Solution du problème de mathématiques élémentaires (agrégation des sciences mathématiques, 1922)

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 376-391

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__376_1>

SOLUTION DU PROBLÈME DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES (AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, 1922).

I. *Étant donnés trois points* A, B, C, *on propose de déterminer un point* D *tel que les faces du tétraèdre* ABCD *aient des aires équivalentes.*

On calculera, en fonction des côtés a, b, c, et des angles A, B, C, *du triangle* ABC, *le rayon de la sphère inscrite, celui de la sphère circonscrite, le volume, les cosinus ou les sinus des dièdres ou des demi-dièdres du tétraèdre* ABCD (*ordre laissé à la disposition des candidats*).

II. *Les sommets* AB *restant fixes :*

Où doit-être le point H, *orthocentre du triangle*

ABC, *pour que les dièdres du tétraèdre* ABCD *soient tous aigus ?*

Quel est le lieu du point H *quand les orthocentres des quatre faces du tétraèdre sont dans un même plan ?*

III. *Soient deux sphères concentriques*, S *et* s, *de rayons* R *et* r. *A quelles conditions existe-t-il des tétraèdres* T *dont les sommets sont sur la sphère* S *et dont les plans des faces sont tangents à la sphère* s ? *Examiner si ces tétraèdres* T *ont leurs faces équivalentes. Comment faut-il choisir une droite* Δ *pour qu'elle soit une arête d'un tétraèdre* T ?

IV. *Les sphères* S *et* s *étant données, que peut-on dire des centres de gravité et des orthocentres des faces de tous les tétraèdres* T *qui sont inscrits dans* S *et circonscrits à* S ?

Le plan de la face BCD *et le sommet* A *étant fixés, étudier le déplacement des arêtes* CD, DB, BC.

Étudier les sphères Σ *autres que* s *tangentes aux plans des faces d'un tétraèdre* T *et, en particulier, la disposition des centres de ces sphères.*

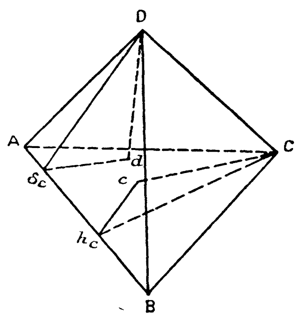
Soit A' *le centre de celle des sphères ex-inscrites à l'un quelconque des tétraèdres* T, *qui est placé au delà de la face* BCD *par rapport au sommet* A. *Démontrer que la distance de ce point* A' *au centre* ω *de l'une des circonférences tangentes aux trois côtés du triangle* BCD *est dans un rapport constant avec le rayon de cette circonférence.*

SOLUTION PAR MM. CHAZEL ET CONVERS.

Avant d'aborder directement le problème, nous allons étudier quelques propriétés d'un tétraèdre ABCD satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

Remarquons en premier lieu que les quatre hauteurs Aa, Bb, Cc, Dd du tétraèdre sont égales et qu'il en est de même des hauteurs $D\delta_c$, Ch_c dans les faces ABD, ABC. Il en résulte l'égalité des triangles rectangles $Dd\delta_c$, Cch_c dont les plans sont perpendiculaires à

Fig. 1.



l'arête AB, et par suite le plan bissecteur intérieur du dièdre AB coupe DC en son milieu. La droite qui joint les milieux des deux arêtes opposées est donc l'intersection des plans bissecteurs intérieurs des dièdres correspondants; autrement dit, le centre de la sphère inscrite coïncide avec le centre de gravité G du tétraèdre, et le rayon de cette sphère est égal au quart de la hauteur.

En outre, le segment DC, divisé en deux parties égales par le plan bissecteur intérieur du dièdre AB aux faces duquel il est limité, est parallèle au deuxième plan bissecteur de ce dièdre. En d'autres termes, le plan bissecteur intérieur du dièdre AB est perpendiculaire à tout plan parallèle aux arêtes AB et DC; la droite joignant les milieux de deux arêtes opposées est donc la perpendiculaire commune à ces deux arêtes; le centre de la sphère circonscrite coïncide aussi avec le point G;

les sphères inscrites et circonscrites sont concentriques. Il en résulte que les cercles circonscrits aux faces du tétraèdre sont égaux. Deux triangles tels que ABC, ABD ont donc même base, même aire, et même rayon de cercle circonscrit. Dans de telles conditions, on se rend compte aisément que ces triangles sont eux-mêmes égaux. Les faces du tétraèdre ABCD sont donc non seulement équivalentes, mais égales.

