NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 313-319

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__313_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1924, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Alger.

ÉPREUVE ECRITE. — I. Question de cours. *Maximum et minimum d'une fonction de deux variables indépendantes. Étude détaillée du cas douteux.*

Application : *Distance d'un point à une surface.*

II. Problème : 1° *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$q^2y + px - y = 0;$$

2° *Équations des courbes caractéristiques (Relations entre x, y, z);*

3° *Déterminer la surface intégrale passant par la courbe :*

$$y = x^2 + 1,$$
$$z = x^2 - 1;$$

4° *Cette surface a pour équation*

$$z = y\,\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

Équations des lignes asymptotiques de cette surface;

5° *Former l'équation donnant la direction des lignes de courbure (on n'intégrera pas).*

Indications sur la solution. — 1° On a à intégrer le système

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2qy} = \frac{dz}{2y - px} = \frac{-dp}{p} = \frac{-dq}{q^2 - 1};$$

on a les intégrales immédiates

$$(1) \qquad px = p_0 x_0,$$

$$(2) \qquad y(q^2 - 1) = y_0(q_0^2 - 1),$$

$$(3) \qquad x^2 \frac{q - 1}{q + 1} = x_0^2 \frac{q_0 - 1}{q_0 + 1}.$$

En substituant y et $px = p_0 x_0$ dans les troisième et cinquième rapports, il vient

$$\frac{dz}{p_0 x_0} = \frac{q^2 + 1}{(q^2 - 1)^2} dq;$$

d'où

$$(4) \qquad z - z_0 = p_0 x_0 \left[\frac{q}{1 - q^2} - \frac{q_0}{1 - q_0^2}\right].$$

2° En éliminant p, q entre (1), (2), (3), (4), on a les équations des courbes caractéristiques.

En posant pour abréger

$$\lambda = \frac{x_0^2}{x^2} \cdot \frac{q_0 - 1}{q_0 + 1},$$

on obtient

$$z - z_0 = p_0 x_0 \left[\frac{\lambda^2 - 1}{4\lambda} - \frac{q_0}{1 - q_0^2}\right],$$

$$4\lambda y = y_0(q_0^2 - 1).$$

3° Pour déterminer la surface qui passe par la courbe, on pose

$$x_0 = u,$$

$$y_0 = 1 + u^2,$$

$$z_0 = u^2 - 1;$$

p_0 et q_0 seront déterminés par

$$(q_0^2 - 1) y_0 + p_0 x_0 = 0,$$

$$p_0 + 2 q_0 u - 2u = 0.$$

Une solution évidente est :

$$q_0 = 1, \qquad p_0 = 0;$$

d'où

$$p = 0, \qquad q = 1.$$

On a une première surface

$$y - z = 2.$$

La solution intéressante est

$$q_0 = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}, \qquad p_0 = \frac{4u}{u^2 + 1}.$$

On en déduit

$$\lambda = -\frac{1}{x^2}.$$

Les équations des courbes caractéristiques deviennent

$$z + y\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} = 0,$$

$$\frac{4\lambda y}{(1 - \lambda)^2} = \frac{-4u^2}{u^2 + 1};$$

d'où

$$z = y\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

4° L'équation des lignes asymptotiques est

$$2x\,dy\,dx + y\,dx^2\,\frac{1 - 3x^2}{1 + x^2} = 0,$$

$$dx = 0, \qquad x = \text{const.}$$

et

$$\frac{dy}{y} + \frac{1 - 3x^2}{2x(x^2 + 1)}\,dx = 0;$$

d'où

$$x^2 y = c'(1 + x^2)^2.$$

5° Lignes de courbure :

$$\frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq}$$

ou

$$[(1 + p^2)s - pqr]\,dx^2 + [t(1 + p^2) - r(1 + q^2)]\,dx\,dy$$
$$+ [pqt - s(1 + q^2)]\,dy^2 = 0.$$

Pour le cas actuel,

$$p = \frac{4xy}{(x^2+1)^2}, \qquad q = \frac{x^2-1}{x^2+1},$$

$$r = 4y\,\frac{1-3x^2}{(x^2+1)^3}, \qquad s = \frac{4x}{(x^2+1)^2}, \qquad t = 0.$$

On trouve

$$[(x^2+1)^4 + 4y^2(1+3x^4)]\,dx^2$$
$$-4xy(1-3x^2)(x^2+1)\,dx\,dy - 4x^2(1+x^2)^2\,dy^2 = 0.$$

Épreuve pratique. — I. *On donne les paraboloïdes*

$$\frac{x^2}{3} + y^2 - 2z = 0,$$
$$\frac{2x^2}{3} + 3y^2 + 2z - 4 = 0.$$

1° *Volume compris entre ces deux surfaces et les plans* xOz, yOz.

2° *Centre de gravité de ce volume.*

II. *On considère l'intégrale*

$$\int \frac{dz}{(z+2)\sqrt[5]{z^3(1-z)^2}}.$$

1° *Calculer cette intégrale le long d'un cercle de centre origine, de rayon supérieur à* 2.

2° *Le long d'une couronne circulaire de centre* O (*un cercle de rayon supérieur à* 2, *le petit cercle de rayon compris entre* 1 *et* 2).

