Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 87-92

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__87_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2466.

(1924, p. 314.)

Soit, sur la sphère de rayon 1, *la courbe de Viviani qui a pour équation*

$$\omega = \theta,$$

ω *et* θ *étant respectivement la longitude et la latitude d'un point* M *de cette courbe. Prouver que la sous-normale sphérique au point* M *(c'est-à-dire un arc d'équateur limité au méridien de* M *et au grand cercle normal en* M *à la courbe) est égale à* ω.

G. Dard.

Solution.

Par l'Auteur.

Menons le grand cercle normal Mi et le grand cercle tangent Mt à la courbe au point M (i et t sur l'équateur). Le triangle sphérique rectangle Mie dont le côté ie définit la sous-normale sphérique, donne

$$\operatorname{tang} ie = \sin Me . \operatorname{tang} \widehat{iMe},$$

$$\operatorname{tang}(\text{sous-normale}) = \sin\theta . \operatorname{tang}\varphi.$$

Or on a, φ étant l'angle de la courbe avec le parallèle de M,

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{d\theta}{r\,d\omega} = \frac{d\theta}{\cos\theta\,d\omega}$$

(r, rayon du parallèle).

Appliquée à la courbe

$$\theta = \omega,$$

elle donne

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{1}{\cos\theta}.$$

Donc

$$\operatorname{tang}(\text{sous-normale}) = \operatorname{tang}\theta = \operatorname{tang}\omega,$$
$$\text{sous-normale} = \omega.$$

Remarque. — La courbe de Viviani possède, en outre, la propriété d'être également inclinée sur les parallèles et sur la ligne des pôles. Autrement dit, on a constamment

$$\varphi = \gamma,$$

γ étant l'angle de la tangente à la courbe avec la ligne des pôles prise pour axe Oz.

On part de

$$\cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Or

$$z = \sin\theta, \qquad ds = \sqrt{d\theta^2 + d\omega^2\cos^2\theta}.$$

En tenant compte de l'expression de $\operatorname{tang}\varphi$, on obtient

$$\cos\gamma = \cos\theta\sin\varphi.$$

Appliquée à la courbe de Viviani, elle donne

$$\cos\gamma = \frac{1}{\operatorname{tang}\varphi}\sin\varphi = \cos\varphi,$$
$$\gamma = \varphi.$$

Solution géométrique.

Par M. Émile Bally.

Autrement dit :

Le plan normal en un point de la courbe est le symétrique, relatif au méridien de ce point, du plan du grand cercle qui passe en ce point et au point-origine (point double) *de la courbe.*

Si A est le point-origine sur le cercle équatorial de centre O, il résulte de la définition que les projections orthogonales du point-origine et d'un point arbitraire M de la courbe sur la trace équatoriale du méridien de ce point se confondent en un même point M'.

Le lieu des projections orthogonales de M sur le plan équatorial est donc le cercle (A) de ce plan décrit sur OA comme diamètre, et la courbe est l'intersection de la sphère avec le cylindre qui a pour section droite ce cercle (A).

Le plan normal en M à la courbe passe au centre O de la sphère, et sa trace équatoriale, normale à la projection orthogonale de la tangente en M, est la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente en M′ au cercle (A) (parallèle à la médiane principale du triangle rectangle OM′A), c'est-à-dire *la symétrique du rayon* OA *relative au rayon* OM′, trace équatoriale du méridien de M.

Autres solutions de MM. de Caumont, G. Roy, R. Sagazan.

2490.

(1919, p. 279.)

On donne à un segment AB *de longueur constante toutes les positions, dans un plan fixe, telles que les points* A, B, *et deux points fixes* A_0 *et* B_0 *du plan soient sur un cercle. Démontrer que l'on peut trouver, d'une infinité de manières, un couple de points* M, N, *invariablement liés au segment* AB *et un couple de points fixes* M_0, N_0, *tels que les points* M, N, M_0, N_0 *soient sur un cercle pour toutes les positions du segment* AB *satisfaisant à la condition indiquée.*

Les points M, N *sont répartis sur deux droites rectangulaires et de même les points* M_0, N_0. R.-B.

Solution.

Par l'Auteur.

Soient I, I_0 les milieux respectifs de AB et A_0B_0, P le point de rencontre de AB et A_0B_0. On a

$$PA.PB = PA_0.PB_0,$$

ce qui peut s'écrire

$$\overline{PI}^2 - \overline{IA}^2 = \overline{PI}_0^2 - \overline{I_0A}_0^2,$$

ou

$$\overline{PI}^2 - \overline{PI}_0^2 = \overline{IA}^2\ \overline{I_0A}_0^2$$

M, N étant deux points quelconques marqués sur AB et tels que I soit le milieu du segment MN, on peut leur faire correspondre deux points fixes M_0 et N_0, appartenant à A_0B_0 et tels que I_0 soit le milieu de M_0N_0, par la relation

$$\overline{IM}^2 - \overline{IM}_0^2 = \overline{IA}^2 - \overline{IA}_0^2.$$

On aura donc constamment

$$\overline{PI}^2 - \overline{PI}_0^2 = \overline{IM}^2 - \overline{IM}_0^2,$$

ce qui se ramène à

$$PM.PN = PM_0.PN_0.$$

Les quatre points M, N, M_0, N_0 ne cesseront donc pas d'être sur un cercle.