Si l'on suppose que ces faces sont des triangles absolument quelconques, cette égalité n'est possible que si l'on a

$$DC = AB, \qquad DA = BC, \qquad DB = AC,$$

autrement dit si les arêtes opposées sont égales deux à deux.

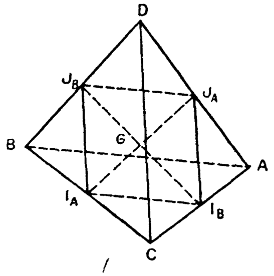
En résumé, dans un tel tétraèdre :

1° *Les faces sont égales, les arêtes opposées égales deux à deux.*

2° *Les sphères inscrite et circonscrite sont concentriques et leur centre commun coïncide avec le centre de gravité du tétraèdre.*

Remarque. — Le parallélogramme $I_A I_B J_A J_B$ formé

Fig. 2.

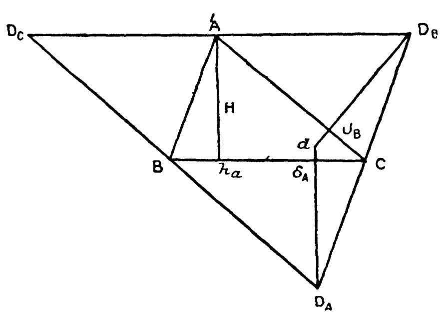


par les milieux de quatre arêtes opposées deux à deux est ici un losange. Les droites qui joignent les milieux des arêtes opposées sont rectangulaires. Le tétraèdre se reproduit par des rotations de 180° autour de ces droites.

Il est dès lors facile de construire un tel tétraèdre connaissant une de ses faces ABC. Le quatrième sommet D est à l'intersection des sphères décrites de A, B, C, avec BC, AC, AB comme rayons respectifs. Nous obtenons ainsi deux points D et D_1 auxquels correspondent deux tétraèdres symétriques. On verra un peu plus loin la condition de réalité de ces deux points.

Remarque. — Si nous désignons par g le centre de

Fig. 3.



gravité du triangle ABC, O le centre de son cercle circonscrit, la projection du point D sur le plan de la face ABC se fera en un point d la droite g^0 tel que

$$\overline{Od} = -3\overline{Og},$$

comme d'ailleurs $2\overline{Og} = \overline{gH}$ (H étant l'orthocentre du triangle ABC,

$$\overline{gd} = -2\overline{gH};$$

par suite d est l'orthocentre du triangle $D_A D_B D_C$ homothétique dont le rapport -2 du triangle ABC par rapport à son centre de gravité. De ce fait et de l'égalité des arêtes opposées, il résulte que si nous rabattons les plans des faces de sommet D sur le plan de la face ABC, la figure ainsi formée par l'ensemble de ces triangles sera précisément le triangle $D_A D_B D_C$ considéré.

Calcul des éléments du tétraèdre ABCD. — Nous désignerons dans ce qui suit par r le rayon de la sphère inscrite, R celui de la sphère circonscrite, h la hauteur du tétraèdre; par V son volume, α, β, γ les dièdres relatifs aux arêtes BC, CA, AB; h_a la hauteur du triangle ABC relative au sommet A, ρ le rayon du cercle circonscrit à ce triangle, et S sa surface.

Dans le triangle rectangle $Dd\delta_A$, nous avons la relation

$$\overline{Dd}^2 = h^2 = \overline{D\delta_A}^2 - \overline{d\delta_A}^2 = h_a^2 - \overline{d\delta_A}^2.$$

Or

$$d\delta_A = |Dd - h_a| = |2AH - h_a|.$$

Un calcul simple donne

$$d\delta_A = \left|\frac{2bc\cos A}{h_a} - h_a\right| \qquad \text{avec} \qquad h_a = \frac{bc\sin A}{a};$$

d'où

$$\begin{aligned}
h^2 &= 4bc\cos A - 4a^2\cot^2 A,\\
h^2 &= 2\left[(b^2+c^2+a^2) - \frac{2a^2}{\sin^2 A}\right],\\
h^2 &= 2[(b^2+c^2+a^2) - 8\rho^2],\\
r^2 &= \frac{h^2}{16} = \frac{b^2+c^2+a^2}{8} - \rho^2,\\
R^2 &= r^2+\rho^2 = \frac{b^2+c^2+a^2}{8};
\end{aligned}$$

h peut s'exprimer autrement; remplaçons dans l'expression précédente a, b, c respectivement par

(1) Le lecteur constatera facilement qu'on peut simplifier l'exposition précédente, en observant que les tétraèdres de l'énoncé sont inscriptibles dans des parallélipipèdes rectangles.

