NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats de mécanique rationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 392-395
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__392_0>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Un système* sans frottement *peut se mouvoir dans un plan vertical fixe* xOy *sous la seule action de la pesanteur. Ce système est constitué* par un disque circulaire homogène *de rayon* R, *de masse* M, *assujetti à rester en contact avec l'horizontal* Ox, *en même temps que* par une tige rectiligne homogène AB, *de longueur* $2l$, *de masse* M′, *qui s'appuie sur la circonférence du disque, à laquelle elle est tangente, tandis que l'extrémité* A *de cette tige glisse sur* Ox.

1° *En se plaçant dans un intervalle de temps où ces liaisons sont simultanément réalisées, former et discuter les équations différentielles qui déterminent en fonction du temps les trois paramètres*

$$\overline{OA} = x, \qquad \left(\widehat{Ax, AB}\right) = \theta, \qquad \left(\widehat{Ax, CD}\right) = \varphi,$$

C *désignant le centre du disque et* CD *un rayon marqué sur le disque.*

2° *Calculer les réactions de* Ox *sur la tige et sur le disque.*

3° *On fixe brusquement l'extrémité* A *de la tige. Trouver le nouvel état des vitesses du système après le choc ainsi produit.* (4 heures.)

(Poitiers, novembre 1924.)

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Déterminer analytiquement et géométriquement le mouvement du trièdre trirectangle* $Oxyz$ *autour de son sommet* O, *sachant que son arête* Oz *fait un angle constant* $\theta = \alpha$ *avec la verticale ascendante* Oz_1 ; *que la rotation instantanée* $\vec{\Omega}$ *est située dans le plan* xOy *et fait avec* Ox *un angle égal à* λt, *où* λ *désigne un coef-*

ficient constant. Le plan zOz_1 ayant tourné de quatre droits autour de la verticale, montrer que la position finale de $Oxyz$ est distincte de sa position initiale. Évaluer, en fonction de α, l'amplitude de la rotation qui fait passer d'une position à l'autre. (2 heures.)

(Novembre 1924.)

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. ÉPREUVE THÉORIQUE. — La force vive a pour expression

$$2T = M\left[\left(x' - \frac{R\theta'}{1-\cos\theta}\right)^2 + \frac{R^2}{2}\varphi'^2\right] + M'\left(x'^2 - 2lx'\theta'\sin\theta + \frac{4}{3}l^2\theta'^2\right)$$

tandis que la fonction de forces est

$$U = -M'gl\sin\theta.$$

Les équations de Lagrange relatives aux paramètres φ et x (qui expriment respectivement le théorème du moment cinetique pour le mouvement du disque autour de son centre, et le théorème du mouvement du centre barre-disque en projection horizontale) donnent les intégrales premières

$$\varphi' = \varphi'_0,$$

$$M\left(x' - \frac{R\theta'}{1-\cos\theta}\right) + M'(x' - l\theta'\sin\theta) = K,$$

qu'on peut adjoindre, pour déterminer le mouvement, à l'intégrale des forces vives $2T = 2U + h$. En éliminant x' et φ', on obtient, pour définir le paramètre principal θ, l'équation

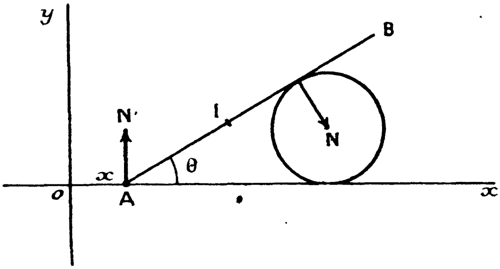
$$\left\{\frac{M}{M+M'}\left[\sin\theta - \frac{R}{l(1-\cos\theta)}\right]^2 + \cos^2\theta + \frac{1}{3}\right\}\theta'^2 = h - 2\frac{g}{l}\sin\theta$$

dont la discussion rappelle celle d'un mouvement pendulaire.

Pour effectuer les calculs des forces de liaison, employer de préférence les théorèmes généraux. On évalue d'abord la pression de la tige sur le disque, soient $N\sin\theta$ et $-N\cos\theta$ ses composantes. Alors $N\sin\theta = Mx''$; la réaction de Ox sur le disque est $N\cos\theta$. Enfin, si l'on applique au mouvement de la tige le théorème du moment cinétique par rapport à son milieu I, il vient

$$N\left(l - R\cot\frac{\theta}{2}\right) - l\cos\theta\, N' = \frac{M l^2}{3}\theta''.$$

Enfin, une fixation brusque de l'extrémité de la tige introduit une liaison persistante exprimée par $x = \text{const}$.



La méthode analytique donne alors deux équations exprimant l'invariance de $\frac{\partial T}{\partial \varphi'}$ et $\frac{\partial T}{\partial \theta'}$. La vitesse angulaire φ' n'est pas altérée. Quant à θ', elle prend une valeur θ'_1 définie par l'équation

$$M\left(x' - \frac{R\theta'}{1-\cos\theta}\right) + M'(x' - l\theta'\sin\theta)$$
$$+ \theta'_1\left(\frac{MR}{1-\cos\theta} + M'l\sin\theta\right) = 0,$$

dans laquelle on laisse subsister les notations x', θ' pour désigner des valeurs antérieures au choc.

Épreuve pratique. — En vertu de la constance de θ, les composantes de la rotation instantanée se réduisent à

$$p = \psi'\sin\theta\sin\varphi, \qquad q = \psi'\sin\theta\cos\varphi, \qquad r = \psi'\cos\theta + \varphi'.$$

Par hypothèse, r est nul. Donc $\psi'\cos\theta + \varphi' = 0$. En outre, on peut écrire directement $p = \omega\cos\lambda t$ et $q = \omega\sin\lambda t$, ω désignant la grandeur de $\vec{\Omega}$. On a ainsi

$$\psi'\sin\theta = \omega, \qquad \frac{\pi}{2} - \varphi = \lambda t, \qquad \varphi' = -\lambda,$$

$$\psi' = \frac{\lambda}{\cos\theta}, \qquad \psi = -\frac{\lambda t}{\cos\theta}.$$

Ces formules permettent de déterminer le mouvement du trièdre et de constater que le plan xOy roule sans glisser sur un cône de révolution d'axe Oz_1 et de demi-angle au sommet $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Quant à l'amplitude de rotation demandée, c'est celle de l'angle obtenu par développement de la surface latérale du cône.