NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. HADAMARD

À propos du nouveau programme de mathématiques spéciales

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 257-276

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__257_0>

N. D. R. — *Il serait superflu de souligner l'intérêt de l'article que nous publions aujourd'hui. Le caractère des* Nouvelles Annales *nous oblige à laisser habituellement de côté l'étude et la discussion des questions pédagogiques, mais nous sommes heureux de pouvoir faire ici une exception : exception amplement justifiée, puisque la réforme du programme de Mathématiques spéciales intéresse tout notre enseignement scientifique.*

La Rédaction des Nouvelles Annales *n'a pas à prendre parti dans le débat. Mais il nous sera permis d'exprimer ici notre conviction qu'une discussion, portant peut-être moins sur des principes que sur leur application, ne peut manquer d'être très féconde et d'aboutir à une conciliation des points de vue.*

A PROPOS DU NOUVEAU PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

PAR J. HADAMARD.

Je suis bien surpris, — et bien désagréablement, — d'avoir à m'élever contre les résolutions prises par des hommes dont les idées sont d'habitude si complètement d'accord avec les miennes, et envers qui nous professons tous une si haute estime. Le désaccord existe cependant : bien des choses me paraissent regrettables dans ce qui vient d'être fait, et je crois devoir le dire.

Amour-propre d'auteur? Peut-être : nous avions en effet, quelques collègues de l'École Polytechnique et moi, élaboré un projet qui nous paraissait répondre aux besoins actuels, et que nous avions la prétention d'avoir convenablement mûri. Nous avions eu soin de prendre les avis d'un ou deux professeurs de Spéciales, choisis, bien entendu, parmi les plus réputés. Nous étions sûrs en particulier de n'avoir point augmenté la difficulté du programme, de n'en avoir point augmenté, d'en avoir même diminué l'étendue : ceci d'ailleurs non point tellement au point de vue du travail imposé aux candidats (l'expérience a montré, on le sait, que ce n'est pas le nombre des questions inscrites qui mesure le surmenage des « taupins » et qu'il y a erreur totale à vouloir agir sur celui-ci par celui-là) qu'au point de vue du temps nécessaire aux professeurs pour terminer leur cours de manière à permettre, même pour ceux qui se prépareront en une seule année, une sérieuse révision. Ce sont ces propositions qui ont été accueillies, non seulement la plupart sans approbation, mais — il est permis d'en être surpris et de le regretter — à peine, autant qu'il me semble, avec une sérieuse attention.

Cela est permis sans le moindre amour-propre d'auteur (voire collectif, puisqu'il s'agit, nous l'avons dit, d'une œuvre commune). La question est plus haute. Pour avoir été négligés par la Commission, les motifs qui nous avaient guidés n'ont pas cessé d'avoir leur valeur, à une heure aussi grave que celle que nous traversons.

Ce n'est pas, en effet, enfler le ton hors de propos que de porter un instant un pareil débat sur un terrain supérieur. Je n'ai pas à rappeler ici combien il affecte les intérêts les plus divers et les plus essentiels du pays, à commencer par la défense nationale : tout lecteur le sait aussi bien que moi-même; mais je voudrais que tout lecteur ait cela présent à l'esprit en parcourant ce qui va suivre, comme nous-mêmes, au cours de notre travail, ne perdions pas de vue ce que les « Mathématiques spéciales » représentent virtuellement de vie scientifique, de vie pratique, de pensée et d'action, — d'officiers, d'ingénieurs, d'industriels, de savants.

C'est à cette œuvre que, les uns et les autres, nous avions à collaborer, pour notre faible part, dans le travail relativement modeste de l'élaboration d'un programme.

I.

La première et principale préoccupation que nous éprouvions n'est que trop partagée par tous ceux qui, dans ces dernières années, ont songé à l'intérêt de notre enseignement scientifique.

La classe de Mathématiques spéciales est, comme les langues d'Ésope, la meilleure et la pire des choses. La meilleure, je n'ai pas besoin d'y insister. C'est un privilège unique de l'enseignement français de faire assimiler dès le lycée des connaissances qui partout ailleurs sont réservées à l'enseignement supérieur et de rompre la jeunesse à leur maniement, avec la perfection que l'on sait, en quelques mois, et une telle œuvre fait l'admiration de tous les visiteurs qui nous viennent de l'Étranger.

Je rappelle cela, qui n'a rien à voir directement avec ce qui va suivre, afin de ne pas donner le change sur ma pensée au moment où il me reste à en présenter la contre-partie.

Cette contre-partie est, malheureusement, elle aussi, de notoriété générale. L' « esprit taupin », on ne sait que trop ce que cela signifie, quel pédantisme naïf, quelle confiance illimitée en la vertu universelle des formules cela implique, chez des esprits qu'un enseignement relativement élevé devrait, croirait-on, avoir libéré de tares de cet ordre. Quel est ici le principal coupable? Est-ce l'enseignement des mathématiques spéciales tout seul, ou ne serait-ce pas aussi, comme j'ai eu l'occasion de le dire ailleurs, l'enseignement secondaire dans son ensemble, avec son orientation perpétuellement formelle et abstraite? Tous deux assurément, et la défaillance de l'un ne doit pas nous cacher la défaillance de l'autre. En tout cas, le mal est là, et il est très sérieux. L'inévitable désir du moindre effort aidant, le taupin — le mot est trop consacré par l'usage pour qu'il en vienne un autre sous ma plume — sort trop souvent de sa dernière année de lycée avec la tendance à tout réduire à une formule, à oublier, une fois qu'il l'a acquise (et cela, chose curieuse, même lorsqu'il en a compris la démonstration) le problème concret qui a servi de point de départ, à se refuser à toute vue directe des faits; et, de cette tendance, il lui reste en général quelque chose pour toute sa vie. Les fruits admirables que nous tirons par ailleurs des Spéciales, compensent, certes, un pareil inconvénient. On a trop souvent cru qu'ils devaient le faire oublier. Il faut renoncer à cette illusion : tous ceux qui ont suivi la vie nationale dans la récente période, et surtout dans la récente crise, savent quel danger grave il y a là, et combien il est temps d'y parer.

