Nouvelles annales de mathématiques

Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 381-384

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__381_1>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Un solide pesant* S *est formé d'un disque circulaire homogène, de rayon* R, *d'épaisseur négligeable, muni en son centre* A *d'une tige rectiligne* OA, de longueur R, *de masse négligeable, qui lui est invariablement fixée normalement à son plan.*

L'extrémité O *de cette tige est articulée sans frottement au sommet d'un trièdre trirectangle* fixe $Ox_1y_1z_1$ (Oz_1 *verticale ascendante*).

Le corps S *se meut entre les deux plans matériels* fixes

$$(P) \quad z_1 = R; \qquad (Q) \quad z_1 = -R,$$

qu'il touche, soit en I, *soit en* J. *On supposera le diamètre du disque légèrement inférieur à la distance des deux plans*, de telle sorte que le contact ne puisse avoir lieu simultanément en I et en J.

On désignera par f le coefficient de frottement *en ces deux points, par* ω *la vitesse angulaire de la rotation propre du disque, par* λ *la vitesse angulaire du plan* AOz_1.

1° *Comment faut-il lancer le corps* S *pour qu'il se meuve sans appuyer sur les plans* P *et* Q?

2° *Le corps* S *étant supposé immobile, quelle percussion faut-il exercer au point* J *tangentiellement à la circonférence du disque pour que le mouvement ultérieur remplisse les conditions du premier paragraphe?*

3° *Comment faut-il lancer le corps* S *pour qu'il roule sans glisser : a. sur le plan inférieur; b. sur le plan supérieur? Étudier ces mouvements.*

4° *Étude générale du mouvement du corps entre les deux plans* P *et* Q *avec des vitesses initiales* (ω_0, λ_0) *quelconques. Discussion.*

Examiner en particulier les deux cas

$$\lambda_0 = \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}; \qquad \lambda_0 = \frac{\omega_0}{2} = \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

On se bornera à indiquer l'aspect du mouvement, sans insister sur le calcul, d'ailleurs très simple, des expressions de λ et de ω en fonction de t.

Il sera commode de baser l'étude sur l'équation différentielle que vérifie la vitesse de glissement au point (I *ou* J) *où le contact a lieu.*

Indications sur la solution. — 1° Mouvement stationnaire d'une toupie de révolution. La condition est

$$R\,\omega_0\lambda_0 = 2g.$$

2° Le moment de la percussion P par rapport à O doit avoir pour valeur le moment cinétique à la fin du choc, d'où, la masse de la toupie étant l'unité,

$$P = \pm\frac{\sqrt{5gR}}{2}.$$

3° *a*. La condition est simplement

$$\omega_0 + \lambda_0 = 0;$$

b. La condition est

$$\omega_0 = \lambda_0 \qquad \text{avec} \qquad R\omega_0\lambda_0 > 2g.$$

4° Le théorème du moment cinétique au point O donne les équations du mouvement sous la forme

$$\frac{R}{2}\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon f N; \qquad \frac{5R}{4}\frac{d\lambda}{dt} = \varepsilon f N; \qquad \frac{R}{2}\omega\lambda = g - N;$$

avec

$$N > 0; \qquad \varepsilon(\lambda + \omega) < 0; \qquad \varepsilon = \pm 1$$

dans le cas du contact en J.

La vitesse de glissement u vérifie l'équation

$$R\frac{du}{dt} = \varepsilon f\left[2gR - \frac{(2u+k)(5u-k)}{49}\right]$$

avec $R(5\lambda - 2\omega) = k$.

On en déduit que, si

$$R\omega_0\lambda_0 < 2g,$$

$|u|$ décroît et atteint la valeur zéro au bout d'un temps fini ; il la conserve indéfiniment.

Si *le contact a lieu en* I, l'équation en u est

$$35\,R\frac{du}{dt} = \varepsilon f[(K - 5u)(K + 2u) - 98\,gR],$$

avec

$$R(5\lambda + 2\omega) = K, \qquad \varepsilon(\lambda - \omega) < 0, \qquad \varepsilon = \pm 1;$$

Si $K^2 < 80\,gR$, le contact a lieu en J ;

Si $80\,gR < K^2 < 98\,gR$, le mouvement tend au bout d'un temps fini vers le mouvement étudié dans 1° ;

Si $98\, g\, R < K^2$, il y a roulement sans glissement en I au bout d'un temps fini.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une sphère homogène pesante, de rayon* $R = 10^{cm}$, *est assujettie à rouler sans glisser sur un plan horizontal fixe, en un lieu dont la latitude est 45 degrés.*

Étudier son mouvement en tenant compte de la rotation de la Terre.

