices  $AP$  et  $A'R$ .

Ensuite on sera conduit à deux autres cercles en associant les bissectrices  $AS$  et  $A'Q$ , puis  $AS$  et  $A'R$ .

Enfin, il serait facile de trouver encore de nombreux cercles appartenant aux faisceaux de Steiner et différents de ceux qu'il a cités; tel, par exemple, celui qui passe par les points  $A, A', R$  et  $S$ , d'autres, analogues à celui-là, ou d'autres encore que l'on cons-



truirait aisément en figurant tout d'abord les côtés et les hauteurs du triangle diagonal du quadrilatère complet (une diagonale et la hauteur correspondante du triangle diagonal forment une conique polaire de la stelloïde conjuguée).

Ainsi se trouvent donc démontrés et complétés les énoncés de Steiner. La méthode employée est fort simple. Il suffit de détourner son attention de la stelloïde conjuguée du quadrilatère — qui se présente d'elle-même à l'esprit, et qui joue un rôle important dans la démonstration d'autres propriétés métriques du quadrilatère — et de la reporter sur les deux autres cubiques qui ont la même cayleyenne que cette stelloïde.

---

---

### CORRESPONDANCE.

---

M. N. Abramesco nous signale qu'il avait déjà obtenu, et publié en mars 1926, dans *Gazeta Matematica* (Bucarest, Roumanie) quelques-uns des résultats donnés par M. Lemaire, dans son intéressant article *Sur l'égalité et la Similitude des figures dans l'espace* (*Nouvelles Annales*, octobre 1926).

*Extraits d'une lettre de M. Maurice d'Ocagne.* — L'intéressante généralisation du théorème de Cornu, donnée par M. Bickart dans le numéro de juin 1927 des *Nouvelles Annales*, appelle, de ma part, les observations suivantes :

La construction indiquée par le cas particulier où le centre de courbure C (*fig. 2*) est à l'infini peut être avantageusement remplacée par celle qui résulte de la simple remarque que, dans ce cas,

$$\frac{di}{dr} = \frac{\Lambda q}{Ap}.$$

Il n'est pas indifférent non plus de rappeler que les constructions, *b* et *c* données, à titre d'application, par l'auteur pour le centre de courbure des podaires et celui des coniques, figurent déjà dans mon *Cours de géométrie de l'École Polytechnique* (t. I, p. 143 et 132). La seconde avait d'ailleurs été donnée dès 1708 par Keill (*Phil. Trans.*, t. XXVI, p. 177).

---

**TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.**

(TOME II, 6<sup>e</sup> SÉRIE, 1927.)

La classification adoptée est celle de la 3<sup>e</sup> édition  
de l'*Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques.*

**Analyse mathématique.**

	ages.
[A 3] Racines multiples des systèmes de $m$ équations à $m$ inconnues, par M. A. Bloch.....	104
[B 1 a] Quelques remarques sur les déterminants et matrices, par M. Iliovici.....	129
[D̄ 3 a] Conditions assurant l'holomorphie d'une fonction, par M. A. Roussel.....	203
[D̄ 3] Le problème de la cubique lacunaire, par M. A. Bloch.....	161
[E 1 d] Sur des expressions de C et de C <sup>2</sup> par des séries, par M. P. Appell.	193
[H 8] Méthode d'intégration d'une équation aux dérivées partielles du 2 <sup>e</sup> ordre, par M. P. Sicard.....	235
[H 8 e] Équations aux dérivées partielles et intégrales singulières des équations différentielles, par l'abbé Potron.....	78
[I 24] Séries à termes positifs dont la somme est rationnelle, par M. P. Appell.....	231
[I 25 b] Sur certains cycles arithmétiques, par M. E. Cartan.....	33

**Géométrie.**

[K <sup>1</sup> 7 d] Sur un théorème de Steiner, par M. J. Marchand.....	320
[L <sup>1</sup> 11] Sur quelques propriétés de l'hyperbole équilatère et leurs con- séquences, par M. J. Lemaire.....	65
[L <sup>1</sup> 15 e] Sur une généralisation des caustiques par réfraction, par M. L. Bickart.....	175
[M <sup>2</sup> 4 i δ] Sections sphériques d'un tore, par M. Iliovici.....	1
[M <sup>2</sup> 4 i δ] Sur l'intersection d'un tore et d'une quadrique, par M. H. Le- besgue.....	225
[N <sup>1</sup> 1 b] Droites conjuguées communes à deux complexes linéaires, par M. D. Wolkowitsch.....	197
[O <sup>1</sup> 2] Courbes continues qui admettent une tangente en chaque point, par M. G. Valiron.....	46
[O <sup>1</sup> 2 g] Surfaces se déformant de manière que les lignes de niveau restent lignes de niveau, par M. B. Gambier.....	137
[O <sup>1</sup> 2 p] Roulettes planes et intégration d'équations différentielles, par M. R. Deltheil.....	158
[P <sup>1</sup> 3 b] Récents progrès de la géométrie anallagmatique, par M. J. Hadamard.....	257, 289
[P <sup>1</sup> 3 b] Sur la géométrie anallagmatique, par M. J. Hadamard.....	314
[P <sup>1</sup> 3 b] Sur une forme vectorielle de la puissance d'un point, par M. H. Mitault.....	109