Nous nous étions efforcés de lutter contre cette tendance désastreuse dans la faible mesure des moyens que nous avions à notre disposition, c'est-à-dire en supprimant à l'occasion ce qui était de nature à la développer et en insistant au contraire sur les sujets qui pouvaient développer et encourager l'intuition. De ce nombre sont, on le sait, les notions empruntées à la géométrie pure.

La mise en œuvre de ce principe n'est d'ailleurs pas sans présenter quelques difficultés et sans avoir occasionné quelques malentendus, comme il arrive forcément lorsqu'on lutte contre cet ennemi redoutable en pédagogie qui s'appelle la paresse de l'esprit humain. L'emploi exclusif et abusif des « méthodes générales » n'a pas été, à l'usage, sans effet fâcheux sur des esprits d'écoliers, heureux de trouver un oreiller commode pour leur incuriosité dans ces règles où, on l'a dit, l'inventeur a concentré tout l'effort d'intelligence qu'il entend épargner à ceux qui useront de son travail.

Mais étrange serait l'idée de tomber par réaction dans un excès inverse et de vouloir proscrire les idées générales, si ce n'est même les idées tout court, de tout l'enseignement mathématique ; de tomber par conséquent forcément, soit dans l'artifice, — le contraire de toute saine pédagogie — soit dans les calculs les plus indigestes. C'est cependant un pareil idéal que de bons esprits en sont venus, paraît-il, à nous proposer. Si vraiment telle est leur idée, je ne puis qu'avouer mon impuissance à les comprendre. Il faut croire que par les mots « formation du jugement, développement de l'esprit », nous n'entendons point les mêmes choses. C'est, dans une voie opposée en apparence à celle dont nous parlions à l'instant, le même vice pédagogique qui apparaît, la même absence de valeur éducative.

La contradiction n'est, en effet, qu'apparente. Non seulement il est clair que l'enseignement devra constamment montrer la relation entre une idée générale et ses applications concrètes; mais s'il est des « idées générales » que nous serons amenés à proscrire, il y a cent à parier contre un que, pour « générales » qu'elles soient, les méthodes dont il s'agira ne renfermeront guère d'idées, ne seront guère propres à en développer chez l'élève ni surtout à lui donner l'habitude de se faire lui-même une idée des faits qu'il a à étudier.

Tel est, en particulier, le cas pour la géométrie analytique, contre laquelle, on le sait, ou plutôt contre l'abus de laquelle, le programme de 1904 mettait en garde non sans quelque raison. Contradiction avec la nécessité de développer l'élément géométrique dans l'esprit de la jeunesse scientifique? Oh non! car il arrivait, et il arrive trop souvent, à cette géométrie analytique de n'être point de la Géométrie; à l'élève, sinon au professeur, d'oublier que c'est de Géométrie qu'il s'agit.

Même en restant dans le domaine de l'analyse, on peut trouver aisément des exemples de ce que j'avance. Le mieux est, d'ailleurs, de les aborder tout de suite et, — évitant, nous aussi, un trop long séjour dans l'abstraction, — d'en venir, sans plus tarder, à l'application. Ce que je crains d'avoir assez mal dit dans ce qui précède, et que le lecteur aura pu trouver quelque peu nébuleux, s'éclairera, je l'espère, à sa lumière.

Le projet que nous présentions supprimait expressément du programme le fameux « théorème de Rouché ».

Que voilà un bel objet de vitrine! Comme il résume dans son seul énoncé toute l'étude du sujet et semble dispenser de tout autre effort; — et combien en effet il mérite d'exciter l'intérêt, sinon même l'admiration... de ceux qui connaissent par ailleurs à fond les propriétés des équations et des formes linéaires et n'ont pas besoin de lui pour les apprendre. Pour le débutant, pour l'élève de Spéciales, c'est une autre affaire, du moment qu'on veut lui fournir une intelligence véritable des formes linéaires et de leur indépendance. S'il s'agit de déclarer le théorème de Rouché la plus belle chose du monde, j'y consens tout de suite; s'il s'agit de le déclarer utile, j'y serai prêt le jour où l'on m'en aura montré une application tant soit peu importante, une seule, soit dans une théorie mathématique, soit même à propos d'un exemple numérique pratique, comme il peut s'en trouver parfois. Quant au « taupin » — tant pis! Je continue et continuerai à user du mot : il n'exprime que trop bien les tendances contre lesquelles nous voudrions lutter — au taupin habitué à croire au théorème de Rouché comme à la loi suprême, il lui faut souvent quelque hésitation et un astucieux calcul pour dire si cinq ou six formes linéaires données sont indépendantes, alors qu'il s'est déjà aperçu que les trois premières ne le sont pas.

Point d'illustration plus typique, à mon sens, que celle-là d'une méthode pédagogique théoriquement parfaite, en réalité éminemment propre à déformer l'esprit, au moins à un certain point de vue, et qui y réussit en général assez bien. Point de suppression qui nous ait paru mieux s'imposer.

