G. BOULIGAND

Un problème de percussions

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 293-300

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__293_1>

UN PROBLÈME DE PERCUSSIONS;

PAR G. BOULIGAND.

1. Étudions d'abord le problème suivant :

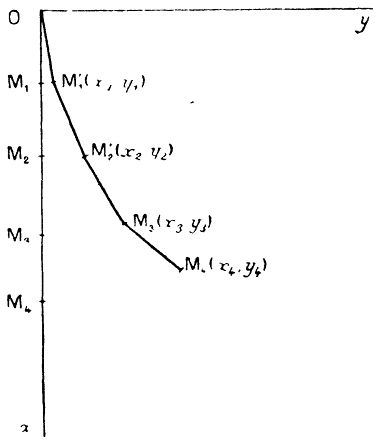
On considère un fil flexible, inextensible et sans masse, suspendu par une extrémité O, *et le long duquel on dispose invariablement des masses ponctuelles en des points* $M_1, M_2, \ldots, M_n$. *Le système est en équilibre dans sa position verticale, et l'on suppose que*

$$\overline{OM_1} = \overline{M_1 M_2} = \ldots = \overline{M_{n-1} M_n}.$$

Soient $m_1, m_3, \ldots, m_n$ *les masses placées aux points en question. On fait agir simultanément sur elles des percussions horizontales et parallèles, d'intensités respectives* $P_1, P_2, \ldots, P_n$. *En désignant par* l *la longueur totale, déterminer l'état des vitesses du* *système, à l'instant immédiatement postérieur à la production de ces impulsions.*

Nous avons fait la figure dans le cas de $n = 4$ et nous avons pris comme axe Ox la position d'équilibre du système. Soit $OM'_1 M'_2, \ldots, M'_n$ une position vir-

Fig. 1.



tuelle quelconque : nous la déterminerons par ses angles

$$\widehat{Ox, OM'_1} = \theta_1, \qquad \ldots, \qquad Ox, OM'_n = \theta_n.$$

Les coordonnées des différentes masses dans cette position seront données par des équations de la forme

$$x_i = \frac{l}{n}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \ldots + \cos\theta_i),$$

$$y_i = \frac{l}{n}(\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \ldots + \sin\theta_i).$$

De là, on passe aux vitesses

$$x'_i = -\frac{l}{n}(\theta'_1 \sin\theta_1 + \theta'_2 \sin\theta_2 + \ldots + \theta'_i \sin\theta_i),$$

$$y'_i = \quad \frac{l}{n}(\theta'_1 \cos\theta_1 + \theta'_2 \cos\theta_2 + \ldots + \theta'_i \cos\theta_i).$$

Dans la position utile Ox, tous les θ_i sont nuls. Donc $x_i'^2 + y_i'^2$ se réduit à

$$\frac{l^2}{n^2}(\theta'_1 + \theta'_2 + \ldots + \theta'_i)^2,$$

d'où, pour cette position, la valeur de la force vive

$$(1) \qquad 2\mathrm{T} = \frac{l^2}{n^2}[m_1\theta_1'^2 + m_2(\theta'_1 + \theta'_2)^2 + \ldots + m_n(\theta'_1 + \theta'_2 + \ldots + \theta'_n)^2].$$

La réponse est alors immédiatement fournie par les équations de Lagrange relatives aux percussions. L'une de ces dernières, appliquée à M_i, a pour composantes (o, P_i). Son travail virtuel est donc $\mathrm{P}_i\,\delta y_i$. La somme des travaux virtuels sera $\sum_i \mathrm{P}_i\,\delta y_i$ ou encore

$$(2) \quad \frac{l}{n}[\mathrm{P}_1\delta\theta_1 + \mathrm{P}_2(\delta\theta_1 + \delta\theta_2) + \ldots + \mathrm{P}_n(\delta\theta_1 + \delta\theta_2 + \ldots + \delta\theta_n)].$$

