NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PIERRE DANEL

# Sur une propriété caractéristique du mouvement de La Hire

*Nouvelles annales de mathématiques 6e série*, tome 1 (1925), p. 165-168

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1925_6_1__165_0>

[$O^1 8a$]

# SUR UNE PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DU MOUVEMENT DE LA HIRE;

PAR PIERRE DANEL,
Élève à l'École Centrale des Arts et Manufactures.

1. Appelons *mouvement fermé* un mouvement qui ramène une figure à sa position initiale. Dans un mouvement fermé, les trajectoires des points de la figure mobile sont en général des courbes fermées, et chaque point ne passe qu'une seule fois par un point de sa trajectoire. Il peut y avoir exception pour certains points qui décrivent des arcs de courbe *ouverts*, parcourus une ou plusieurs fois dans chaque sens, si bien qu'un tel point passe deux ou plusieurs fois, pour des positions différentes de la figure mobile, par chaque point de sa trajectoire (les extrémités de celle-ci mises à part). Par exemple, si l'on définit un mouvement plan par la condition que deux points de la figure mobile restent chacun sur une courbe donnée, ces deux points ne pourront, en général, qu'osciller sur des arcs finis des courbes correspondantes, et la circonstance signalée se présentera pour eux.

Peut-elle se présenter pour plus de deux points? Oui, comme le montre l'exemple d'un mouvement bien connu, le *mouvement de La Hire*, engendré par le roulement d'un cercle à l'intérieur d'un cercle de rayon double. On sait que, dans ce mouvement, les points de la figure mobile décrivent des ellipses, sauf ceux du cercle roulant qui décrivent tous des diamètres du cercle de base. Chacun d'eux passe deux fois par chaque point de sa trajectoire (exception faite des extrémités de celle-ci).

On peut se demander s'il existe d'autres mouvements fermés dans lesquels tous les points d'une courbe de la figure mobile ont des *trajectoires doubles*. L'étude de ce problème conduit, comme je vais le montrer, à une conclusion négative.

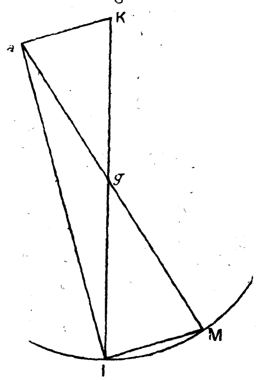
2. Soit M un point à trajectoire double. Quand M est en l'un des points d'arrêt de sa trajectoire, il est centre instantané de rota-

tion, puisque sa vitesse ne peut changer de signe sans s'annuler. *Par conséquent, tous les points à trajectoire double sont sur la roulante.* S'il existe dans la figure mobile une courbe dont tous les points aient des trajectoires doubles, ce ne peut être que la roulante.

En général, les trajectoires des points de la roulante ont des points de rebroussement sur la base. Pour que ces trajectoires soient doubles, il faut que ces points de rebroussement soient de deuxième espèce, c'est-à-dire aient la concavité de chacune de leurs branches dirigée dans le même sens. On verra plus loin dans quel cas cette condition est réalisée.

3. *Lemme.* — Soit $g$ le centre de courbure en un point I d'une courbe C (*fig.* 1). Soit M un point voisin du point I sur cette

Fig. 1.

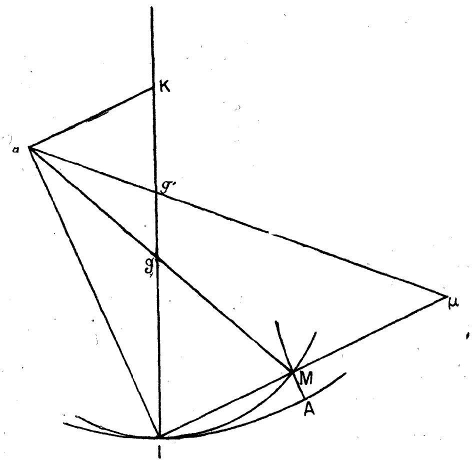



courbe. La perpendiculaire en I à IM rencontre $g$M en un point $a$, la parallèle à IM menée par $a$ coupe I$g$ en K. *Quand* M *tend vers* I, K *tend vers la position symétrique de* I *par rapport à* $g$. En effet, soit $e$ l'angle de IM avec la tangente en I, l'angle de cette tangente avec la tangente en M sera équivalent à $2e$. L'angle $ag$K est donc équivalent au double de l'angle $a$IK, et $ag$ est équivalent à $g$I, ce qui démontre la proposition.

4. La construction d'Euler-Savary permet de trouver le sens de la concavité de la trajectoire d'un point M de la roulante, au voisinage du point A où il atteint la base.

Soient $g$ (*fig.* 2) le centre de courbure de la roulante, $g'$ le centre de courbure de la base. Le centre de courbure $\mu$ en M de la trajectoire de ce point se trouve, en vertu de la construction pré-

Fig. 2.




citée, à l'intersection de IM et de $ag'$. Le point $\mu$ est intérieur ou extérieur au segment IM suivant l'ordre des points $g'$, I, $g$, K. Cet ordre subsiste en général de part et d'autre du point A considéré. Si donc on construit le centre de courbure de deux points voisins de A et sur chacune des branches de la trajectoire, on constate qu'en général le point de rebroussement est de première espèce. Le contraire ne peut avoir lieu que si, pour le point de contact considéré, $g'$ vient se confondre avec I, $g$ ou K. Alors le point de rebroussement pourra être de deuxième espèce.

Pour que les trajectoires de tous les points de la roulante aient des points de rebroussement de deuxième espèce, le point $g'$ ne pouvant pas être constamment confondu avec I ou $g$, il faut que $g'$ soit constamment confondu avec K, c'est-à-dire, d'après le lemme du n° 3, que le rayon de courbure de la roulante soit moitié de celui de la base au point correspondant de celle-ci.

5. On connaît le théorème : *Étant donné un mouvement plan fermé, le lieu des points du plan mobile qui décrivent des tra-*

*jectoires limitant une aire donnée est un cercle* (1). Or les points de la roulante décrivent des trajectoires qui, étant doubles, limitent des aires nulles. La roulante est donc un cercle, et, d'après le n° 4, la base est un cercle de rayon double.

Il n'y a donc pas d'autres mouvements que le mouvement de La Hire tels que tous les points d'une courbe de la figure mobile aient des trajectoires doubles.