3° *Calculer l'intégrale réelle*

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+2)\sqrt[5]{x^3(1-x)^2}}.$$

Indications sur la solution. — I. Les deux paraboloïdes se coupent suivant une courbe qui se projette sur xOy suivant l'ellipse

$$x^2 + 4y^2 = 4.$$

On a

$$2(z_1 - z_2) = 4 - x^2 - 4y^2.$$

Si l'on pose

$$x = 2r\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta,$$

on aura

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \qquad 0 < r < 1,$$
$$J_{xy}^{r\theta} = 2r,$$
$$V = \int\int (z_1 - z_2)\,dx\,dy = \int\int 4r(1-r^2)\,dr\,d\theta,$$
$$V = \frac{\pi}{2},$$
$$V\xi = \int\int_{\frac{\pi}{2}} (z_1 - z_2)\,x\,dx\,dy = \int\int 4r(1-r^2)\,2r\cos\theta\,dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta \int_0^1 8r^2(1-r^2)\,dr = \frac{16}{15};$$

d'où

$$\xi = \frac{32}{15\pi},$$
$$V\eta = \int\int 4r(1-r^2)\,r\sin\theta\,dr\,d\theta = \frac{8}{15},$$
$$\eta = \frac{16}{15\pi},$$
$$V\zeta = \int\int\int z\,dx\,dy\,dz = \int\int \frac{z_1^2 - z_2^2}{2}\,dx\,dy;$$

or

$$z_1^2 - z_2^2 = (1-r^2)\left[4 - \frac{4r^2}{3}\cos\theta - 2r^2\sin^2\theta\right],$$
$$\frac{z_1^2 - z_2^2}{2} = (1-r^2)\left(2 - \frac{5r^2}{6} + \frac{r^2\cos 2\theta}{6}\right),$$
$$V\zeta = \int\int 2r(1-r^2)\left[2 - \frac{5r^2}{6} + \frac{r^2\cos 2\theta}{6}\right]dr\,d\theta,$$

c'est-à-dire simplement

$$V\zeta = \int\int_{\frac{\pi}{2}} 2r(1-r^2)\left(2 - \frac{5r^2}{6}\right)dr\,d\theta$$
$$= \int^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 2r(1-r^2)\left(2 - \frac{5r^2}{6}\right)dr = \frac{\pi}{2} \times \frac{13}{36};$$

d'où

$$\zeta = \frac{13}{36}.$$

II. 1° En prenant pour coupure la demi-droite o $1+\infty$, posant pour un point quelconque M,

$$z = re^{i\varphi}, \qquad z-1 = r'e^{i\varphi'}$$

avec

$$0 < \varphi < 2\pi, \qquad 0 < \varphi' < 2\pi,$$

je précise les radicaux de la façon suivante :

$$z^{\frac{3}{5}} = r^{\frac{3}{5}} e^{\frac{3}{5}i\varphi},$$
$$(1-z)^{\frac{2}{5}} = r'^{\frac{2}{5}} e^{\frac{2}{5}i(\varphi'-\pi)}.$$

De sorte que pour un point compris entre o et 1 ($\varphi = 0, \varphi' = \pi$, le radical soit réel.

Chacune des déterminations de radical est monodrome quand on tourne à la fois autour des deux branchements 0, 1. A l'extérieur du cercle de rayon supérieur à 2, il n'y a pas de point critique. L'intégrale a la même valeur quel que soit le rayon du centre. Comme $zf(z) \to 0$ quand $|z|$ augmente indéfiniment,

$$\int_C = 0.$$

2° Entre les deux cercles $C(r > 2)$, $c(1 < r < 2)$, il n'y a que le pôle simple $z = -2$.

Donc

$$\int_C + \int_c = 2\pi i R,$$

R étant le résidu relatif à ce pôle,

$$R = \lim(z+2)f(z) = \frac{1}{\sqrt[5]{z^3(1-z)^2}}.$$

Pour ce point $z = -2$, on a

$$r = 2, \qquad r' = 3,$$
$$\varphi = \pi, \qquad \varphi' = \pi.$$

En appliquant les formules déterminant le radical on a donc

$$\sqrt[5]{z^3(1-z)^2} = 2^{\frac{3}{5}} 3^{\frac{2}{5}} e^{\frac{3}{5}i\pi};$$

d'où

$$\int_{c\nwarrow} = -2\pi i 2^{-\frac{3}{5}} 3^{-\frac{2}{5}} e^{-\frac{3}{5}i\pi}.$$

3° Intégrons le long du contour formé de c et d'une coupure le long de l'axe réel positif, — contour à l'intérieur duquel il n'y a pas de point critique. Les intégrales suivant les petites circonférences entourant les points o et 1 tendent vers zéro. Il reste seulement

$$\int_{0\,(\text{bord sup.})}^{1} + \int_{1\,(\text{bord sup.})}^{r} + \int_{r\,(\text{bord inf.})}^{1} + \int_{1\,(\text{bord inf.})}^{0} + \int_{c\nwarrow} = 0;$$

or

$$\int_{1}^{r} + \int_{r}^{1} = 0.$$

D'autre part, en un point de o,1, bord supérieur,

$$\varphi = 0,$$
$$\varphi' = \pi,$$

et sur le bord inférieur

$$\varphi = 2\pi,$$
$$\varphi' = \pi.$$

En deux points vis-à-vis le radical se retrouve multiplié par $e^{\frac{3}{5}2i\pi}$.

Donc

$$\int_{1\,(\text{inf.})}^{0} = -\int_{0\,\text{sup.})}^{1} \times e^{-\frac{3}{5}2i\pi},$$

d'où l'égalité finale

$$\int_{0\,(\text{sup.})}^{1} \left(1 - e^{-\frac{3}{5}2i\pi}\right) = -\int_{c\nwarrow} = 2\pi i 2^{-\frac{3}{5}} 3^{\frac{2}{5}} e^{\frac{3}{5}i\pi}$$

ou

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{(x+2)\sqrt[5]{x^3(1-x)^2}} = \frac{\pi}{\sqrt[5]{72}} \times \frac{1}{\sin\frac{3\pi}{5}}.$$

(Alger, juin 1924.)