NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. SER

Formules relatives à la fonction Γ

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 385-386

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__385_0>

FORMULES RELATIVES A LA FONCTION Γ;

PAR J. SER.

Étant donnée une fonction supposée développable en série de la forme

$$f(x) = f_0 - x f_1 - \frac{x(1-x)}{2!} f_2 - \frac{x(1-x)(2-x)}{3!} f_3 - \ldots,$$

la fonction $V(x)$ s'annulant avec x et satisfaisant à l'équation fonctionnelle

$$(1) \qquad V(x+1) - V(x) = f(x)$$

a pour expression

$$V(x) = x f_0 + \frac{x(1-x)}{2!} f_1 + \frac{x(1-x)(2-x)}{3!} f_2 + \ldots.$$

Considérons maintenant le développement valable pour $x + a > 0$,

$$(2) \qquad \frac{a}{x+a} = 1 - \frac{x}{1+a} - \frac{x(1-x)}{(1+a)(2+a)} - \frac{x(1-x)(2-x)}{(1+a)(2+a)(3+a)} - \ldots$$

que l'on peut déduire entre autres de l'égalité

$$F(1, -x, 1+a, 1) = \frac{\Gamma(1+a)\Gamma(a+x)}{\Gamma(a)\Gamma(a+x+1)},$$

F désignant le symbole de la série hypergéométrique.

La fonction

$$a\left[\frac{\Gamma'(x+a)}{\Gamma(x+a)} - \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}\right]$$

s'annule avec x et satisfait aussi à la condition (1).

On en déduit la relation

$$(3) \qquad \frac{\Gamma'(x+a)}{\Gamma(x+a)} = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \frac{x}{a} + \frac{x(1-x)}{2a(1+a)} + \frac{x(1-x)(2-x)}{3a(1+a)(2+a)} + \ldots.$$

En intégrant de zéro à x, on introduit les polynomes [1],

$$(4) \qquad P_{n+1} = \int_0^x \frac{x(1-x)\ldots(n-1-x)}{n!}\,dx$$

[1] *Intermédiaire des Mathématiciens*, 1925, p. 126; *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1926, p. 818.

qui sont positifs pour $0 < x < 1$ et forment une suite convergente dont la somme est x.

La formule ainsi obtenue,

$$\log \frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(a)} = x \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \frac{P_2}{a} + \frac{1!\,P_3}{a(1+a)} + \ldots, \tag{5}$$

est très avantageuse pour le calcul de $\log \Gamma(x)$, si l'on prend pour a un entier suffisamment grand.

Lorsque $\frac{1}{2} < x < 1$, on peut employer de préférence la formule

$$\log \frac{\Gamma(1+a)}{\Gamma(x+a)} = (1-x) \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \frac{p_2 - P_2}{a} + \frac{1!\,(p_3 - P_3)}{a(1+a)} + \ldots, \tag{6}$$

les nombres p_h désignant les valeurs de P_h pour $x = 1$.

Le développement obtenu en faisant $x = 1$ dans la formule (5) donne une expression de $\log a$ pour toutes les valeurs positives de a,

$$\log a = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \frac{p_2}{a} + \frac{1!\,p_3}{a(1+a)} + \frac{2!\,p_4}{a(1+a)(2+a)} + \ldots. \tag{7}$$

M. Appell a établi cette formule dans le cas général (*Acta mathematica*, 1926) en partant d'une formule de Joseph Bertrand.