Nouvelles annales de mathématiques

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 354-357

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__354_1>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Ox, Oy, Oz *étant trois axes rectangulaires, à un point* M *de coordonnées* (x, y, z) *on fait correspondre le plan* P *représenté par l'équation*

$$y(X - x) + x(Y - y) + k(x, y)(Z - z) = 0,$$

k *ne dépendant que de* x *et* y. *Soit* Γ *une courbe gauche telle que le plan osculateur en l'un quelconque de ses points coïncide avec le plan* P *associé à ce point, et soit* γ *la projection de* Γ *sur le plan* xOy.

1° *La fonction* $k(x, y)$ *étant supposée* donnée, *former l'équation différentielle à laquelle satisfont les courbes* γ. (*On vérifiera que par un point quelconque du plan* xOy *passent* deux *courbes* γ, *soient* γ_1 *et* γ_2.)

2° Déterminer *la fonction* $k(x, y)$ *de manière qu'il existe des surfaces* S *dont toutes les lignes asymptotiques soient des courbes* Γ. *Cela fait :*

a. Trouver les surfaces S *pour lesquelles les courbes* γ_1 *et* γ_2 *sont constamment confondues.*

b. Trouver les surfaces S *développables.*

(*Traiter a et b indépendamment l'un de l'autre.*)

3° Déterminer $k(x, y)$ *de manière que* γ_1 *et* γ_2 *soient constamment orthogonales; en particulier, de manière que les courbes* γ_1 *soient des cercles de centre* O *et les courbes* γ_2, *leurs diamètres.*

II. *Trouver les fonctions monogènes analytiques*

$$f(z) \equiv P(x, y) + iQ(x, y)$$

de la variable complexe $x = x + iy$ *telles que le rapport* $\frac{Q}{P}$ *ne dépende que de la variable* y.

(Poitiers, novembre 1924.)

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^\pi \frac{\cos m x}{1 + \alpha \cos x}\, dx,$$

où α *est un nombre réel compris entre* 0 *et* 1 *et* m *un entier.*

(*On cherchera, de préférence, à appliquer la méthode des résidus.*)

Application numérique :

$$\alpha = \frac{3}{5}, \qquad m = 2 \quad \text{et} \quad m = 10.$$

(Poitiers, novembre 1924.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° La caractéristique du plan P associé au point courant de Γ est contenue dans le plan

$$y'(X - x) + x'(Y - y) + \left(\frac{\partial k}{\partial x} x' + \frac{\partial k}{\partial x} y'\right)(Z - z) - (yx' + xy' + kz') = 0,$$

les dérivées étant prises par rapport au paramètre représentatif de Γ. Pour que cette caractéristique soit la tangente de Γ, il faut et il suffit que l'on ait

$$yx' + xy' + kz' = 0,$$
$$2x'y' + \left(\frac{\partial k}{\partial x}x' + \frac{\partial k}{\partial y}y'\right)z' = 0.$$

On tire de là l'équation différentielle

$$\left(x\frac{dy}{dx} + y\right)\left(\frac{\partial k}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial k}{\partial x}\right) - 2k\frac{dy}{dx} = 0$$

qui définit les courbes γ; cette équation une fois intégrée, les courbes Γ se déterminent par une quadrature.

2° Les surfaces S satisfont à l'équation aux différentielles totales

$$y\,dx + x\,dy + k(x, y)\,dz = 0.$$

Pour qu'elle soit complètement intégrable, on doit avoir

$$k = f(xy).$$

a. On a $(xyf' - f)^2 = x^2y^2f'^2$; d'où $f = a\sqrt{xy}$ (a const.).

b. Il faut $\dfrac{D}{D(x, y)}\left(\dfrac{k}{x}, \dfrac{k}{y}\right) = 0$, soit encore $2xyf' = f$, et l'on retrouve le résultat de a, comme il était évident *a priori*. Les surfaces S sont des cônes,

$$z = -2a\sqrt{xy} + \text{const.}$$

3° On trouve $k = \varphi(x^2 - y^2)$ et, dans le cas particulier,

$$\varphi = b\sqrt{x^2 - y^2} \qquad (b \text{ const.}).$$

II Si l'on prend $P = YQ$, on trouve

$$Y\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad Y\frac{\partial Q}{\partial y} + Y'Q = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

La condition d'intégrabilité donne

$$-Y' = a(Y^2 + 1), \qquad \text{d'où} \qquad Y = \cot a(y - y_0),$$

puis

$$Q = e^{a(x - x_0)} \sin a(y - y_0), \qquad P = e^{a(x - x_0)} \cos a(y - y_0)$$

et

$$f(z) = e^{a(z-z_0)} \qquad (a \text{ const. réelle}).$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — $I = \dfrac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}\left(\dfrac{-1+\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\right)^m.$

Application numérique.— $I_1 = 0,43634$; $I_2 = 0,000066504$.