NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats de mathématiques générales

Nouvelles annales de mathématiques 6e série, tome 1 (1925), p. 248-252

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__248_1>

CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

C. 60. — ÉPREUVE THÉORIQUE. (*Mécanique*). — *Un point matériel* M, *de masse* m, *se déplace sans frottement sur une droite horizontale* Ox; *il est attaché à une extrémité d'un fil élastique de longueur naturelle* l, *qui, après avoir passé dans un petit anneau situé en* O, *a son autre extrémité fixée en un point situé sur la verticale de* O, *à une distance de ce point égale à* l, *On admet que le fil exerce sur le point* M *une force proportionnelle à son allongement, c'est-à-dire égale à* $m.k^2.\overline{\mathrm{MO}}$ (*k étant un coefficient numérique supposé connu*).

Le point M *est soumis en plus, de la part de l'air, à une résistance proportionnelle à la vitesse et dirigée en sens contraire, égale à* $m.\mu.v$ (*μ étant un coefficient numérique*, très petit par rapport à k).

On lâche le point sans vitesse initiale en un point M_0 *d'abscisse* x_0 *positive.*

1° *Étudier le mouvement. — Montrer qu'il se compose d'oscillations isochrones dont l'amplitude décroît en progression géométrique.*

2° *Dans une expérience réalisant ces conditions, on a trouvé qu'au bout de* 1800 *oscillations simples, l'amplitude se trouvait réduite aux* $\frac{2}{3}$ *de sa valeur initiale. Calculer le rapport entre la durée d'une oscillation simple dans ces conditions et la durée d'une même oscillation simple s'il n'y avait pas résistance de l'air.*

3° *Dans une deuxième expérience, le fil se rompt au moment où le point* M *passe en* O *pour la première fois; quel sera le mouvement ultérieur du point* M *sous l'action de la seule résistance de l'air.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On considère la fonction*

$$y = \frac{[2\mathrm{M} + \log x]^2}{x}$$

(*où les logarithmes sont des logarithmes vulgaires et où*

$$\mathrm{M} = \log e = 0,43429).$$

1° *Indiquer sommairement les variations de la fonction* y.

2° *Représenter sur papier millimétrique, de façon aussi exacte que possible, la partie de la courbe représentative correspondant à* $0,1 < x < 1,1$ *en en calculant les ordonnées pour des valeurs de* x *variant de dixième en dixième.*

On prendra 10^{cm} *pour représenter l'unité de longueur en abscisses et* 20^{cm} *pour l'unité d'ordonnée.*

3° *Évaluer par une méthode approchée au choix du candidat l'aire comprise entre cette courbe, l'axe des* x *et les droites* $x = 0,1$ *et* $x = 1,1$.

Comparer le résultat obtenu avec le calcul direct de l'intégrale définie

$$\int_{0,1}^{1,1} \frac{[2\mathrm{M} + \log x]^2}{x}\, dx.$$

(Strasbourg, juin 1922.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Courbure en un point d'une surface d'une section plane de cette surface. Étudier comment elle varie : 1° quand la section tourne autour d'une tangente donnée à la surface; 2° quand elle tourne autour de la normale.*

II. *Soit l'équation*

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \qquad (n \text{ entier positif}).$$

1° *Montrer qu'elle admet comme solution particulière un certain polynome* $\mathrm{P}(x)$ *de degré* n.

2° *Montrer que le changement d'inconnue* $y = z\mathrm{P}(x)$ *conduit à une équation en* z *qui s'intègre par deux quadratures de fonctions rationnelles.*

3° *Effectuer les calculs pour* $n = 1$.

Indication sur la solution de II. — La détermination de la solution particulière P se fait en substituant un polynome de degré n.

La transformation en z donne une équation linéaire ne contenant pas z parce que P est une solution. z' est une intégrale de

$$(1 - x^2)\mathrm{P}u' + [2(1 - x^2)\mathrm{P}' - 2x\mathrm{P}]u = 0,$$

donnant

$$\frac{u'}{u} = \frac{2x}{1-x^2} - \frac{2P'}{P},$$

donc z' fraction rationnelle de x.

Épreuve pratique. — *Sur la parabole*

$$y^2 = 2px$$

se meut sans frottement un point non pesant attiré par le foyer en raison inverse du carré de la distance. Soit T *la période du mouvement limité aux points ayant une abscisse* x_0 *donnée,* T_0 *celle des très petits mouvements :*

1° *Calculer* $\frac{T}{T_0}$ *en fonction de* $\frac{x_0}{p}$*; variation;*

2° *Déterminer* $\frac{x_0}{p}$ *sachant* $\frac{T}{T_0} = 2$.