Qu'a fait la Commission interministérielle, dans le programme qui vient d'entrer en vigueur?

D'une manière générale, elle déclare avoir bien entendu parler du danger d'une abstraction exagérée, de l'insuffisance d'intuition et de vues concrètes; mais... elle s'en lave les mains. Affaire aux professeurs, aux examinateurs, bref à tout le monde, mais pas à elle.

Il y a du vrai là-dedans, parbleu; chacun sait que les meilleures prescriptions, en matière légale ou ailleurs, sont peu de chose si l'application n'y aide point. Seulement, le lecteur trouvera peut-être, comme moi, que la conséquence, — celle que je viens d'indiquer — ne s'ensuit pas nécessairement de ces prémisses. La morale de l'histoire est, ne vous semble-t-il point? que pour triompher d'un défaut aussi funeste et aussi profondément enraciné, il est bon que chacun y mette du sien, rédacteurs des programmes comme professeurs et examinateurs. En tout cas, imposer l'étude de ce qui peut encourager et développer le défaut en question, même en ordonnant qu'à partir d'aujourd'hui cette étude ne produira pas son effet immanquable, celui qu'elle n'a jamais manqué de produire jusqu'ici, n'est peut-être pas l'idée la plus heureuse qu'on pût avoir.

Comment a raisonné la Commission? Je ne sais; mais le « théorème de Rouché » reste là jusqu'à nouvel ordre, et les taupins continueront, demain comme hier, à se mirer dans sa mécanique bien astiquée.

Une fois entendu que, pour enrayer une fâcheuse tendance d'esprit, le fait d'insister sur les sujets où elle peut et doit le mieux se donner carrière n'a pas d'importance, il n'y a qu'à poursuivre les applications d'un tel principe. Soyons justes : il n'en est point dans le programme actuel d'aussi belle que celle dont nous venons de parler; mais on peut encore en trouver quelques-unes. Le programme des années précédentes avait écarté déjà les théorèmes d'Apollonius relatifs à l'ellipsoïde, et, en effet, dans l'état actuel de la Science, on ne voit pas trop à quoi ils servent. Mais à quoi servent et quel intérêt offrent, aujourd'hui, les théorèmes correspondants relatifs à l'ellipse? En quoi, surtout dans un programme de géométrie analytique [1], aident-ils à la compréhension de la nature de la courbe, surtout après la suppression, décidée par le programme actuel, et à laquelle, en soi, je ne vois pas d'inconvénient, de la recherche des axes d'une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués (ce cas n'est malheureusement pas le seul où le programme actuel conserve un principe en éliminant tout ce qui en fait l'intérêt et la portée). Nous n'avions donc pas vu de nécessité de conserver les théorèmes d'Apollonius. Par contre, il nous avait semblé important, au point de vue du développement de l'intuition géométrique, de donner leur forme dualistique aux principes de la Géométrie projective. La Commission a préféré les théorèmes d'Apollonius, — y compris le cas de l'hyperbole (pensez donc : si on l'avait oublié!) — : chacun son goût.

Félicitons-nous toutefois d'un point où nous nous sommes trouvés d'accord avec les rédacteurs du programme. Les mathématiques spéciales économiseront, dorénavant, l'étude de l'hyperbole d'Apollonius et des normales menées d'un point à une conique.

Une simple question d'ordre me semble encore mettre en évidence, dans une question d'analyse, la discordance entre notre point de vue et celui qui a triomphé. C'est avec un véritable étonnement que, à la lecture du programme en vigueur dans les années précédentes, nous avions vu les notions d'infiniment petit et d'infiniment grand rejetées à la fin des notions fondamentales, après toute la théorie des séries. Bizarre interversion, au point de vue de l'élève, sinon même au point de vue du mathématicien, de

---

[1] Au point de vue de la Géométrie pure, l'un de ces théorèmes peut être intéressant comme exemple de conservation de l'aire en projection parallèle.

Au point de vue de la formation logique, de la saine « économie de la pensée », le fait de conserver les théorèmes d'Apollonius pour l'ellipse en même temps qu'on les supprime pour l'ellipsoïde a quelque chose de particulièrement absurde. Les artifices ou les calculs, quels qu'ils soient, qui conduisent aux théorèmes plans n'apportent rien d'intéressant au point de vue éducatif, tandis que, ces théorèmes une fois acquis, la méthode du « couteau de Jeannot », qui, en trois lignes d'ailleurs, permet de les transporter à l'espace, a des chances de se retrouver dans d'autres questions et constitue par conséquent, une acquisition logique incontestable.

l'ordre naturel. Nous avions rétabli celui-ci et placé la notion d'infiniment petit à la base de toutes les autres. La Commission garde l'ancien ordre; elle le corrige un peu, je me hâte de le dire, en ajoutant que la notion d'infiniment petit sera appliquée à la théorie des séries, ... après avoir énuméré auparavant tous les chapitres de celle-ci et même, entre temps, parlé de tout autre chose. Seulement, d'autre part, elle en aggrave le défaut par ce qui me paraît être un lapsus, — mais on n'a pas le droit de commettre des lapsus dans un texte qui doit servir de base à l'instruction mathématique de la jeunesse française. — Je cite ici textuellement :

« Séries. — Progression géométrique. Séries à termes positifs. Série $\sum \frac{1}{n^p}$. Caractères de convergence tirés de l'étude de $\sqrt[n]{U_n}$ et de $\frac{U_{n+1}}{U_n}$. Séries absolument convergentes, etc.