$2\rho \sin A$, $2\rho \sin B$, $2\rho \sin C$,

$$h^2 = 16\rho^2 \left[\frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{2} - 1 \right],$$

$$h^2 = 16\rho^2 \left[\frac{\sin^2(B + C) + \sin^2 B + \sin^2 C}{2} - 1 \right]$$
$$= 16\rho^2 \cos A \cos B \cos C.$$

Cette formule nous montre que la condition nécessaire et suffisante pour que les points D et D_1 soient réels est que les angles ABC soient aigus. Cette condition, d'ailleurs, exprime simplement que dans un trièdre du tétraèdre une face est plus petite que la somme des deux autres.

Le volume V nous sera fourni par la formule

$$V = \frac{hS}{3} \qquad \text{ou} \qquad V^2 = \frac{h^2 S^2}{9};$$

or

$$S^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{16\rho^2}, \qquad h^2 = 16\rho^2 \cos A \cos B \cos C,$$

$$V^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{9} \cos A \cos B \cos C.$$

Calculons enfin les cosinus des diédres du tétraèdre. Si O_A désigne la projection du point O sur le côté BC

$$\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{OO_A} = \frac{r}{\rho \cos A},$$

$$\operatorname{tang}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\rho^2 \cos A \cos B \cos C}{\rho^2 \cos^2 A} = \frac{\cos B \cos C}{\cos A},$$

$$\cos\alpha = \frac{1 - \dfrac{\cos B \cos C}{\cos A}}{1 + \dfrac{\cos B \cos C}{\cos A}} = \frac{\sin B \sin C - 2 \cos B \cos C}{\sin B \sin C},$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{2}{\operatorname{tang} B \operatorname{tang} C},$$

$$\cos\beta = 1 - \frac{2}{\operatorname{tang} C \operatorname{tang} A},$$

$$\cos\gamma = 1 - \frac{2}{\operatorname{tang} B \operatorname{tang} A}.$$

II. Les lieux que nous nous proposons de rechercher dans cette question étant évidemment des surfaces de révolution autour de la droite AB, il nous suffira, pour les déterminer, de déterminer leur méridienne, en fixant également le plan ABC.

a. Où doit être le point H *orthocentre du triangle* ABC *pour que les dièdres du tétraèdre soient tous aigus?* La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que le point d soit à l'intérieur du triangle ABC. Un dièdre ne pourra devenir obtus que si le point d traverse l'un des côtés du triangle. Cherchons donc la condition pour que la projection d du point D tombe sur l'un de ces côtés.

1° Pour que d soit sur BC, il faut et il suffit que

$$D_A d = A h_a,$$

ou

$$2 AH = A h_a.$$

Le point H est alors milieu, de $A h_a$, et le lieu de ce point est la circonférence Γ_A décrite sur AI_c, I_e étant le milieu de AB.

2° Pour que d soit sur AC, H doit être sur la circonférence Γ_B de diamètre BI_C.

3° Pour que d soit sur AB, H doit être le milieu de $C h_c$.

Or

$$C h_c = B h_c \operatorname{tang} B = \frac{B h_c . A h_c}{H h_c};$$

d'où

$$2 \overline{H h_c}^2 = B h_c A h_e.$$

Si je considère sur $C h_c$ le point E tel que

$$h_c E = \sqrt{2} h^c H,$$

ce point tel que

$$\overline{h_c E}^2 = A h_c B h_c$$

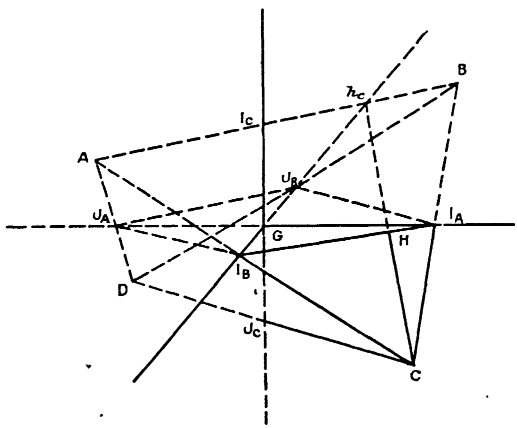
décrira la circonférence de diamètre AB ; le point H décrira donc l'ellipse (ε) de grand axe AB, obtenue en réduisant les coordonnées de cette circonférence dans le rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