Indications sur la solution. — L'équation du mouvement est donnée par l'intégrale des forces vives

$$m(x'^2 + y'^2) = \frac{mk^2}{r} + h = \frac{mk^2(r_0 - r)}{rr_0},$$

r s'exprime en fonction de x par la propriété de la directrice et y'^2 en fonction de x' et x par l'équation, on a ainsi l'équation en x qui en faisant $\frac{x}{p} = u$ donne l'équation en u

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \frac{8k^2}{p^2}\,\frac{(u_0 - u)u}{(2u_0+1)(2u+1)^2}.$$

Dans un quart d'oscillation u varie de zéro à u_0, donc

$$T = 4\sqrt{2u_0+1}\sqrt{\frac{p^3}{8k^2}}\int_0^{u_0}\frac{(2u+1)\,du}{\sqrt{(u_0-u)u}}.$$

Intégrale définie d'un calcul classique qui donne T en fonction de u_0 et donne T_0 quand u_0 tend vers zéro.

(Bordeaux, novembre 1924.)

Épreuve théorique. — I. *Rayon de convergence d'une série entière. Comme exemple on calculera le rayon de convergence de la série*

$$u_n = \left(\frac{nx}{n-1}\right)^n,$$

et l'on cherchera sa nature sur le cercle de convergence.

II. *Soit, dans un plan vertical, un arc de cercle matériel* AB *dont tous les points sont plus bas que* A. *Sur cette courbe se meut sans frottement un point pesant* M *parti de* A *sans vitesse. En* B *ce point devient libre (parce que la courbe matérielle n'existe plus).*

1° *Montrer que la parabole qu'il décrit alors a pour directrice l'horizontale de* A.

2° AB *est un arc de cercle de rayon a,* A *est sur l'horizontale du centre* O *et* $\widehat{AOB} = \pi - \alpha$, *$\alpha$ étant un angle donné compris entre* O *et* π. *On demande l'équation de la parabole, les coordonnées de son sommet, le lieu de ce sommet quand α varie de* O *à* $\frac{\pi}{2}$.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — 1° h étant la distance verticale de A et B le mobile arrive en B avec la vitesse $\sqrt{2gh}$ qui est la vitesse initiale sur la parabole. Or on sait ou on démontre immédiatement que la directrice d'une parabole de chute a pour directrice une horizontale située à la distance $\frac{v^2}{2g}$ au-dessus du point de départ; cette distance étant précisément h, la propriété annoncée est démontrée.

2° Prenant comme axes le diamètre horizontal et le diamètre vertical descendant, l'équation de la parabole est

$$y = a\sin\alpha - \frac{(x + a\cos\alpha)\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{(x + a\cos\alpha)^2}{4a\sin^3\alpha}.$$

Les coordonnées du sommet sont

$$a\cos\alpha(2\sin^2\alpha - 1), \qquad a\sin^3\alpha$$

et ces formules définissent le lieu demandé.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Soit la surface*

$$z = x\,\mathrm{sh}\,y.$$

1° *Calculer les angles que fait avec les axes* Ox, Oy, Oz *la normale à cette surface en un point. Vérifier que le long d'une courbe $x =$ const. l'angle avec Oy est constant.*

2° *Soit Σ la portion de cette surface qui a pour projection sur le plan des xy l'intérieur du rectangle limité par les droites*

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad x = a, \qquad y = b \qquad (a > 0, b > 0).$$

La densité de surface de Σ étant constante, calculer les coordonnées ξ, η, ζ du centre de gravité de Σ.

3° *Calculer numériquement ξ, η, ζ pour $a = b = 1$.*

4° *Lieu géométrique du centre de gravité quand a varie, b restant constant.*

Nota. — *On sait que*

$$\operatorname{sh} y = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}), \qquad \operatorname{ch} y = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}),$$
$$\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1.$$

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — Les cosinus directeurs de la normale sont

$$\frac{\operatorname{sh} y}{\sqrt{1+x^2}\operatorname{ch} y}, \quad \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}\operatorname{ch} y};$$

le second ne dépend que de x, d'où la propriété de la première partie. La surface de l'élément qui se projette suivant le rectangle élémentaire dx, dy est

$$\sqrt{1+x^2}\operatorname{ch} y\, dx\, dy.$$

Prenant la densité superficielle égale à l'unité on a pour M, $M\xi$, $M\eta$ et $M\zeta$ quatre intégrales doubles de la forme

$$\int\int F(x)\,\Phi(y)\,dx\,dy$$

étendues au rectangle indiqué dans l'énoncé, intégrales qui se ramènent à des produits d'intégrales simples

$$\int_0^a F(x)\,dx \int_0^b \Phi(y)\,dy;$$

ces intégrales simples se calculent d'ailleurs facilement en tenant compte des propriétés connues des fonctions hyperboliques.

(Bordeaux, novembre 1924.)