Nouvelles annales de mathématiques

A. Stoyanoff

Sur un théorème de M. Marcel Riesz

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 97-99

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__97_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SUR UN THÉORÈME DE M. MARCEL RIESZ ;

PAR A. STOYANOFF.

Le théorème dont nous donnons une démonstration ci-dessous est dû à M. Marcel Riesz. Il se propose de le publier plus tard avec d'autres théorèmes analogues. Comme la démonstration que M. Riesz a bien voulu nous communiquer diffère complètement par la marche suivie de la nôtre, nous croyons intéressant de la publier ici.

THÉORÈME. — *Étant donnée une équation algébrique* $f(x)=0$, *dont les racines* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqq 3)$ *sont supposées réelles et distinctes; désignant par d la plus petite des différences*

$$d_i = x_{i+1} - x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1);$$

par $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ *les racines de l'équation* $f'(x)=0$ (*lesquelles sont également, d'après le théorème de Rolle, toutes réelles et distinctes*) *et par* Δ *la plus petite des différences*

$$\Delta_k = \xi_{k+1} - \xi_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-2),$$

on a

$$\boxed{\Delta > d}. \tag{1}$$

[Nous supposons, pour fixer les idées,

$$x_1 < \xi_1 < x_2 < \ldots < x_k < \xi_k < x_{k+1} < \xi_{k+1} < x_{k+2} < \ldots < \xi_{n-1} < x_n.]$$

Pour démontrer que $\Delta > d$, il suffit de démontrer que *tous* les Δ_k sont $> d$, c'est-à-dire que

$$\xi_{k+1} - \xi_k > d \qquad \text{ou bien} \qquad \xi_k + d < \xi_{k+1}. \tag{1'}$$

Deux cas seulement sont à considérer : *a*. $\xi_k + d \leqq x_{k+1}$ et *b*. $\xi_k + d > x_{k+1}$.

Dans le premier cas l'inégalité (1') est évidemment satisfaite, puisque $x_{k+1} < \xi_{k+1}$.

Dans le deuxième cas, $\xi_k + d$ et ξ_{k+1} sont tous deux compris entre x_{k+1} et x_{k+2}. Comme dans cet intervalle la fonction

$$F(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i}$$

décroît constamment depuis $+\infty$ jusqu'à $-\infty$ (en s'annulant pour $x = \xi_{k+1}$), il s'ensuit que pour démontrer que $\xi_k + d < \xi_{k+1}$, il suffit de montrer que

$$(2) \qquad F(\xi_k + d) > \mathfrak{F}(\xi_{k+1}) = 0.$$

Démonstration. — On a

$$F(\xi_k + d) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\xi_k + d - x_i}.$$

Nous avons aussi

$$0 = F(\xi_k) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\xi_k - x_i}.$$

Par conséquent, on peut écrire

$$\begin{aligned} F(\xi_k + d) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\xi_k + d - x_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\xi_k - x_i} = \frac{1}{\xi_k + d - x_1} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\xi_k + d - x_{i+1}} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\xi_k - x_i} - \frac{1}{\xi_k - x_n} \\ &= \frac{1}{\xi_k + d - x_1} + \frac{1}{x_n - \xi_k} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_{i+1} - x_i - d}{(\xi_k - x_i)(\xi_k + d - x_{i+1})} \end{aligned}$$

qui est > 0,

puisque les deux premiers termes sont *toujours* positifs et que dans les $n - 1$ autres termes les numérateurs $x_{i+1} - x_i - d = d_i - d$ sont $\geqq 0$ par hypothèse, et les dénominateurs sont positifs (parce que les deux facteurs $\xi_k - x_i$ et $\xi_k + d - x_{i+1}$ ont les mêmes signes quel que soit i).

Comme l'inégalité (2) est démontrée, il en suit la vérité de (1') et, par conséquent, de (1).

Démonstration de M. M. Riesz. — *Nous sommes heureux de pouvoir insérer ici cette démonstration, extraite d'une lettre de M. M. Riesz à M. Stoyanoff :*

Stockholm, le 8 mai 1924.

« Pour que $f(x)$ et $g(x)$ aient toutes leurs racines réelles et se séparant, il faut et il suffit que $kf(x)+lg(x)$ ait toutes ses racines réelles pour toutes les valeurs réelles des constantes k et l. Ce théorème important est bien connu. On en trouve une démonstration (due à M. Kakeya) dans un travail de M. Fujiwara (*Tôhoku Math. Journ.*, 9, 1916, p. 102). Voici une démonstration bien plus simple.

» Il faut seulement démontrer que la condition est suffisante. La condition étant remplie, $f(x)$ et $g(x)$ auront évidemment toutes leurs racines réelles; il faut encore démontrer que ces racines se séparent. Or, il est clair que $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ ne pourra être réel ni dans le demi-plan supérieur ni dans le demi-plan inférieur. En effet, si $h(x)$ était réel et $=k$ pour une valeur x non réelle, la fonction $f(x)-kg(x)$ aurait une racine (non réelle) en x. Cela étant, la partie imaginaire de $h(x)$ devra être de signe constant dans les deux demi-plans. En s'approchant alors des pôles de $h(x)$, on voit que tous les résidus de $h(x)$ devront être de même signe. En désignant alors par a et b deux racines consécutives de $g(x)$, $h(a+t)$ et $h(b-t)$ seront pour des valeurs assez petites de t de signes opposés. C'est-à-dire que $f(x)$ change de signe entre deux racines consécutives de $g(x)$.

» Du théorème ci-dessus, on conclut immédiatement : Si $f(x)$ et $g(x)$ ont toutes leurs racines réelles et se séparant, il en sera de même de $f'(x)$ et $g'(x)$.

» En effet, $kf(x)+lg(x)$ ayant toutes ses racines réelles, il en sera de même de $kf'(x)+lg'(x)$.

» En désignant maintenant par d la plus petite différence entre deux racines consécutives de $f(x)$ pour que les racines de $f(x+h)$ et $f(x)$ se séparent, il faut et il suffit évidemment que le module de h soit inférieur à d. En combinant ceci avec le résultat précédent, le théorème en résulte.

» On démontre de la même façon le théorème pour $f(x)+kf'(x)$. En réalité, encore ce théorème est un cas très particulier d'un théorème très général dont l'exposition me prendrait trop de temps. Ce théorème rentre dans un corps de théorèmes que je publierai en collaboration avec M. Stridsberg. »