En rapprochant tous ces résultats, on obtient facilement que *la condition nécessaire et suffisante pour que les dièdres du tétraèdre soient tous aigus*, *est que le point* H *soit dans la portion de plan extérieure aux cercles* Γ_A *et* Γ_B *et intérieure à l'ellipse* (ε). Les cercles Γ_A et Γ_B sont d'ailleurs les cercles osculateurs à l'ellipse (ε) aux extrémités du grand axe.

b. Quel lieu doit décrire H *pour que les quatre orthocentres soient dans un même plan ?*

Représentons le tétraèdre ABCD et ses trois axes

Fig. 4.



de rotation (droites joignant les milieux des arêtes opposées) Gx, Gy, Gz. La rotation de 180° autour de x'Gx amène A sur D, B sur C ; cette rotation échange deux à deux les quatre orthocentres ; de même les rotations autour de $y'Gy$ et $z'Gz$. Si les quatre orthocentres sont dans un même plan, ce plan est conservé dans ces trois rotations; c'est donc un des plans de coordonnées. Le quadrilatère formé par ces orthocentres admet d'ailleurs dans son plan deux axes de symétrie rectangulaires passant par G et dans chacune de ces symétries ses sommets s'échangent deux à deux. Ce quadrilatère est donc un rectangle situé dans l'un des plans xOy, yOz, zOx, ayant pour centre G et ses côtés parallèles aux axes.

Supposons le rectangle dans le plan xOy; ce plan coupe le tétraèdre suivant le parallélogramme $I_A I_B J_A J_B$, et le rectangle des orthocentres est inscrit dans ce parallélogramme, H est donc le milieu de Ch_c. D'ailleurs s'il en est ainsi, il est clair que les quatre orthocentres seront dans le plan xOx. *Nous retrouvons pour lieu de* H *l'ellipse précédente* (ε).

Pour que les quatre orthocentres soient dans l'un des deux autres plans de coordonnées, H *doit décrire l'un des cercles* Γ_A *ou* Γ_B.

III. Examinons tout d'abord si les faces d'un tétraèdre répondant à la question ont leurs faces équivalentes. — Le centre du cercle circonscrit à une face quelconque est le point de contact de cette face avec la sphère (s). Les cercles circonscrits aux quatre faces sont donc égaux. Par suite, deux angles tels que $\widehat{ADB}$ et $\widehat{ACB}$ sont égaux ou supplémentaires.

Snpposons en premier lieu que la sphère (s) soit la sphère inscrite au tétraèdre (T). Alors

$$\widehat{ADB} = \widehat{ACB} = C, \qquad \widehat{CAD} = \widehat{CBD} = C'.$$
$$\widehat{ADC} = \widehat{ABC} = B, \qquad \widehat{BCD} = \widehat{BAD} = B'.$$
$$\widehat{BDC} = \widehat{BAC} = A, \qquad \widehat{ABD} = \widehat{ACD} = A'.$$

Écrivons que, dans chaque face, la somme des angles est égale à deux droits

$$2^{dr} = A + B + C = A + B' + C' = A' + B + C' = A' + B' + C.$$

On en déduit

$$A = A', \qquad B = B', \qquad C = C'.$$

Les faces du tétraèdre sont donc semblables. Comme elles ont une dimension commune (le rayon du cercle circonscrit), elles sont égales.