Qu'est-ce à dire? La progression géométrique est-elle là au premier moment comme un simple exemple de série convergente ou est-il bien convenu qu'elle doit servir de première base à une étude générale; la série $\sum \frac{1}{n^p}$, *qui figure, comme on le voit, avant les critères de d'Alembert et de Cauchy*, doit-elle fournir ou non de nouveaux caractères de convergence? Et si oui, l'étude de ces caractères doit-elle précéder ou suivre celle de $\sqrt[n]{U_n}$ et de $\frac{U_{n+1}}{U_n}$?

Vous me direz, ici encore, que cela regarde le professeur, qui, après tout, est maître de son ordre et que, par conséquent, ce détail de rédaction n'a pas d'importance. Je suis persuadé du contraire. A qui ferez-vous croire que certains professeurs ne seront pas impressionnés par l'ordre qui leur est indiqué, surtout s'il arrive qu'ils ne ressentent pas autant que d'autres l'importance d'une hiérarchie dans les modes de convergence? Et combien trouve-t-on en fait de candidats qui n'ont pas compris cette hiérarchie et qui ne manquent pas de comparer à la série $\sum \frac{1}{n^p}$ celle dont le terme général est $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}$, ou celle qui développe un cosinus hyperbolique? Ici encore, le devoir n'était-il pas de saisir toute occasion pour lutter contre une pareille erreur, c'est-à-dire contre là tendance à appliquer mécaniquement les règles au lieu de faire intervenir le sens des faits et l'intuition?

II.

Nous avions eu à nous inspirer d'une autre préoccupation plus modeste, mais particulièrement impérieuse.

La surcharge des programmes, par suite de l'augmentation des connaissances humaines, est une difficulté redoutable, et cette difficulté se fait sentir à tous les degrés de l'enseignement. Ceux-ci réagissent d'ailleurs forcément les uns sur les autres, chaque soulagement apporté à l'un d'eux pouvant se traduire par un nouveau fardeau imposé au degré précédent ou au degré suivant.

L'enseignement des Mathématiques spéciales dont nous nous occupons a pour tâche de préparer à l'enseignement supérieur scientifique et toute retouche qui lui est apportée a pour but en réalité d'améliorer cette préparation et de simplifier l'œuvre qui reste à accomplir dans les années qui lui succèdent. Pour y arriver sans abuser des forces de l'élève, il convient tout d'abord, cela va sans dire, de se borner à ce qui est strictement essentiel. Il est clair que certaines mêmes des suppressions dont nous avons parlé plus haut et que nous avions proposées dans notre projet ne l'auraient peut-être pas été sans cette préoccupation.

Mais si l'on envisage non plus seulement un seul de ces deux stades consécutifs — l'enseignement des Mathématiques spéciales et l'enseignement scientifique supérieur — mais leur succession, une autre voie s'impose pour améliorer le rendement total : celle d'une saine répartition entre eux des sujets enseignés afin d'éviter tout double emploi, toute répétition inutile. Rien n'est plus important à l'heure actuelle, où le temps manque pour l'indispensable, et il y a à cela une utilité d'autant plus évidente que les doubles emplois, en retardant l'enseignement, n'en augmentent pas l'intérêt, bien au contraire. Cette utilité est particulièrement certaine pour l'École Polytechnique où les heures sont parcimonieusement mesurées, et à laquelle les rédacteurs du programme avaient le devoir de penser, puisqu'elle y subordonne son concours d'entrée; mais elle existe pour tout l'enseignement supérieur.

Ce point de vue était parfaitement sauvegardé dans les programmes antérieurs à 1904, ceux que j'ai connus quand j'étais élève. On enseignait en Mathématiques spéciales la Géométrie analytique, l'étude des coniques, la construction des courbes : tout le nécessaire était dit sur ces sujets, sur lesquels ni les grandes Écoles, ni les Facultés n'avaient un mot à ajouter. De même pour la résolution des équations, sur laquelle les cours d'Analyse mathématique n'avaient à revenir que sur certains points parfaitement bien définis, relatifs aux nouveaux moyens d'action que l'Analyse fournit à l'Algèbre. Chaque enseignement avait sa tâche nettement fixée, bien distincte de celle du voisin.

Mais si des détails de cette nature finissent par être impeccablement réglés dans un état de choses fixé depuis de longues années, ils cessent momentanément de l'être lorsqu'il y a transformation et, — n'en déplaise aux esprits simplistes qui concluent de là au rejet de toute évolution, — en 1904, il a fallu évoluer. Depuis ce moment-là, les rôles sont assez mal partagés. L'enseignement supérieur est dans l'aimable situation où se trouveraient les professeurs de nos lycées si les actes I, III et V d'Athalie figuraient au programme de la classe de troisième, les actes II et IV à celui de la classe de seconde.

