# Certificats de calcul différentiel et intégral

*Nouvelles annales de mathématiques 5e série*, tome 3 (1924), p. 313-319

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__313_1>

## CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

### Alger.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. Question de cours. *Maximum et minimum d'une fonction de deux variables indépendantes. Étude détaillée du cas douteux.*

Application : *Distance d'un point à une surface.*

II. Problème : 1° *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$q^2 y + px - y = 0;$$

2° *Équations des courbes caractéristiques (Relations entre $x$, $y$, $z$)*;

3° *Déterminer la surface intégrale passant par la courbe :*

$$y = x^2 + 1.$$
$$z = x^2 - 1;$$

4° *Cette surface a pour équation*

$$z = y\,\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

*Équations des lignes asymptotiques de cette surface;*

5° *Former l'équation donnant la direction des lignes de courbure (on n'intégrera pas).*

**Indications sur la solution.** — 1° On a à intégrer le système

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2qy} = \frac{dz}{2y-px} = \frac{-dp}{p} = \frac{-dq}{q^2-1};$$

on a les intégrales immédiates

$$(1) \qquad px = p_0 x_0,$$

$$(2) \qquad y(q^2-1) = y_0(q_0^2-1),$$

$$(3) \qquad x^2 \frac{q-1}{q+1} = x_0^2 \frac{q_0-1}{q_0+1}.$$

En substituant $y$ et $px = p_0 x_0$ dans les troisième et cinquième rapports, il vient

$$\frac{dz}{p_0 x_0} = \frac{q^2+1}{(q^2-1)^2} dq;$$

d'où

$$(4) \qquad z - z_0 = p_0 x_0 \left[\frac{q}{1-q^2} - \frac{q_0}{1-q_0^2}\right].$$

2° En éliminant $p$, $q$ entre (1), (2), (3), (4), on a les équations des courbes caractéristiques.

En posant pour abréger

$$\lambda = \frac{x_0^2}{x^2} \cdot \frac{q_0-1}{q_0+1},$$

on obtient

$$z - z_0 = p_0 x_0 \left[\frac{\lambda^2-1}{4\lambda} - \frac{q_0}{1-q_0^2}\right],$$

$$4\lambda y = y_0(q_0^2-1).$$

3° Pour déterminer la surface qui passe par la courbe, on pose

$$x_0 = u,$$

$$y_0 = 1 + u^2,$$

$$z_0 = u^2 - 1;$$

$p_0$ et $q_0$ seront déterminés par

$$(q_0^2-1)y_0 + p_0 x_0 = 0,$$

$$p_0 + 2q_0 u - 2u = 0.$$

Une solution évidente est :

$$q_0 = 1, \qquad p_0 = 0;$$

d'où

$$p = 0, \qquad q = 1.$$

On a une première surface

$$y - z = 2.$$

La solution intéressante est

$$q_0 = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}, \qquad p_0 = \frac{4u}{u^2 + 1}.$$

On en déduit

$$\lambda = -\frac{1}{x^2}.$$

Les équations des courbes caractéristiques deviennent

$$z + y\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} = 0,$$

$$\frac{4\lambda y}{(1 - \lambda)^2} = \frac{-4u^2}{u^2 + 1};$$

d'où

$$z = y\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

4° L'équation des lignes asymptotiques est

$$2x\,dy\,dx + y\,dx^2\frac{1 - 3x^2}{1 + x^2} = 0,$$

$$dx = 0, \qquad x = \text{const.}$$

et

$$\frac{dy}{y} + \frac{1 - 3x^2}{2x(x^2 + 1)}dx = 0;$$

d'où

$$x^2 y = c'(1 + x^2)^2.$$

5° Lignes de courbure :

$$\frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq}$$

ou

$$[(1 + p^2)s - pqr]\,dx^2 + [t(1 + p^2) - r(1 + q^2)]\,dx\,dy + [pqt - s(1 + q^2)]\,dy^2 = 0.$$

Pour le cas actuel,

$$p = \frac{4xy}{(x^2+1)^2}, \qquad q = \frac{x^2-1}{x^2+1},$$

$$r = 4y\frac{1-3x^2}{(x^2+1)^3}, \qquad s = \frac{4x}{(x^2+1)^2}, \qquad t = 0.$$

On trouve

$$[(x^2+1)^4 + 4y^2(1+3x^4)]\,dx^2$$
$$- 4xy(1-3x^2)(x^2+1)\,dx\,dy - 4x^2(1+x^2)^2\,dy^2 = 0.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *On donne les paraboloïdes*

$$\frac{x^2}{3} + y^2 - 2z = 0,$$

$$\frac{2x^2}{3} + 3y^2 + 2z - 4 = 0.$$

1° *Volume compris entre ces deux surfaces et les plans $xOz$, $yOz$.*

2° *Centre de gravité de ce volume.*

II. *On considère l'intégrale*

$$\int \frac{dz}{(z+2)\sqrt[5]{z^3(1-z)^2}}.$$

1° *Calculer cette intégrale le long d'un cercle de centre origine, de rayon supérieur à 2.*

2° *Le long d'une couronne circulaire de centre O (un cercle de rayon supérieur à 2, le petit cercle de rayon compris entre 1 ei 2).*