Il faut écrire que l'on a, pour les valeurs 1, 2, ..., n de l'indice i,

$$\Delta\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial\theta'_i}\right) = \mathrm{P}_i + \mathrm{P}_{i+1} + \ldots + \mathrm{P}_n,$$

ou simplement, puisque les vitesses initiales sont nulles,

$$\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial\theta'_i} = \mathrm{P}_i + \mathrm{P}_{i+1} + \ldots + \mathrm{P}_n,$$

d'où les équations

$$(3) \quad \left\{\begin{array}{r} m_1\theta'_1 + m_2(\theta'_1 + \theta'_2) + \ldots + m_n(\theta'_1 + \theta'_2 + \ldots + \theta'_n) = \dfrac{n}{l}(\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 + \ldots + \mathrm{P}_n), \\ m_2(\theta'_1 + \theta'_2) + \ldots + m_n(\theta'_1 + \theta'_2 + \ldots + \theta'_n) = \dfrac{n}{l}(\qquad \mathrm{P}_2 + \ldots + \mathrm{P}_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ m_n(\theta'_1 + \theta'_2 + \ldots + \theta'_n) = \dfrac{n}{l}\mathrm{P}_n, \end{array}\right.$$

d'où l'on tire

$$(3')\quad \left\{\begin{array}{ll} \theta'_1+\theta'_2+\ldots+\theta'_n & =\dfrac{n}{l}\dfrac{P_n}{m_n},\\ \theta'_1+\theta'_2+\ldots+\theta'_{n-1} & =\dfrac{n}{l}\dfrac{P_{n-1}}{m_{n-1}},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots,\\ \theta'_1+\theta'_2 & =\dfrac{n}{l}\dfrac{P_2}{m_2},\\ \theta'_1 & =\dfrac{n}{l}\dfrac{P_1}{m_1}, \end{array}\right.$$

d'où finalement

$$(3\ bis)\quad \left\{\begin{array}{l} \theta'_1=\dfrac{n}{l}\dfrac{P_1}{m_1},\qquad \theta'_2=\dfrac{n}{l}\left(\dfrac{P_2}{m_2}-\dfrac{P_1}{m_1}\right),\qquad \ldots,\\ \qquad\qquad \theta'_n=\dfrac{n}{l}\left(\dfrac{P_n}{m_n}-\dfrac{P_{n-1}}{m_{n-1}}\right). \end{array}\right.$$

Le problème est donc résolu.

2. Posons-nous maintenant la même question, mais en supposant une répartition continue des masses le long du fil ainsi qu'une répartition continue des impulsions simultanées. Tel serait le cas d'un fil vertical soumis à un courant d'air très brusque. Il s'agit encore de trouver les vitesses qui succèdent au phénomène de percussion ainsi produit. A cet effet nous donnerons dans l'intervalle $(0, l)$ de variation de x la densité $\rho(x)$, ainsi que la densité d'impulsion $\varpi(x)$. Soient s l'abscisse curviligne d'un point sur la ligne dessinée par le fil, dans une position virtuelle quelconque, θ l'angle de la tangente dans le sens des s croissants (qui est également ici celui des x croissants) avec Ox.

Nous aurons, pour la force vive,

$$(4)\qquad 2T=\int_0^l\left[\rho(x)\,dx\left(\int_0^x\frac{\partial\theta}{\partial t}\,ds\right)^2\right],$$

expression qu'on peut déduire de (1), en faisant croître n indéfiniment. On pourrait d'ailleurs l'obtenir aussi par un calcul direct, en remarquant que dans une position virtuelle, un point courant de l'arc étudié a pour coordonnées

$$x = \int_0^s \cos\theta \, ds, \qquad y = \int_0^s \sin\theta \, ds.$$

On en déduit $\frac{\partial x}{\partial t}$ et $\frac{\partial y}{\partial t}$: ce sont des fonctionnelles linéaires et homogènes de $\frac{\partial \theta}{\partial t}$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\int_0^s \sin\theta \frac{\partial \theta}{\partial t} ds, \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = \int_0^s \cos\theta \frac{\partial \theta}{\partial t} ds.$$

Dans la position utile, $\frac{\partial x}{\partial t}$ est nulle quel que soit s, et l'on a

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x) = \int_0^x \frac{\partial \theta}{\partial t}(x)\, ds.$$

On a d'ailleurs

$$2\mathrm{T} = \int_0^l \rho(x)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx,$$

ce qui donne la formule (4). L'expression obtenue est une fonctionnelle homogène et du second degré de $\frac{\partial \theta}{\partial t}$, pour l'intervalle $0 \leqq x \leqq l$.