Il en est ainsi, tout d'abord, pour la plus importante des additions de 1904, la théorie des équations différentielles. Les équations différentielles usuelles du premier ordre (1) sont assurément dans le programme de Mathématiques spéciales, et elles n'y sont point cependant : car le texte du programme est limitatif; il y a ordre de se borner aux types explicitement indiqués; or ceux-ci ne comprennent ni l'équation de Bernoulli, ni celle de Riccati, ni celle de Clairaut. Je ne vois pas trop cependant ce que les règles de calcul relatives à ces équations ont de plus transcendantalement difficile que celles qui concernent l'équation linéaire du premier ordre. Ce qu'il y a de certain, c'est qu'il faut bien que ces

---

(1) Dans l'étude de l'équation linéaire du second ordre, nous avions spécifié : « On admettra sans démonstration que si l'on a une famille de solutions dépendant effectivement de deux paramètres, elle ne peut laisser échapper aucune solution ». Réduction, cette fois, on le voit, et réduction encore inspirée par le même espoir d'obtenir une bonne division du travail entre les divers ordres d'enseignement. Une fois de plus, cet espoir a été déçu.

règles soient enseignées quelque part, et que, par conséquent, il fallait y revenir, ce qui ne pouvait décemment se faire sans rappeler les cas précédemment traités. Tous ceux qui ont eu à s'infliger, et à infliger à leur auditoire, un pareil rappel, savent quelles leçons fastidieuses représente cette redite sur un sujet facile (¹).

Nous avions donc proposé de faire traiter en Mathématiques spéciales tous les types courants d'équations de premier ordre. Nous avons satisfaction sur un point, par l'adjonction des équations homogènes, mais il n'empêche que le sujet n'est pas épuisé [à ce propos, pour se borner aux types explicitement indiqués, sera-t-il permis de parler de $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$?] et devra par conséquent être traité à nouveau; et les esprits chagrins pourront même trouver la situation pire qu'avant, puisque le nombre des cas qui devront être repris tout en étant déjà connus sera augmenté d'une unité.

En Géométrie, la coupure, pour boiteuse qu'elle fût, était tout au moins nettement indiquée : courbure des courbes planes et des courbes gauches en Mathématiques spéciales, torsion dans l'enseignement supérieur. Elle était infiniment moins satisfaisante, il est vrai, pour les enveloppes, puisque (à un point près, je le reconnais, l'arête de rebroussement) la théorie des enveloppes de surfaces doit répéter à peu près textuellement ce qui a été dit à propos des enveloppes planes. Mais nous avions surtout tenu à reporter aux Mathématiques spéciales la théorie du contact. Nous l'avions fait pour une raison assez exactement inverse de celle que la Commission a invoquée pour rejeter notre proposition, à savoir que cette théorie appartient tout à fait à l'esprit des Mathématiques spéciales bien plutôt qu'à celui de l'Enseignement supérieur. Est-il vrai que l'évaluation de l'ordre de la distance entre une courbe

$$f(x, y)=0,$$

et un point voisin doive rester étrangère à l'esprit d'un taupin? S'il en était vraiment ainsi, j'en tirerais une tout autre morale que

(¹) Et si, dans un problème destiné à conduire à une équation linéaire du premier ordre, l'élève adopte une inconnue autre que celle à laquelle pensait l'examinateur et relevant d'une équation de Bernoulli? Cette remarque — qui m'est fournie par un des professeurs de nos lycées — ne suffit-elle pas à juger une organisation aussi illogique des études et des examens?

celle qui nous est opposée : j'estime que cela jugerait sévèrement l'enseignement des Spéciales et que cet enseignement ferait bien mal comprendre les matières dont il traite.

Par contre, nous avions largement élagué sur le terrain de la Mécanique, que l'enseignement supérieur a besoin, de toutes façons, de reprendre intégralement et cela (en ce qui concerne, par exemple, la Dynamique du point) à la lumière de principes forcément masqués au taupin ou tout au moins assez mal assimilés par lui. Cette division du travail n'a pas été acceptée plus que les précédentes; ici encore, tout le monde parlera de tout.

Une heureuse occasion de suppression, dans un programme où tant d'additions auraient été désirables, nous était offerte par la question des *racines commensurables* des équations algébriques. Nous avions saisi cette occasion; la Commission n'a pas cru devoir en faire autant. Dira-t-on, cette fois, qu'il s'agit de se conformer à l'esprit général de l'enseignement des Mathématiques spéciales? On se demande ce que ce Chapitre, reste d'un temps où l'on était à la recherche d'idées et de sujets à proposer à l'activité de l'étudiant, vient faire dans une formation intellectuelle consacrée à la tâche, déjà lourde par elle-même, du développement du sens du continu. Je doute que les ingénieurs réclament cette théorie pour l'appliquer au calcul des tensions de leurs poutres et des puissances de leurs moteurs, celles-ci n'ayant généralement pas la complaisance de se chiffrer par des nombres entiers ou commensurables de tonnes ou de kilowatts. Doit-on en attendre une éducation du raisonnement? La rédaction du programme (conforme d'ailleurs à celle de 1904) nous l'interdit, puisqu'elle spécifie qu'on s'en tiendra à la considération des termes extrêmes de l'équation, c'est-à-dire que l'idée maîtresse et féconde, celle qui montrait dans l'arithmétique autre chose qu'une suite de menus artifices, est expressément écartée. Le programme de 1904 (puisque c'est à lui que remonte cette rédaction) croyait sans doute corriger ainsi l'erreur qu'il commettait en gardant trace de cette question : nous avions estimé que, au contraire, il l'aggravait et que, ne pouvant faire comprendre la raison véritable et intime du fait, il était bien simple et parfaitement indiqué de n'en rien dire du tout.

III.

Je ne sais si les rédacteurs du programme ont longuement étudié cette partie de nos propositions. Il semble en tout cas qu'à d'autres occasions, le rejet qu'elle leur a opposé ait été un peu bien sommaire.

