Concours d'admission à l'École polytechnique en 1926

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 341-345

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__341_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1926.

Composition de Géométrie analytique.

PREMIÈRE QUESTION.

Deux points P *et* P′ *décrivent une ellipse* (E), *de foyer* F, *et qui, rapportée à ses axes, a pour équation*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

La somme des distances $FP + FP'$ *est constante :*

$$FP + FP' = k.$$

1° *Montrer que le milieu* M *du segment* PP′ *décrit une droite d'équation* $x = h$. *Relation entre* k *et* h.

2° *Trouver l'enveloppe* (G) *de la droite* PP′.

3° *Trouver les tangentes communes à* (E) *et à* (G), *ainsi que les points d'intersection de ces deux courbes.*

4° *Trouver le lieu du point de rencontre des tangentes menées à* (E) *aux points* P et P′ (1).

(1) Prière de faire la figure.

SOLUTION PAR M. PH. DU PLESSIS.

1° Si F est le foyer d'abscisse c, on a, comme il est bien connu,

$$FP = a - \frac{cx}{a}, \qquad FP' = a - \frac{cx'}{a},$$

d'où, en faisant la somme, et si h est l'abscisse du milieu M de PP',

$$k = 2a - \frac{2ch}{a}.$$

Le point M décrit donc la perpendiculaire à l'axe focal AA', menée par le point H d'abscisse

$$(1) \qquad h = \frac{a(2a-k)}{2c}.$$

Lorsque les points P et P' viennent se confondre avec l'un des points C de rencontre de cette droite avec l'ellipse (E), on a

$$k = 2FC,$$

ce qui montre que la solution n'est réelle que si

$$2(a-c) \leqq k \leqq 2(a+c).$$

2° Transformons la figure par dilatation des ordonnées dans le rapport $\frac{a}{b}$.

A l'ellipse (E) correspond le cercle (E_1) de diamètre AA', aux points P et P' de (E) les points P_1 et P'_1 de (E_1), et le milieu M_1 de $P_1P'_1$ décrit aussi la droite HC. Comme OM_1 est perpendiculaire à $P_1P'_1$, l'enveloppe de cette droite est la parabole (G_1) de foyer O et de sommet H, dont l'équation est

$$(2) \qquad y^2 + 4h(x-h) = 0.$$

L'enveloppe (G) de PP' est donc la parabole obtenue en réduisant les ordonnées de la première dans le rapport $\frac{b}{a}$; son équation est

$$(3) \qquad a^2y^2 + 4b^2h(x-h) = 0.$$

Son sommet est H et son paramètre $\frac{2b^2h}{a^2}$.

3° Lorsque les points P_1 et P'_1 se confondent en C_1, point de rencontre de HC et du cercle (G_1), la droite $P_1 P'_1$ se confond avec la tangente en C_1 à ce cercle. Cette tangente, avec sa symétrique par rapport à AA′, constitue donc un premier couple de tangentes communes à (G_1) et à (E_1). Pour avoir le second, il suffit de remarquer que les droites isotropes issues de O sont tangentes à la fois au cercle (E_1) de centre O et à la parabole (G_1) de foyer O. Ce sont d'ailleurs les asymptotes de ce cercle.

Donc les tangentes communes à la parabole (G) et à l'ellipse (E) sont : 1° les tangentes à cette ellipse en ses points de rencontre C et C′ avec la droite HM ; 2° les asymptotes de l'ellipse, d'équations

$$ay = \pm bx\sqrt{-1}.$$

Quant aux points communs à (G) et à (E), ils auront mêmes abscisses que les points communs à (G_1) d'équation (2) et au cercle (E_1) d'équation

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

L'élimination de y^2 entre ces équations donne immédiatement

$$x^2 - 4hy + 4h^2 - a^2 = 0 \tag{4}$$

ou

$$(x - 2h)^2 = a^2,$$

c'est-à-dire

$$x = 2h \pm a.$$

D'ailleurs la substitution de a et de $-a$ dans le premier membre de (4) donnant $-4h(a-h)$ et $4h(a+h)$ qui sont de signes contraires, une seule de ces racines est comprise entre $-a$ et a et il n'y a que deux points communs réels.

