NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BERTRAND GAMBIER

Problème de Poncelet et problème analogue (suite et fin)

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 281-293

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__281_0>

[L[1] 17d]

PROBLÈME DE PONCELET ET PROBLÈME ANALOGUE

(*suite et fin*);

PAR BERTRAND GAMBIER,
Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

8. Il est facile d'interpréter géométriquement les résultats exposés au paragraphe précédent; cela nous permettra même de résoudre un problème nouveau analogue à celui de Poncelet et en rapport étroit avec lui.

La substitution $(a_1, b_1, c_1; a_p, b_p, c_p)$ fait correspondre à un point du plan (a_1, b_1, c_1), rationnellement, un seul point (a_p, b_p, c_p); au point (a_p, b_p, c_p) correspondent inversement un groupe fini de points (a_1, b_1, c_1). Si le point (a_1, b_1, c_1) est pris au hasard dans le plan, l'itération de cette transformation, qui n'est ni birationnelle ni involutive, donne successivement les points

(52) $(a_1, b_1, c_1), \quad (a_p, b_p, c_p), \quad (a_{p^2}, b_{p^2}, c_{p^2}), \quad \ldots$

qui correspondent aux coniques

(43) $\qquad C_1, \quad C_p, \quad C_{p^2}, \quad \ldots$

définies au paragraphe 2 et formant une suite indéfinie. Si C_0 et C_1 admettent des polygones P_n, autrement dit si (a_1, b_1, c_1) appartient à la courbe d'équation

$$f_n(a_1, b_1, c_1) = 0,$$

les coniques (43) forment une suite périodique se reproduisant soit de n en n, soit de $\frac{n}{\delta}$ en $\frac{n}{\delta}$ où δ est un diviseur de n. On est ramené au problème bien connu d'étudier les restes, suivant le module n, de la suite

$$1 \quad p \quad p^2 \quad p^3 \quad \ldots$$

Dans le paragraphe précédent, nous n'avons envisagé la question que pour $p=2$; pour ne pas allonger, bornons-nous à ce cas $p=2$. C'est parce que nous devons remplacer a_1, b_1, c_1 par

$$\frac{1}{(B_1+C_1-A_1)^2}, \quad \frac{1}{(C_1+A_1-B_1)^2}, \quad \frac{1}{(A_1+B_1-C_1)^3},$$

que nous avons écrit les formules (33).

Si nous partons de la courbe S_{2n+1} d'équation

$$(36) \qquad f_{2n+1}(a_1, b_1, c_1) = 0,$$

les quatre points (A_1, B_1, C_1), (A'_1, B'_1, C'_1), (A''_1, B''_1, C''_1), (A'''_1, B'''_1, C'''_1) correspondant au même point (a_1, b_1, c_1) décrivent *quatre* courbes distinctes dont la première est S_{2n+1}, les autres étant S'_{2n+1}, S''_{2n+1}, S'''_{2n+1}. Il en résulte cette fois qu'au lieu d'étudier une *transformation plane qui n'est pas birationnelle*, nous avons une *transformation birationnelle de courbe à courbe* entre S_{2n+1} et $S^{(i)}_{2n+1}$ où i est l'un des entiers 0, 1, 2, 4. Bornons-nous à la transformation birationnelle ainsi obtenue sur S_{2n+1} : les quantités $\left(\frac{B_1}{A_1}, \frac{C_1}{A_1}\right)$ s'exprimant *rationnellement sur* S_{2n+1} *au moyen de* $\left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{c_1}{a_1}\right)$, il est nècessaire puisque

$$2A_1 = \frac{1}{\sqrt{b_1}} + \frac{1}{\sqrt{c_1}}, \quad 2B_1 = \frac{1}{\sqrt{c_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_1}}, \quad 2C_1 = \frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{b_1}}$$

que les expressions

$$\sqrt{b_1 c_1}, \quad \sqrt{c_1 a_1}, \quad \sqrt{a_1 b_1}$$

s'expriment rationnellement, sur S_{2n+1}, au moyen de (a_1, b_1, c_1).

La vérification est aisée pour le triangle, car

$$\begin{aligned} 3(a_1, b_1, c_1) &\equiv a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - 2b_1c_1 - 2c_1a_1 - 2a_1b_1 \\ &\equiv (-a + b_1 + c_1)^2 - 4b_1c_1 \\ &\equiv (\quad a_1 - b_1 + c_1)^2 - 4c_1a_1 \\ &\equiv (\quad a_1 + b_1 - c_1)^2 - 4a_1b_1. \end{aligned}$$

Nous allons même voir le moyen géométrique simple de définir cette correspondance birationnelle sur S_{2n+1} : le point (A_1, B_1, C_1) coïncide avec le point (a_n, b_n, c_n) déduit du point (a_1, b_1, c_1).