Voici un cas où nous aurions attendu quelques explications parce que, pour ma part au moins, je me demande encore quelles objections pouvaient survenir et quelles raisons ont pu dicter la décision. C'est en quelque sorte par hasard que j'ai été conduit (car j'avoue, cette fois, mon amour-propre d'auteur) à proposer à mes collègues l'addition suivante :

« Les formes indéterminées, dans le cas de fonctions de plusieurs variables n'ont pas, en général, de vraie valeur. »

Six mois plus tôt, je n'aurais pas parlé de cela, car je n'y avais jamais pensé; et évidemment, on n'en avait jamais parlé parce qu'on n'y avait jamais pensé.

C'est l'histoire du banc qui était resté interdit jusqu'en 1848, parce que fraîchement peint en 1830.

La Commission n'a pas pu juger que la question ne valait pas d'être résolue et qu'il n'est pas utile qu'on puisse y répondre lorsqu'elle se présente. Elle n'a pas pu davantage objecter sa difficulté ou le temps qu'elle prend, puisqu'il suffit de remarquer que la vraie valeur ne saurait exister si, pour la courbe $f + kg = 0$, le point considéré est (k étant quelconque) autre chose qu'un point isolé. Elle perpétue cependant — de propos délibéré ou par simple oubli, je ne sais, — une ignorance si aisée à détruire d'un mot.

Ce point n'est pas le seul qui ait été traité par prétérition. La rédaction officielle ne dit rien de la formule, si controversée au point de vue pédagogique,

$$f''_{xy} = f''_{yx}$$

Elle a une histoire assez tourmentée, cette formule. De mon temps, en 1884, on ne l'enseignait pas (hors le cas des polynomes).

Quand j'étais examinateur, en 1910-11, on la demandait. Ces temps derniers, elle était de nouveau admise sans démonstration. C'est assez dire qu'il y a, à son introduction dans le programme, du pour et du contre. Nous avions eu pourtant, pour la rétablir, un motif positif : certains examinateurs avaient remarqué que, en l'absence de démonstration, nombre de candidats ne comprenaient pas correctement le sens, — particulièrement le degré de généralité, — du théorème : danger dont il faut évidemment toujours se méfier en pareil cas (¹).

En parlera-t-on, maintenant? Le programme ne dit ni oui, ni non; et cependant, il paraît difficile de ranger cette question au nombre de celles pour lesquelles il note qu'une pratique de vingt années a rendu toute erreur d'interprétation impossible, puisque, précisément, c'est une de celles au sujet desquelles les idées ont plusieurs fois varié.

Dans un texte qui régit tout le recrutement de l'enseignement supérieur et des grandes Écoles scientifiques, il n'est point de détail qui ne demande à être mûrement examiné et clairement formulé; et le point qui précède est, l'on en conviendra, un peu plus qu'un détail.

Voici maintenant qui est un détail, je le reconnais, mais qui, en cette qualité même, méritait peut-être d'être accepté. Quel mal faisait, s'il vous plaît, la note suivante ajoutée à propos de la construction des courbes : « On fera remarquer la différence entre la question de construction qualitative ainsi principalement étudiée et une question de construction précise, comme celle qui est posée dans les épures de géométrie descriptive, en faisant ressortir que la première ne distingue pas essentiellement entre une ellipse et l'une des formes de l'ovale de Cassini, ou entre un folium

(¹) Au reste, la seule objection qui puisse s'opposer à l'introduction de cette démonstration dans les programmes est-elle bien justifiée? Je reconnais qu'il faut se rappeler son point de départ, et ne point se tromper sur le moment où l'on doit appliquer la formule des accroissements finis. Mais la principale difficulté consiste, on le sait, à ne pas oublier que la quantité classique θ qui figure dans cette formule est variable, et d'une manière inconnue, avec toutes les données de la question. Est-ce inconvénient cela, ou avantage? Faut-il éviter de traiter une question parce qu'elle force l'élève à ne pas interpréter à faux les résultats qui lui ont été démontrés; ou ne serait-ce pas là une raison pour la maintenir à toute force dans l'enseignement?

de Descartes et une strophoïde droite ? » J'aurais bien voulu le demander aux Membres de la Commission. Je sais, moi, et certains d'entre eux savaient comme moi quelle utilité elle pouvait avoir : car c'est l'expérience qui a parfois révélé, non pas même chez les élèves, mais chez les futurs maîtres, — chez les agrégés des Sciences mathématiques, — une extraordinaire inintelligence de la nature de la question. Avouez, lecteur, que pour un détail, celui-là est vraiment significatif. Ne vous a-t-on pas appris, comme à moi, qu'il y avait quelque importance à savoir toujours en quoi consiste exactement le problème que l'on se pose? Pour ma part, les années qui ont passé sur ma tête n'ont pas renversé mes idées sur ce point : elles m'ont plutôt convaincu, chaque jour plus fermement, que si nous ne donnions que cette leçon-là à nos élèves, dans nos Lycées et même dans nos grandes Écoles, ce serait déjà beaucoup, et que, par contre, en son absence, tout le savoir que nous pourrions leur inculqner par ailleurs ne vaudrait peut-être pas la peine nécessaire à son acquisition. Cela se dit beaucoup, encore aujourd'hui. Est-ce que la Commission aurait entendu dire que « nous avons changé tout cela » ?

Je ne veux pas l'en soupçonner. Comme je ne vois dans notre texte ni idée transcendante, ni allongement sérieux du cours, ni surmenage de quelque ordre que ce soit imposé aux candidats, je préfère me demander si l'absence de ce passage dans le programme définitif ne provient pas de ce qu'on a oublié de le lire.