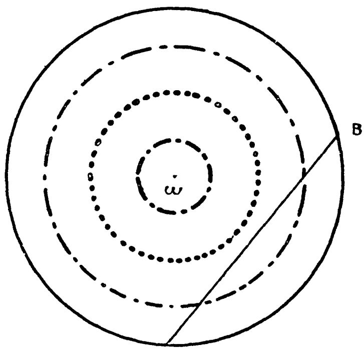
Si la sphère (s) n'est pas inscrite, ou bien elle est ex-inscrite, dans le trièdre de sommet D par exemple; les angles en D sont alors les suppléments des angles A, B, C, et leur somme égale à quatre droits, ce qui est impossible, ou bien elle est située dans un comble (DC par exemple); le centre du cercle circonscrit doit être situé par rapport au triangle ABC dans l'angle opposé par le sommet à l'angle en C, ce qui ne saurait avoir lieu. Ces deux dernières hypothèses sont à écarter. *La sphère (s) est la sphère inscrite à un tétraèdre* (T) *et les faces de ce tétraèdre sont équivalentes.*

Or, il est facile de voir que, dans un tétraèdre à faces équivalentes, le rapport $\frac{R}{r}$ peut prendre toute valeur supérieure à 3 et n'atteint cette valeur limite que lorsque le centre de gravité d'une face coïncide avec son orthocentre, c'est-à-dire lorsque les faces sont des triangles équilatéraux. le tétraèdre est alors régulier. Par suite l'unique condition à laquelle doivent satisfaire les rayons des sphères (S) et (s) est que le rapport $\frac{R}{r}$ soit supérieur à 3.

Condition pour que Δ soit une arête. — D'abord (Δ) doit être sécante à (S) et non à (s). Donnons-nous (Δ)

et soit ω le cercle de section de (S) par le plan tangent à (s) mené par Δ. La hauteur du tétraèdre est d'ailleurs connue et égale à $4r$. Donc D appartient au cercle de

Fig, 5.

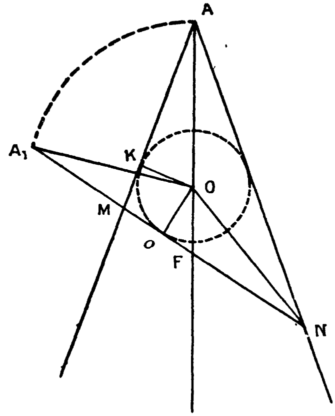


section de (S) par le plan parallèle au plan ABC à la distance $4r$. Ce cercle se projette sur le plan du cercle ω suivant le cercle pointillé. L'orthocentre H du triangle ABC doit être sur ce cercle; il est aussi sur l'arc supplémentaire de l'arc sous-tendu par AB. Pour que cet arc coupe le cercle pointillé, AB doit couper le cercle moyen entre les deux cercles précédents et doit être extérieur à celui qui a pour rayon la demi-différence des rayons de ces cercles. Si d désigne sa distance au centre commun O des sphères (S) et (s), un calcul simple montre que d doit satisfaire à la double inégalité

$$\frac{R^2-3r^2}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(R^2-r^2)(R^2-9r^2)}<d$$
$$<\frac{R^2-3r^2}{2}+\sqrt{(R^2-r^2)(R^2-9r^2)}.$$

Remarque. — On peut obtenir tous ces résultats par une voie un peu différente. Supposons acquis que la sphère (s) ne puisse être que la sphère inscrite à un tétraèdre ABCD supposé existant, satisfaisant aux conditions de l'énoncé. Le triangle BCD est inscrit au cercle (C) section de (S) par le plan BCD et circons-

Fig. 6.



crit à l'ellipse (E) section par ce même plan du cône de révolution de sommet A circonscrit à (s). Le point de contact O du plan BCD avec (s) est foyer de (E) et est centre de (C). D'ailleurs le théorème de Poncelet nous montre que le second foyer de (E) est l'orthocentre H du triangle BCD. On en déduit que (C) est cercle directeur de (E).

La figure ci-dessus est la figure du théorème de Daudelin. Les triangles OKA et O_0A_1 sont égaux.

Donc

$$OA_1 = AK,$$

OA_1, grand axe de l'ellipse (E), est égal à MN.

Donc

$$AK = MN.$$

Si nous désignons par $2p$ le périmètre de AMN

$$AK = p - MN;$$
$$2MN = p, \qquad AM + AN = 3MN.$$

Par ailleurs

$$\frac{AO}{OF} = \frac{AM}{MF}, \qquad MF = AM\frac{MN}{AM + AN} = \frac{AM}{3}.$$

Par suite

$$AO = 3OF.$$

Il en résulte *que le point* O *centre commun de* (S) *et* (s) *est centre de gravité du tétraèdre. La droite joignant les milieux de deux arêtes opposées est leur perpendiculaire commune. Le tétraèdre est équifacial.*

On peut remonter les calculs en sens inverse, et l'on voit que, pourvu que F soit extérieur à (S), il existe des tétraèdres (T). On retrouve la condition $R > 3r$.