	Pages.
[P'6f] Couples de contours fermés de même longueur et aire, par M. P. Vincensini.....	199

**Mathématiques appliquées.**

[R1] Mouvement plan à 2 paramètres doublement décomposable, par M. R. Bricard.....	105
[R1j] Accélération, équations de Lagrange, tenseurs en notation vecto- rielle, par M. A. Veronnet.....	9
[R7ga] Théorèmes de Puiseux et Halphen sur le pendule sphérique, par L. Gérard.....	147

**Problèmes d'examens et de concours.**

Certificats de mathématiques générales.....	29, 57, 126, 155, 187, 219, 256
Certificats de calcul différentiel et intégral.....	26, 62, 91, 125, 159, 208, 288
Certificats de mécanique rationnelle.....	64, 92, 121, 188, 212
Certificats de géométrie supérieure.....	158, 182
Certificats de mécanique appliquée.....	184
Agrégation 1926. Solution de la question d'Analyse par M. B. Gambier.....	2
Solution de la question de Mécanique par MM. Cabantous et Cohen Bacrie.....	82
Agrégation 1927. Solution de la question de Géométrie par M. B. Gambier...	243
Solution de la question de Spéciales par M. B. Gambier..	272

**Solutions de questions de licence.**

C. 40 : 24; C. 62 : 25; C. 65 : 52; C. 75 : 53; C. 78 : 56; C. 81 : 114;
C. 46 : 117; C. 48 : 118; C. 83 : 119; C. 70 : 149; C. 76 : 151; C. 80 : 152;
C. 88 : 154; C. 90 : 253; C. 91 : 255.

**Correspondance.**

M. N. ABRAMESCO.....	325	M. M. D'OCAGNE.....	325
----------------------	-----	---------------------	-----

**Bibliographie.**

J. HADAMARD : Cours d'Analyse à l'École Polytechnique; analyse par M. R. Bricard.....	179
Abbé POTRON : Exercices de calcul différentiel et intégral, t. I; analyse par M. R. Bricard.....	180

**Questions proposées.**

2495.....	57	2499.....	148
2496.....	91	2500.....	180
2497.....	110	2501-8.....	181
2498.....	111	2509.....	208

**Solutions de questions proposées.**

2392, par M. R. Bouvaist.....	111	2446, par M. G. Roy.....	114
2397, par M. H. Mc Weeney.....	112	2497, par M. E. Bally.....	252
2424, par M. J. Denaux.....	112	2505, par M. R. Marchay.....	270
2454, par M. E. Bally.....	113		

---

---

TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS.

(TOME II, 6<sup>e</sup> SÉRIE, 1927.)

---

- |                               |                               |
|-------------------------------|-------------------------------|
| N. ABRAMESCO, 91.             | J. LAUREAU, 119.              |
| P. APPELL, 193, 231.          | H. LEBESGUE, 225.             |
| E. BALLY, 113, 252.           | J. LEMAIRE, 65.               |
| L. BICKART, 175.              | J. MARCHAND, 320.             |
| A. BLOCH, 104, 161.           | R. MARCHAY, 270.              |
| R. BOUVAIST, 111.             | A. MONJALLON, 24, 117.        |
| G. BOULIGAND, 149.            | H. MITAULT, 109.              |
| R. BRICARD, 105, 179, 180.    | M. D'OCAGNE, 57, 327.         |
| J. CABANTOUS, 82.             | R. ODILE, 152.                |
| E. CARTAN, 33.                | B. PARIS, 114, 118.           |
| COHEN BACRIE, 82.             | A. POTRON, 78.                |
| R. DELTHEIL, 168.             | A. ROUSSEL, 203.              |
| J. DENAUX, 112.               | G. ROY, 111, 114.             |
| J. DEVISME, 25, 52, 154, 272. | P. SICARD, 208, 235.          |
| B. GAMBIEP, 2, 137, 243, 255. | G. VALIRON, 46.               |
| LOUIS GÉRARD, 147.            | A. VÉRONNET, 97.              |
| J. HADAMARD, 257, 289, 314.   | P. VINCENTINI, 199.           |
| ILIOVICI, 1, 129.             | H. MC WEENEY, 112.            |
| A. LABROUSSE, 180, 181.       | R. WEINZAEFFEL, 53, 149, 151. |
| E. LAINÉ, 56.                 | D. WOLKOWITSCH, 197.          |
- 
- 

AVIS.

Les difficultés de l'heure présente et le coût considérable de l'impression nous obligent de supprimer — provisoirement, il faut l'espérer — la publication des *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

Avant de mettre le point final au dernier numéro nous avons le devoir d'exprimer ici notre gratitude à tous les amis des *Nouvelles Annales*, à nos fidèles collaborateurs et abonnés.

LA RÉDACTION.