Dans la Théorie des séries entières, notre projet introduisait franchement la notion de séries uniformément convergentes, qui fournit à cet égard les démonstrations les plus simples et les plus intuitives de toutes [1].

---

[1] Quant à la *formule* de Taylor, nous avions proposé, conformément à une heureuse suggestion de M. Paul Lévy, de la rattacher à la recherche d'une fonction dont la dérivée $n^{\text{ième}}$ est donnée, pendant que les valeurs numériques des dérivées précédentes et de la fonction elle-même sont données pour $x = x_0$. Cette idée n'a pas été, elle non plus, prise en considération. Le lecteur estimera peut-être avec nous qu'il y avait quelque avantage à faire dépendre la formule en question des grands principes qui dirigent depuis Cauchy la marche de l'analyse et qui fournissent une démonstration parfaitement claire et naturelle (elles ne le sont pas toutes) du théorème.

En réalité, pour des raisons que je me propose de faire ressortir à une autre

Je venais de prendre connaissance du programme élaboré par la Commission lorsque j'eus l'occasion d'en parler avec un de mes camarades et amis, qui est un de nos professeurs de Mathématiques spéciales les plus réputés.

« Eh bien oui, me dit-il, j'enseigne les séries entières à l'aide de l'uniforme convergence; je ne vois pas de raison pour ne pas faire connaître à nos élèves, dans l'étude de cette question, la méthode même par laquelle elle sera traitée lorsqu'on y reviendra dans la suite. »

Ce professeur était, on le voit, animé du plus déplorable esprit; et il aggrave terriblement son cas en réussissant brillamment dans son enseignement et faisant recevoir chaque année à l'École Polytechnique un respectable contingent d'élèves. Grâce à lui, par conséquent, on a, chaque année, le fâcheux exemple de jeunes gens, d'assez nombreux jeunes gens, qui sont dispensés d'apprendre deux démonstrations pour le même théorème et, après avoir vu une question par un bout, ne sont pas obligés de la reprendre par l'autre.

Tout en étant tentés de croire avec lui que la notion d'uniforme convergence n'est pas d'une transcendance inaccessible à la classe de Mathématiques spéciales, nous admettions, quant à nous, qu'il peut y avoir là matière à discussion. Ce que nous voulions délibérément, c'est éviter les calculs pénibles (parce que sans idée directrice simple et claire) auxquels donnent le plus souvent lieu des démonstrations de continuité et de dérivabilité (1) dans les cours

---

occasion, l'hésitation n'est pas permise : une méthode fondée sur l'intégration est seule conforme à la nature des choses et doit être préférée à toute autre.

A ce propos, ne pourrait-on se décider un jour à supprimer la dénomination de « série de Maclaurin »? Maclaurin lui-même n'a jamais prétendu avoir écrit une formule nouvelle; et l'on irait loin, n'est-il pas vrai, si l'on se mettait à donner à chacune des formules mathématiques classiques deux noms différents, suivant que l'un des paramètres qui y figurent a la valeur zéro ou une autre.

(1) En réalité [Voir *Sur la théorie des séries entières* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, mars 1926, p. 161)], ces démonstrations peuvent être rendues aussi simples, aussi intuitives qu'on peut le désirer par la notion de série majorante, que l'on ne saurait raisonnablement taxer d'abstraction excessive. Toute la question, au point de vue pédagogique, est de savoir si l'on prononcera les mots de « série majorante ». Pour ma part, la réponse ne me paraît pas douteuse, attendu qu'il conviendrait d'introduire cette locution dès le début du chapitre consacré aux séries, qu'elle domine et éclaire d'un bout à l'autre.

d'où est écartée la notion de série uniformément convergente (ainsi que, bien entendu, celle de série multiple). Dès lors, à défaut de la réforme qui avait nos préférences, nous proposions d'établir ici encore une division nette du travail entre le secondaire et le supérieur et d'admettre purement et simplement, sans démonstration, les théorèmes de continuité et de dérivabilité des séries entières.

La Commission a adopté cette seconde solution. Nous avons donc, sur ce point, satisfaction partielle, et, du coup, on a gagné un allégement du programme, ce qui n'est jamais à dédaigner.

Le programme comporte, et le rapport note quelques additions, forcément minimes (surtout étant donné que les soustractions demandées par nous n'ont pas été effectuées). Elles sont en général les bienvenues. Outre l'intégration de l'équation homogène du premier ordre, dont il a été question plus haut, il y a la série de Taylor pour les fonctions de plusieurs variables (¹), qui permettra une légère économie — et l'on dit qu'il n'en est pas de petites — sur les cours d'Analyse; la transformation des équations par substitution portant sur une seule racine (pourquoi même une seule? Les notions relatives à la transformation sont si étroitement attachées à l'idée même d'équation algébrique qu'on ne saurait posséder et comprendre bien celle-ci sans l'intelligence claire de celles-là; et la question de transformation portant sur deux racines est profondément éducative par la solution étrangère qu'elle introduit et qu'il faut éliminer); la résolution d'une équation par approximations successives.