4° Le pôle Q_1 de $P_1 P'_1$ par rapport au cercle (E_1) est situé sur OM_1 et tel que

$$OM_1 . OQ_1 = a^2.$$

Le lieu de ce pôle est donc le cercle inverse de la droite HC_1 par rapport au cercle (E_1), c'est-à-dire le cercle circonscrit au triangle OC_1T, si T est le point de OA où se coupent les tangentes en C et en C_1 à (E) et à (E_1). L'équation de ce cercle est

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2}{h}x = 0.$$

Le lieu du pôle Q de PP′ par rapport à l'ellipse (E) est dès lors l'ellipse, semblable à (E), qui a pour axe OT et passe par C. Son équation est

$$x^2 + \frac{a^2 y^2}{b^2} - \frac{a^2 x}{h} = 0$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{x}{h} = 0.$$

DEUXIÈME QUESTION.

Un triangle rectangle AOB *a pour hypoténuse un rayon variable* OB *d'un cercle de centre* O *et pour sommet de l'angle droit un point* A *variable sur une droite fixe qui rencontre le cercle aux points* D *et* D′, H *étant le milieu de* DD′, *on désigne par* α *l'angle* $\widehat{\text{HOA}}$ *et par* β *l'angle* $\widehat{\text{HOB}}$.

1° *Relation entre* α *et* β.

2° *Déterminer le maximum de l'angle* β, *ainsi que la valeur de* α *pour laquelle il y a maximum.*

3° *Déterminer la position de* DD′ *de telle manière que, lorsque* β *est maximum,* A *se trouve au milieu du segment* HD. *Calculer dans ce cas la valeur numérique de* $\cos\beta$ (¹).

SOLUTION PAR M. PH. DU PLESSIS.

1° Il suffit d'évaluer OA dans les triangles OAB et OAH pour avoir immédiatement, en posant $\text{OB} = r$, $\text{OH} = h$,

$$r\cos(\beta - \alpha) = \frac{h}{\cos\alpha}$$

ou

$$\cos\alpha\cos(\beta - \alpha) = \frac{h}{r},$$

qu'on peut écrire

$$\cos\beta + \cos(\beta - 2\alpha) = \frac{2h}{r}.$$

2° Le maximum de β aura lieu lorsque la dérivée partielle du

(¹) Prière de faire la figure.

premier membre par rapport à α sera nulle, c'est-à-dire pour

$$\sin(\beta - 2\alpha) = 0$$

ou

$$\beta = 2\alpha.$$

Ce résultat peut d'ailleurs s'obtenir immédiatement par la géométrie. En effet, le point A se trouvant sur le cercle de diamètre OB, le maximum de β aura lieu quand ce cercle sera tangent à la droite DD'. Mais ce cercle passant par le pied I de la perpendiculaire abaissée de B sur OH, et le point de contact A étant alors le milieu de l'arc IB, on a

$$\beta = 2\alpha.$$

L'égalité des angles faits par OH et OB avec la perpendiculaire OA à AB entraîne la conséquence que AB coupe OH à une distance de O égale à OB. Donc, AB passe par l'extrémité C du rayon formé par OH prolongé. Le point A se trouvant, dès lors, sur le cercle de diamètre OC s'obtient par la rencontre de ce cercle et de la droite DD'; puis, le point B par la rencontre de la droite CA avec le cercle donné.

Dans ces conditions,

$$\mathrm{OI} = \mathrm{OC} - 2\mathrm{HC} = r - 2(r-h) = 2h - r,$$

et la valeur correspondante de β est donnée par

$$\cos\beta = \frac{2h - r}{r}.$$

3° Si le point A se trouve au milieu de AD, BD est parallèle et égal à HC puisque A est la projection du milieu de OB sur HD; les points I et H sont symétriques par rapport à O, et l'on a

$$\mathrm{IO} = \mathrm{OH} = \frac{\mathrm{HC}}{2}$$

ou $\mathrm{IO} = \frac{\mathrm{OC}}{3}$; par suite, $\cos\beta = -\frac{1}{3}$.