Pour qu'une droite AB soit arête d'un tétraèdre (T) il faut et il suffit que la droite BF soit extérieure à (s). On vérifie facilement que l'on retombe sur la double inégalité écrite plus haut. Cette méthode nous donne du même coup la solution d'une des questions proposées dans la dernière partie. Si le point A et le plan BCD sont fixes, il résulte de ce qui précède que l'enveloppe des côtés BC, CD, DB est l'ellipse (E).

IV. Les centres de gravité et les orthocentres des faces d'un tétraèdre (T) quelconque sont situés sur des sphères concentriques aux deux premières et ayant respectivement pour rayons $\frac{R}{3}$ et $\sqrt{R^2 - 8r^2}$. Les centres de gravité sont évidemment les sommets d'un tétraèdre équifacial et il en est de même des orthocentres, le tétraèdre qu'ils forment admettant mêmes axes de symétrie que le tétraèdre (T) primitif.

Étude des sphères (Σ). — Désignons toujours par F le centre de gravité de la face BCD. Les points AOFA′ forment une division harmonique. Donc

$$\frac{\overline{OF}}{\overline{OA}} = -\frac{\overline{A'F}}{\overline{A'A}} = -\frac{1}{3},$$
$$\overline{OA} = -OA'.$$

Le centre A′ *de la sphère ex-inscrite dans le trièdre de sommet* A *est donc le symétrique du point* A *par rapport au centre commun des sphères inscrite et circonscrite. Le rayon de cette sphère est d'ailleurs égal à la moitié de la hauteur du tétraèdre.* Même remarque pour les points B′ C′ D′.

Le point A′ appartient d'ailleurs aux sphères de diamètre BC, CD, BD; car

$$\overline{A'B}^2 = 4R^2 - \overline{AB}^2,$$
$$\overline{A'C}^2 = 4R^2 - \overline{AC}^2,$$
$$\overline{A'B}^2 + \overline{A'C}^2 = 8R^2 - \left(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2\right)$$
$$= \overline{8R}^2 - \overline{DC}^2 + \overline{DB}^2 = \overline{BC}^2,$$

car

$$8R^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2 \quad (\textit{voir}\ \text{I}).$$

Il appartient donc aussi aux sphères de diamètre BL, L étant le pied de la bissectrice intérieure de l'angle en B.

Donc

$$\frac{A'I}{A'I_1} = \frac{LI}{LI_1} = \frac{l}{l_1},$$

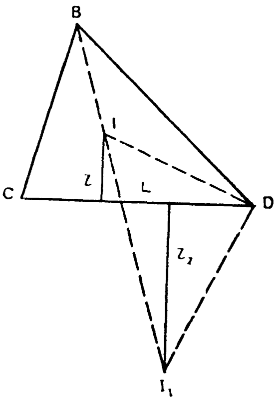
I, I_1, l, l_1 étant respectivement les centres et les rayons du cercle inscrit et d'un cercle ex-inscrit au triangle BCD.

Par suite

$$\frac{A'I}{l} = \frac{A'I_1}{l_1} = \frac{A'I_2}{l_2} = \frac{A'I_3}{l_3}.\cdot$$

D'ailleurs le cône de sommet A' et ayant pour base le cercle inscrit est capable d'un trièdre trirectangle circonscrit. Il est donc capable d'une infinité de trièdres trirectangles. On obtient ainsi une infinité de triangles BCD. On peut montrer qu'il est possible d'obtenir

Fig. 7.



ainsi un triangle semblable à un triangle quelconque donné à l'avance. [Ce sont des triangles cironscrits à un cercle fixe et inscrits à une conique fixe], par suite un triangle coïncidant avec la base d'un tétraèdre (T). Le rapport $\frac{A'I}{l}$, ainsi que ceux qui lui sont égaux, est donc constant [1].

On pourrait démontrer de même que le rapport $\frac{A'O}{\rho}$ est constant, ρ désignant le rayon du cercle circonscrit au triangle BCD.

Il n'existe pas de sphère Σ située dans un comble. Les plans bissecteurs de deux arêtes opposées étant parallèles, le centre d'une telle sphère est en effet rejeté à l'infini.

[1] Il est facile à voir que ce rapport est égal à $\sqrt{2}$.