3° *Calculer l'intégrale réelle*

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+2)\sqrt[5]{x^3(1-x)^2}}.$$

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. Les deux paraboloïdes se coupent suivant une courbe qui se projette sur $xOy$ suivant l'ellipse

$$x^2 + 4y^2 = 4.$$

On a

$$2(z_1 - z_2) = 4 - x^2 - 4y^2.$$

Si l'on pose

$$x = 2r\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta,$$

on aura

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \qquad 0 < r < 1,$$
$$J_{xy}^{r\theta} = 2r,$$
$$V = \int\int (z_1 - z_2)\, dx\, dy = \int\int 4r(1 - r^2)\, dr\, d\theta,$$
$$V = \frac{\pi}{2},$$
$$V\xi = \int\int (z_1 - z_2)\, x\, dx\, dy = \int\int 4r(1 - r^2) 2r\cos\theta\, dr\, d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \int_0^1 8r^2(1 - r^2)\, dr = \frac{16}{15};$$

d'où

$$\xi = \frac{32}{15\pi},$$
$$V\eta = \int\int 4r(1 - r^2)\, r\sin\theta\, dr\, d\theta = \frac{8}{15},$$
$$\eta = \frac{16}{15\pi},$$
$$V\zeta = \int\int\int z\, dx\, dy\, dz = \int\int \frac{z_1^2 - z_2^2}{2}\, dx\, dy;$$

or

$$z_1^2 - z_2^2 = (1 - r^2)\left[4 - \frac{4r^2}{3}\cos\theta - 2r^2\sin^2\theta\right],$$
$$\frac{z_1^2 - z_2^2}{2} = (1 - r^2)\left(2 - \frac{5r^2}{6} + \frac{r^2\cos 2\theta}{6}\right),$$
$$V\zeta = \int\int 2r(1 - r^2)\left[2 - \frac{5r^2}{6} + \frac{r^2\cos 2\theta}{6}\right] dr\, d\theta,$$

c'est-à-dire simplement

$$V\zeta = \int\int 2r(1 - r^2)\left(2 - \frac{5r^2}{6}\right) dr\, d\theta$$
$$= \int^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 2r(1 - r^2)\left(2 - \frac{5r^2}{6}\right) dr = \frac{\pi}{2} \times \frac{13}{36};$$

d'où

$$\zeta = \frac{13}{36}.$$

II. 1° En prenant pour coupure la demi-droite o $1+\infty$, posant pour un point quelconque M,

$$z = re^{i\varphi}, \qquad z-1 = r'e^{i\varphi'}$$

avec

$$0 < \varphi < 2\pi, \qquad 0 < \varphi' < 2\pi,$$

je précise les radicaux de la façon suivante :

$$z^{\frac{3}{5}} = r^{\frac{3}{5}} e^{\frac{3}{5}i\varphi},$$
$$(1-z)^{\frac{2}{5}} = r'^{\frac{2}{5}} e^{\frac{2}{5}i(\varphi'-\pi)}.$$

De sorte que pour un point compris entre o et 1 ($\varphi = 0, \varphi' = \pi$, le radical soit réel.

Chacune des déterminations de radical est monodrome quand on tourne à la fois autour des deux branchements o,1. A l'extérieur du cercle de rayon supérieur à 2, il n'y a pas de point critique. L'intégrale a la même valeur quel que soit le rayon du centre. Comme $zf(z) \to 0$ quand $|z|$ augmente indéfiniment,

$$\int_C = 0.$$

2° Entre les deux cercles $C(r > 2)$, $c(1 < r < 2)$, il n'y a que le pôle simple $z = -2$.

Donc

$$\int_{C} + \int_{c} = 2\pi i R,$$

R étant le résidu relatif à ce pôle,

$$R = \lim(z+2)f(z) = \frac{1}{\sqrt[5]{z^3(1-z)^2}}.$$

Pour ce point $z = -2$, on a

$$r = 2, \qquad r' = 3,$$
$$\varphi = \pi, \qquad \varphi' = \pi.$$

En appliquant les formules déterminant le radical on a donc

$$\sqrt[5]{z^3(1-z)^2} = 2^{\frac{3}{5}} 3^{\frac{2}{5}} e^{\frac{3}{5}i\pi};$$

d'où

$$\int_{c\searrow} = -2\pi i 2^{-\frac{3}{5}} 3^{-\frac{2}{5}} e^{-\frac{3}{5}i\pi}.$$

3° Intégrons le long du contour formé de $c$ et d'une coupure le long de l'axe réel positif, — contour à l'intérieur duquel il n'y a pas de point critique. Les intégrales suivant les petites circonférences entourant les points o et 1 tendent vers zéro. Il reste seulement

$$\int_{0\,(\text{bord sup.})}^{1} + \int_{1\,(\text{bord sup.})}^{r} + \int_{r\,(\text{bord inf.})}^{1} + \int_{1\,(\text{bord inf.})}^{0} + \int_{c\searrow} = 0;$$

or

$$\int_{1}^{r} + \int_{r}^{1} = 0.$$

D'autre part, en un point de o,1, bord supérieur,

$$\varphi = 0,$$
$$\varphi' = \pi,$$

et sur le bord inférieur .

$$\varphi = 2\pi,$$
$$\varphi' = \pi.$$

En deux points vis-à-vis le radical se retrouve multiplié par $e^{\frac{3}{5}2i\pi}$.

Donc

$$\int_{1\,(\text{inf.})}^{0} = -\int_{0\ \text{sup.})}^{1} \times e^{-\frac{3}{5}2i\pi},$$

d'où l'égalité finale

$$\int_{0\,(\text{sup.})}^{1} \left(1 - e^{-\frac{3}{5}2i\pi}\right) = -\int_{c\searrow} = 2\pi i 2^{-\frac{3}{5}} 3^{\frac{2}{5}} e^{\frac{3}{5}i\pi}$$

ou

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{(x+2)\sqrt[5]{x^3(1-x)^2}} = \frac{\pi}{\sqrt[5]{72}} \times \frac{1}{\sin\frac{3\pi}{5}}.$$

(Alger, juin 1924.)