On prendra comme axes de référence liés à la Terre, l'horizontale Nord-Sud, l'horizontale Est-Ouest et la verticale issues de la position initiale du centre de la sphère.

u, v, o, p, q, r *désigneront respectivement les composantes de la vitesse du centre de la sphère, et les composantes de sa rotation instantanée par rapport à la Terre.*

On se bornera à étudier le cas où le mouvement initial de la sphère est une rotation de 10 *tours par seconde autour de la verticale de son centre* ($u_0 = v_0 = p_0 = q_0 = 0$).

1° *Déterminer, dans le cas de cette sphère, la correction à apporter aux lois habituelles de la Mécanique terrestre pour tenir compte de la rotation de la Terre.*

2° *Déterminer avec précision la trajectoire du centre de la sphère. Indiquer sa nature et ses principales dimensions.*

Nota : *La pesanteur, ou résultante de l'attraction newtonienne et de la force d'inertie d'entraînement sera supposée constante et normale au plan horizontal donné dans la région où l'on étudie le mouvement de la sphère.*

Indications sur la solution. — Les équations du mouvement sont :

$$\frac{du}{dt} = X + \varepsilon\sqrt{2}\, v, \qquad \frac{2R}{5}\frac{dp}{dt} = Y + qR\frac{\varepsilon\sqrt{2}}{5}$$

$$\frac{dv}{dt} = Y - \varepsilon\sqrt{2}\, u, \qquad \frac{2R}{5}\frac{dq}{dt} = -X + R\frac{\varepsilon\sqrt{2}}{5}(r - p) \qquad \begin{aligned} u - qR &= 0, \\ v + pR &= 0. \end{aligned}$$

$$0 = Z - g - \varepsilon\sqrt{2}\, v; \qquad \frac{2R}{5}\frac{dr}{dt} = -R\frac{\varepsilon\sqrt{2}}{5} q$$

(ε = vitesse de rotation de la Terre; X, Y, Z désigne la réaction du plan; la masse de la sphère est prise pour unité).

L'élimination de X, Y, p, q, r donne deux équations en u et v, d'où les coordonnées x, y du centre de la sphère :

$$x = A(1 - \cos\rho t); \qquad y = \frac{6\varepsilon\sqrt{2}}{7\rho} A(\sin\rho t - \rho t),$$

avec

$$7\rho = \varepsilon\sqrt{79}; \qquad 79\,\varepsilon A = 7 R r_0 \sqrt{2}.$$

La trajectoire est la projection orthogonale d'une cycloïde.

(Lille, juin 1926.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. C.79. — *Un disque circulaire homogène, de masse m, de rayon r, est soumis aux liaisons suivantes (sans frottements) : le centre O du disque est fixe et, de plus, un diamètre bien déterminé du disque, soit Δ ce diamètre, est assujetti à faire un angle constant et donné α avec la verticale Oz.*

La position du disque dépend donc de deux paramètres. On prendra les suivants : φ, angle du plan que définissent Oz et Δ avec un plan vertical fixe passant par Oz.

θ, angle du plan du disque avec le plan de Oz et Δ.

1° *Discuter le mouvement pour des conditions initiales quelconques.*

On discutera d'abord par rapport au paramètre θ, puis on examinera si φ varie toujours dans le même sens.

Caractériser tous les mouvements dans lesquels $\frac{d\theta}{dt}$ reste constant.

2° *On suppose qu'à un instant t on ait*

$$\theta = 0, \qquad \frac{d\theta}{dt} = 0, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega \qquad \text{(donné)};$$

à cet instant on fixe brusquement le plan (Δ, Oz), le disque restant mobile autour de l'axe Δ. Calculer la valeur que prend la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$.

3° *On* impose *au plan (Δ, Oz) un mouvement de rotation uniforme autour de Oz : $\varphi = \omega t + \varphi_0$ (où ω est donné et constant), le disque restant librement mobile autour de Δ. Étudier le mouvement relatif du disque par rapport au plan (Δ, Oz).*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Une circonférence matérielle et pesante, de masse $4m$, de rayon a, peut tourner librement autour d'un axe Oz, fixe et horizontal, qui est invariablement lié à cette circonférence et qui lui est tangent au point O. Un point matériel P, de masse m, glisse sur cette circonférence. On néglige les frottements.*

I *étant le centre de la circonférence, on désignera par φ l'angle du rayon* IP *avec le prolongement de* OI *et l'on appellera θ l'angle de* OI *avec la verticale descendante :*

1° *Écrire et intégrer les équations des petits mouvements du système autour de sa position d'équilibre stable.*

2° *On suppose qu'à l'instant initial $t = 0$ on ait*

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \qquad \theta = \frac{\pi}{4}, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = 0.$$

Calculer, à cet instant, les valeurs des dérivées secondes $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ et déterminer, au même instant, la réaction du point P sur la circonférence.

(Marseille, juin 1926.)