Soit ensuite ω le point de rencontre des médiatrices de AB et A_0B_0.

On a évidemment

$$\overline{\omega I}^2 - \overline{\omega I_0}^2 = \overline{PI_0}^2 - \overline{PI}^2 = \overline{I_0 A_0}^2 - \overline{IA}^2.$$

En répétant le raisonnement qui précède, on voit que si l'on marque sur ωI deux points M', N', tels que I soit le milieu de $M'N'$, on peut leur faire correspondre sur ωI_0 deux points *fixes* M'_0 et N'_0 tels que l'on ait

$$\omega M'.\omega N' = \omega M'_0.\omega N'_0.$$

Les quatre points M', N', M'_0. N'_0 sont donc encore sur un cercle.

Les droites rectangulaires dont il est question dans l'énoncé sont ainsi AB et sa médiatrice, A_0B_0 et sa médiatrice.

On laisse au lecteur le soin de reconnaître qu'il n'existe pas d'autres moyens de déterminer des couples satisfaisants M, N et M_0, N_0.

2418.

(1919, p. 240.)

On sait que le lieu des pôles d'une droite l, par rapport aux coniques d'un faisceau tangentiel, est une droite l'. Démontrer que les couples de droites l, l', qui sont perpendiculaires entre elles, enveloppent une courbe de la troisième classe.

En particulier, dans le cas des paraboles inscrites à un triangle, cette enveloppe est une hypocycloïde à trois rebroussements.

M.-F. EGAN.

SOLUTION.

Par M. H. DUMAS.

Les droites l, l' sont conjuguées par rapport à toutes les coniques du faisceau tangentiel; si elles sont perpendiculaires, elles sont conjuguées par rapport à la conique formée par les points cycliques I et J.

Si le faisceau donné n'est pas formé de coniques homofocales, ce faisceau détermine avec les points I et J un réseau tangentiel R. Les droites l et l' sont conjuguées par rapport à toutes les coniques de ce rèseau; elles enveloppent donc sa cayleyenne (ou jacobienne tangentielle) qui est une courbe de troisième classe.

Si le faisceau est formé de paraboles, la droite de l'infini tangente à toutes ces paraboles et tangente double de la conique (IJ) est tangente à toutes les coniques du réseau; elle est donc tangente double de la cayleyenne et l'on sait que les deux points de contact sont les points formant la conique admettant cette droite pour bitangente, c'est-à-dire ici les points cycliques.

L'enveloppe est une courbe de troisième classe bitangente à la droite de l'infini aux deux points cycliques : c'est une hypocycloïde à trois rebroussements.

Autres solutions par l'Auteur et MM. FAUCHEUX, HARMEGNIES et G. ROY.

2483.

(1925-1926, p. 23.)

On pose

$$I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \qquad I_2 = \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Démontrer que

$$I_0 I_2 = \frac{\pi}{4}.$$

A. LABROUSSE.

2485.

(1925-1926, p. 24.)

On pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^{2k}}},$$

n et k étant des entiers. Mettre $I_0, I_1, \ldots, I_{2k-1}$ *sous forme de limites de produits et démontrer les relations*

$$I_0 I_k = 2 I_1 I_{k+1} = 3 I_2 I_{k+2} = \ldots = (k-1) I_{k-2} I_{2k-2} = \frac{\pi}{2k} \; (^1).$$

A. LABROUSSE.

SOLUTIONS

Par M. E. LAINÉ.

On peut supposer que k et n sont des nombres positifs quelconques $(2k > 0,\ n \geqq 0)$.

Posons

$$x = t^{\frac{1}{2k}};$$

on aura

$$I_n = \frac{1}{2k}\int_0^1 t^{\frac{n+1}{2k}-1}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2k}\,\frac{\Gamma\frac{n+1}{2k}\,\Gamma\frac{1}{2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2k}+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2k}\,\frac{\Gamma\frac{n+1}{2k}}{\Gamma\frac{n+1+k}{2k}}.$$

De même

$$I_{n+k} = \frac{\sqrt{\pi}}{2k}\,\frac{\Gamma\frac{n+1+k}{2k}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2k}+1\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{n+1}\,\frac{\Gamma\frac{n+k+1}{2k}}{\Gamma\frac{n+1}{2k}}.$$

On en tire

$$I_n I_{n+k} = \frac{\pi}{2k(n+1)}.$$

(1) Il faut rectifier ainsi l'énoncé publié précédemment.

Pour $k = 2$, $n = 0$, on a bien

$$I_0 I_2 = \frac{\pi}{4}.$$

On voit aussi qu'il suffirait de supposer $n > -1$.

Remarque. — Les intégrales eulériennes se prêtent de la façon la plus naturelle à l'établissement de relations du genre indiqué dans les questions précédentes. Signalons, comme exemple, l'identité

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^n}} = \cos\frac{\pi}{n} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1 + x^n}},$$

où n désigne une constante quelconque supérieure à 2.

Autre solution par J. DE CAUMONT.