Pourquoi faut-il que, même en cet endroit, la mauvaise fée soit revenue et qu'on y voie encore sous un jour cru combien nous avons peu la même façon de comprendre les choses? Avant même les additions que je viens de nommer, le rapport tient à en citer

(¹) Mais, sachant trouver la tangente en un point simple quelconque d'une courbe, il est entendu que les tangentes en un point multiple ne sont recherchées que si ce point est l'origine des coordonnées. Alors, si un point multiple est autre que l'origine, sera-t-il interdit d'y transporter celle-ci et d'écrire le résultat de ce calcul à l'aide de la série de Taylor (comme on le faisait de mon temps, sans même, je crois, que cette série fût au programme pour plusieurs variables)? J'espère que non; mais le nouveau programme, — comme celui qu'il remplace, d'ailleurs, — est peu clair sur ce point.

une autre, et celle-là je vous la donne en mille. Ne cherchez pas : on est désormais assuré que les élèves de toutes les classes de Spéciales de France sauront prendre la *dérivée $n^{ième}$ d'un produit.*

Y avait-il là un vieux taupin de quatrième année, ou serait-il arrivé que l'un d'entre eux, scandalisé de voir oublier une formule aussi sublime et sacramentelle à ses yeux, aura réussi à la glisser subrepticement dans le texte final ? C'est évidemment peu probable, et cependant, avouez que l'idée s'impose à la lecture de ce passage. Ce ne seront certes pas les ingénieurs qui auront insisté dans ce sens : le calcul des dérivées trentièmes présente pour eux le même genre d'intérêt palpitant que la recherche des racines commensurables. Alors, est-ce là formation de l'esprit? Et compte-t-on là-dessus pour éclairer quelque notion scientifique importante?

Il faut bien que j'insiste là-dessus, puisque, à toutes les occasions se manifeste ainsi, dans le texte qui a triomphé, l'encouragement à la tendance même contre laquelle, de l'avis unanime, il est le plus indispensable de lutter et dont les effets désastreux se font le plus sentir dans toutes les manifestations de l'activité nationale où intervient une préparation mathématique approfondie : l'abus des règles mécaniques aux dépens du bon sens et de la réflexion. Il n'en faut pas douter : les rédacteurs du programme l'ont voulu ainsi, et cette étrange conception de la formation intellectuelle est bien arrêtée chez eux.

Ici se termine cette revue, que je m'excuse d'avoir faite si longue. Voici accomplie une de ces petites révolutions en miniature que sont les réformes de programmes, et dont on voudrait faire autant que possible l'économie en faisant donner à chacune d'elles tout son rendement utile. Celle-là était ardemment appelée en une heure si grave pour le pays, et en une matière qui touche à la vie nationale par tant de côtés. Si j'ai laissé transparaître l'opinion que le rendement me paraît médiocre ([1]), et la besogne,

([1]) Encore n'a-t-il été question que du programme de mathématiques, le seul dont je sois qualifié pour parler. Il y en aurait long à dire sur le programme de Physique que la routine d'une partie du corps enseignant, à laquelle la Commission n'a pu résister, a marqué d'une regrettable empreinte.

au total, peu heureuse, espérons que je me trompe, et que cela signifie tout simplement qu'on a fait autre chose que ce que nous désirions.

En tout cas, puisque le programme n'en a gardé aucune trace, peut-être convenait-il de faire connaître les idées qui nous avaient inspirés et de les soumettre au jugement du public scientifique.

P.-S. — Hélas! Il était dit que ce nouveau programme n'avait pas fini de me réserver des surprises. L'ancien indiquait, comme quadratures élémentaires, « les différentielles rationnelles et celles qui s'y ramènent ». Dans notre projet, après avoir précisé qu'il s'agissait de différentielles en e^x, $\sin x$, $\cos x$, nous ajoutions :

« Intégration des fonctions trigonométriques entières par transformation des produits en sommes. Application des fonctions trigonométriques ou hyperboliques à l'intégration de certaines fonctions rationnelles de x, ou de x et d'un radical du second degré ramené à l'une des formes $\sqrt{1+x^2}$, $\sqrt{1-x^2}$, $\sqrt{x^2-1}$ ».

Notre motif? Tout simplement qu'il s'agit de méthodes de calcul destinées á être mise en pratique, que celles-là sont les meilleures dans les cas indiqués et que les « taupins » ont d'habitude, sur les plus classiques d'entre elles, une ignorance des plus regrettables. Il me semble que cela est suffisant pour légitimer cette addition et même le fait d'entrer un peu dans le détail.

Or les rédacteurs du programme nomment, ainsi que nous le faisions, les différentielles exponentielles et trigonométriques, mais ils les nomment comme étant celles qui doivent se ramener aux différentielles rationnelles; et c'est tout. Non seulement ils ne disent pas un mot des méthodes sur lesquelles nous insistions; mais, comme on le voit, ils suggèrent assez nettement l'idée contraire.

Ne leur en déplaise, nous savions ce que nous faisions (et le pluriel est tout particulièrement de mise sur ce point). C'est l'expérience, encore une fois, qui montre combien les candidats connaissent mal l'intégration directe des fonctions trigonométriques : encore la paresse d'esprit, l'automatisme qui préfère les calculs interminables, avec les chances d'erreurs graves qu'ils introduisent, à un appel au bon sens. Nous savions, et je soutiens sans crainte d'être sérieusement contredit, que, si l'on veut essayer d'empêcher les taupins d'introduire la variable $\tang \frac{x}{2}$ lorsqu'il s'agit de calculer $\int \sin^2 x \, dx$, ce n'est pas trop de le dire nettement et avec insistance; et même qu'on peut leur apprendre, par la même occasion, à faire un changement de variables trigonométrique pour intégrer la fameuse différentielle $\frac{dx}{(1 + x^2)^n}$ sans s'engager dans le dédale des intégrations par parties.