Calculons maintenant le travail virtuel correspondant à une déformation infinitésimale du fil. Pour la définir, il suffit de donner la variation $\delta\theta$ en fonction de x. Sur l'élément $(x, x+dx)$ agit une percussion de composantes 0 et $\varpi(x)\,dx$. La somme des travaux virtuels sera

$$\int_0^l \varpi(x)\, \delta y \, dx,$$

où l'on doit prendre

$$\delta y = \int_0^x \delta\theta\, ds,$$

d'où l'expression du travail percutant

$$(5) \qquad \delta \mathfrak{T} = \int_0^l \left[dx\, \varpi(x) \int_0^x \delta\theta\, ds \right],$$

qui est bien, dans les conditions étudiées, la limite de (2).

Cela posé, l'intervention d'une infinité de degrés de liberté ne fait nullement obstacle à l'application de la méthode de Lagrange au problème actuel. C'est ce qu'on peut montrer en reprenant l'équation fondamentale de la dynamique des percussions

$$(6) \qquad \Sigma(m\,\Delta x' - P_x)\,\delta x + \Sigma(m\,\Delta y' - P_y)\,\delta y = 0$$

applicable à tous les systèmes satisfaisant à la condition des travaux virtuels. Nous rappellerons seulement qu'un fil flexible satisfait bien à cette condition. L'équation (6) doit être vérifiée pour tous les δx, δy compatibles avec les liaisons. Les liaisons consistent actuellement dans la condition de conservation des longueurs sur le fil. Pour l'exprimer, il est indiqué d'utiliser les valeurs (x, y) des coordonnées d'un point du fil exprimées pour chaque valeur s de l'abscisse curviligne à l'aide la fonction $\theta(s)$, car cette dernière, ainsi que sa variation $\delta\theta$, sont arbitraires. D'ailleurs, pour la position utile, nous avons $\delta x = 0$. L'équation (6) devient alors, en y remplaçant $\Delta\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)$ par sa valeur $\frac{\partial\theta}{\partial t}$,

$$\int_0^l \left\{ \left[\rho(x)\, dx \int_0^x \frac{\partial\theta}{\partial t}(s)\, ds - \varpi(x)\, dx \right] \int_0^x \delta\theta\, ds \right\} = 0,$$

où toute la quantité entre crochets doit être intégrée par rapport à x. Posons

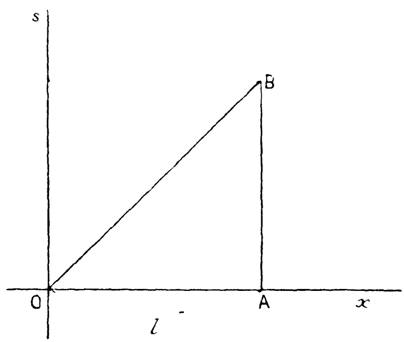
$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{\partial\theta}{\partial t}(s)\,ds$$

et cherchons d'abord $\varphi(x)$, c'est-à-dire la primitive de $\frac{\partial\theta}{\partial t}(x)$. Il faut écrire que l'on a

$$\int_0^l \left\{ [\rho(x)\varphi(x) - \varpi(x)] \int_0^x \delta\theta\,ds \right\} dx = 0,$$

quelle que soit la fonction $\delta\theta$ dans l'intervalle $(0, l)$. Or, d'après la formule de Lejeune-Dirichlet relative à

Fig. 2



une intégration dans le triangle OAB du plan $x\mathrm{O}s$, la condition précédente peut s'écrire

$$\int_0^l \delta\theta\,ds \int_s^l [\rho(x)\varphi(x) - \varpi(x)]\,dx = 0,$$

elle exige que l'on ait

$$(7) \qquad \int_s^l [\rho(x)\varphi(x) - \varpi(x)]\,dx = 0$$

quel que soit s, ou enfin que

$$\varphi(x) = \frac{\varpi(x)}{\rho(x)}.$$

On a donc finalement pour définir l'état des vitesses après la percussion

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\varpi}{\rho}\right). \tag{7 bis}$$

Il est clair que la formule (7) et la formule (7 *bis*) pourraient s'obtenir à partir des relations (3') et (3 *bis*) par passage à la limite.

Cet exemple se rattache à une théorie générale : extension des méthodes de la dynamique analytique aux systèmes comportant une infinité de degrés de liberté. Dans le cas où ces degrés sont en nombre fini, un problème de percussions conduit à la résolution d'un système d'équations linéaires, en nombre égal à celui des paramètres indépendants. Dans le cas d'une infinité de degrés de liberté, on pourra obtenir des équations intégrales linéaires ([1]) : ici, ces équations sont particulièrement simples et susceptibles d'une résolution immédiate.