G. CERF

Une remarque sur la théorie des groupes finis

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 58-59
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__58_0>

[J4]

UNE REMARQUE SUR LA THÉORIE DES GROUPES FINIS;

PAR G. CERF
(Strasbourg).

Quand on étudie les groupes de transformations à un paramètre dont les opérations sont deux à deux inverses l'une de l'autre, on peut, tout au début, présenter une remarque susceptible de rendre quelque service. Nous allons le faire pour l'espace ordinaire; mais des considérations toutes pareilles peuvent servir dans un espace à un nombre quelconque de dimensions.

Soit une famille de transformations S dépendant d'un paramètre t et définies par les relations

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = f(x, y, z; t), \\ y' = g(x, y, z; t), \\ z' = h(x, y, z; t). \end{cases}$$

Nous supposons que la famille contient la transformation identique. Lorsque t varie, à tout point M, de coordonnées x, y, z, les relations (1) font correspondre les points d'une courbe C_M, la trajectoire de M, passant par M et lieu des points déduits de M par les transformations S. L'ensemble des courbes C_M forme généralement un complexe. Nous allons montrer que *dans le cas où les équations* (1) *définissent un groupe contenant des transformations deux à deux inverses l'une de l'autre, et par conséquent comprenant la transformation identique, les courbes* C_M *forment une congruence et non un complexe.*

Nous nous appuierons pour cela sur les deux observations suivantes :

a. Si C_M passe en M', C_M passe en M : car si la transformation S permet de passer de M en M', la transformation S^{-1}, qui appartient au groupe, permet de passer de M' en M.

b. Soient S une transformation quelconque du groupe et $M' = S(M)$; M_1 un point quelconque de C_M et S_1 la transformation qui permet de passer de M en M_1 :

$$M_1 = S_1(M)$$

on peut passer de M_1 en M' par une transformation du groupe, car $M' = S(M) = (SS_1^{-1})S_1(M) = (SS_1^{-1})(M_1)$ et SS_1^{-1} appartient au groupe ; C_{M_1} passe par M'.

Cela pose, la proposition que nous avons en vue est aisée à démontrer :

C_{M_1} passant par M', C_M passe par M_1, et M_1 étant un point quelconque de C_M, C_M coïncide avec C_M.

Les trajectoires des points de C_M sont donc toutes confondues avec C_M puisque M' est un point quelconque de C_M; et comme, d'autre part, d'après *a*, les trajectoires passant par M ne peuvent être que celles des points de C_M, il en résulte que par M, point quelconque de l'espace, ne passe qu'une courbe de la famille considérée : celle-ci constitue donc bien une congruence et non un complexe.