

## Certificat de mécanique rationnelle

*Nouvelles annales de mathématiques 6<sup>e</sup> série*, tome 1  
(1925), p. 51-53

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1925\\_6\\_1\\_\\_51\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__51_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CERTIFICAT DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Un solide de révolution homogène est suspendu par son centre de gravité et un point P, marqué sur son axe Gz, est repoussé proportionnellement à la distance par le plan fixe Gx<sub>1</sub> y<sub>1</sub>.*

1° *Montrer que, parmi les mouvements du solide, il y en a certains (∂ℳ) dans lesquels tout point de l'axe fixe Gz, a, pour un observateur attaché au solide, une vitesse constante. Quelles conditions doivent remplir les constantes d'intégration pour donner ces mouvements (∂ℳ)?*

2° *Étudier complètement les mouvements (∂ℳ) qui donnent une trajectoire sphérique de P passant par un point donné P<sub>0</sub>. Il y a deux formes ℔, ℔' de trajectoires de P et, pour P<sub>0</sub>, deux régions sphériques R et R', la région R ne donnant que des trajectoires ℔ et la région R' donnant à la fois des trajectoires ℔ et ℔'. Déterminer ces deux régions et montrer a priori que les trajectoires du genre ℔' ne sortent jamais de la région R'.*

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — Les équations du mouvement général sont :

$$\begin{aligned} A^2 \sin^2 \theta \theta'^2 &= (h + K^2 \cos^2 \theta) A \sin^2 \theta - (\lambda - C \mu \cos \theta)^2, \\ A \psi' \sin^2 \theta &= \lambda - C \mu \cos \theta, \\ \psi' \cos \theta + \varphi' &= \mu. \end{aligned}$$

La condition imposée s'écrit

$$\varphi'^2 \sin^2 \theta + \theta'^2 = \text{const.}$$

et, exprimée en  $\theta$ , conduit à écrire qu'une certaine fonction de  $\theta$  est constante. Comme  $K \neq 0$ , on obtient finalement

$$A - C \neq 0, \quad \lambda = 0, \quad \mu^2 = \frac{K^2 A}{(A - C)^2}$$

et l'étude des mouvements ∂ℳ se fait sans difficulté, c'est la discussion d'un trinôme bicarré en  $\cos \theta$ . Elle donne :

Si  $h > 0$ , une trajectoire ℔ à boucles avec deux parallèles limites symétriques par rapport à l'équateur ;

Si  $h < 0$ , une trajectoire ℔' sinusoidale avec deux parallèles limites d'un même côté de l'équateur.

L'inégalité fondamentale

$$(h + K^2 \cos^2 \theta_0) A \sin^2 \theta_0 - \frac{C^2 K^2 A}{(A - C)^2} \cos^2 \theta_0 \geq 0.$$

détermine le minimum  $H(\theta_0)$  de  $h$ .

La région R est définie par

$$H(\theta_0) > 0,$$

et la région R' est le reste de la sphère.

Un point quelconque d'une trajectoire  $\mathcal{C}'$  quelconque peut être considéré comme point initial de cette trajectoire  $\mathcal{C}'$ ; il ne peut donc se trouver dans R, il est forcément dans R'.

ÉPREUVE PRATIQUE. — On donne la position initiale ABCD, A'B'C'D' d'un parallélépipède rectangle solide, mais non homogène, dans lequel la densité en chaque point est égale à la distance de ce point au plan de la base ABCD.

On considère les deux droites fixes D et  $\Delta$  avec lesquelles sont confondues, à l'instant initial, les deux droites AB et C'B' et le plan fixe P mené par la droite D perpendiculairement à la droite  $\Delta$ .

Le solide est lancé, à partir de la position initiale considérée, de façon que A décrive la droite D, que C' décrive la droite  $\Delta$  et que B reste dans le plan P.

On a

$$AB = 1, \quad AD = 2, \quad AA' = 3,$$

et la vitesse initiale de A est l'unité.

Calculer numériquement les éléments de réduction au centre de gravité de la quantité de mouvement du solide à l'instant initial.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — On prend comme axes ceux de la base ABCD et l'axe perpendiculaire et l'on détermine facilement le centre de gravité G et l'ellipsoïde d'inertie relatif à l'origine, duquel on déduit immédiatement l'ellipsoïde central rapporté aux axes parallèles menés par G, soit  $F(x, y, z) = 1$ .

Si  $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$  sont les éléments de réduction en G de la vitesse du solide, le point A donne trois conditions, le point C' deux et le point B une, de sorte que l'on a six équations qui déterminent  $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$ . Les éléments de réduction demandés sont alors :

$$M\xi, \quad M\eta, \quad M\zeta; \quad \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial p}, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial q}, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial r}.$$

(Bordeaux, juin 1924.)

C.7. — ÉPREUVE THÉORIQUE. — Deux solides de révolution homogène pesants et identiques ont même axe de révolution et sont suspendus par un point O de cet axe commun Oz.

Par des liaisons convenables, les plans  $zOx$ ,  $zOx'$  des deux trièdres  $Oxyz$ ,  $Ox'y'z'$  attachés à ces deux solides sont assujettis à toujours être symétriques par rapport au plan de  $Oz$  avec la verticale descendante  $Oz_1$ .

1° Discuter complètement le mouvement quand les deux centres de gravité  $G$ ,  $G'$  sont symétriques par rapport à  $O$ .

2° Les deux points  $G$ ,  $G'$  étant quelconques, sous la seule hypothèse que les distances  $OG$ ,  $OG'$  sont très grandes, former les conditions nécessaires et suffisantes que doivent remplir les données initiales pour que, dans le mouvement,  $Oz$  dirigé vers le centre de gravité du système total tende asymptotiquement vers la verticale ascendante. Montrer que les conditions trouvées sont compatibles.

C.8. — ÉPREUVE PRATIQUE. — Un tétraèdre homogène, pesant  $OABC$ , a ses trois arêtes  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  rectangulaires et égales à l'unité. Sa densité est égale à l'unité.

Le sommet  $O$  est fixe et le solide ne peut que tourner autour de la bissectrice intérieure de l'angle  $BOA$ , bissectrice qui est fixe faisant l'angle  $\frac{\pi}{4}$  avec la verticale descendante.

Calculer la durée des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable.

(Bordeaux, novembre 1924.)