En effet, la droite $A_nA'_n$ relative au point A_0 de départ sur C_0 a pour équation [voir plus haut formules (16) et suivantes]

$$\alpha_n x \cos\varphi_0 + \beta_n y \sin\varphi_0 - \gamma_n = 0.$$

Elle est donc la polaire de $A_0(\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)$ par rapport à la conique

$$(\Gamma_n) \qquad \alpha_n x^2 + \beta_n y^2 - \gamma_n = 0.$$

Comme la conique C_{2n} coïncide avec C_1, on a

$$(44) \qquad a_1\alpha_n^2 = b_1\beta_n^2 = c_1\gamma_n^2$$

et ces équations prennent une forme plus simple si l'on pose comme plus haut

$$(45) \qquad a_1 = a^2, \qquad b_1 = b^2, \qquad c_1 = c^2.$$

En choisissant convenablement la détermination de a, b, c elles montrent que Γ_n n'est autre que la conique

$$(\Gamma) \qquad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - \frac{z^2}{c} = 0.$$

Or on peut remarquer que la conique Γ obtenue en prenant pour le point (a, b, c) l'une des quatre positions définie par (45) est telle que la polaire réciproque de C_0 par rapport à Γ soit C_1 ; l'enveloppe des droites coupées harmoniquement par C_0 et Γ a pour équation

$$(\overline{C_1}) \qquad \frac{x^2}{A_1} + \frac{y^2}{B_1} - \frac{1}{C_1} = 0,$$

où l'on a

$$(46) \quad 2A_1 = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \qquad 2B_1 = \frac{1}{c} + \frac{1}{a}, \qquad 2C_1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Mais alors les équations (45) et (46) reconstituent le système de départ (33). Ici l'une des quatre coniques Γ est précisément Γ_n, parce que C_{2n} et C_1 coïncident ; le pôle de $A_n A'_n$ est précisément A_0 de sorte que $A_0 A_n$ et $A_0 A'_n$ sont deux droites coupées harmoniquement par C_0 et Γ_n, donc tangentes à une conique $\overline{C_1}$ qui n'est autre que C_n : le nombre n est premier avec $2n+1$ de sorte que les droites joignant de n en n les sommets de P_{2n+1} sont toutes tangentes à C_n et forment le polygone P'_{2n+1} inscrit dans C_0, circonscrit à C_n (ou $\overline{C_1}$), les sommets consécutifs étant conjugués par rapport à Γ_n (ou Γ). Le point (A_1, B_1, C_1) qui sert à définir $\overline{C_1}$, c'est-à-dire C_n, coïncide donc avec (a_n, b_n, c_n) ; ce point (A_1, B_1, C_1) s'obtient donc bien rationnellement, sur S_{2n+1}, en tenant compte de l'équation de S_{2n+1}, au moyen du point (a_1, b_1, c_1). La substitution birationnelle ainsi trouvée sur S_{2n+1} n'est identique que pour le triangle $(n = 1)$; d'ailleurs écrire que (a_1, b_1, c_1), dans la transformation *plane*, coïncide avec son transformé (A_1, B_1, C_1) entraîne les équations

$$a(b^2 + c^2 - a^2) = b(c^2 + a^2 - b^2) = c(a^2 + b^2 - c^2)$$

qui n'ont d'autre solution commune que celles de

$$a + b + c = 0$$

et par suite font retrouver S_3. Le point (a_1, b_1, c_1) est d'ailleurs le point (A_2, B_2, C_2) déduit de (A_1, B_1, C_1) : en effet, si dans les formules (10) nous employons les grandes lettres A_1, B_1, C_1, et A_2, B_2, C_2, nous trouvons pour A_2, B_2, C_2 en fonction de A_1, B_1, C_1 les valeurs fournies pour a_1, b_1, c_1 en fonction de A_1, B_1, C_1 par les formules (33); or pour que la transformation birationnelle sur S_{2n+1} entre $(a_1\ b_1\ c_1)$ et $(A_1\ B_1, C_1)$ fût involutive, il faudrait que (a_1, b_1, c_1) coïncidât avec (A_n, B_n, C_n) : donc sur S_{2n+1} la transformation birationnelle est iuvolutive pour $n = 2$ (pentagone), mais ne l'est plus si $n \geqq 3$.

Le polygone P_{2n+1} se trouve être à lui-même son propre polaire réciproque relativement à cette conique Γ qui échange C_0 avec C_1 et le sommet A_0 avec la corde $A_n A_{n+1}$, côté opposé à A_0 dans P_{2n+1} ; or on voit aussitôt, géométriquement ou analytiquement par l'équation de $A_n A'_n$ et les équations (44), que, O_1 étant l'un des sommets du triangle T conjugué commun à C_0 et C_1, la droite $A_0 O_1$ perce C_0 en un point que j'appellerai B_n et qui est pôle de $A_n A_{n+1}$ par rapport à Γ' ; cette construction répétée sur chaque côté de P_{2n+1} donne un polygone de $4n + 2$ côtés

$$A_0 B_0 A_1 B_1 A_2 B_2 \ldots A_i B_i A_{i+1} B_{i+1} \ldots A_{2n+1} B_{2n+1} A_0$$

où B_i est le pôle de $A_i A_{i+1}$ et où deux sommets consécutifs sont conjugués par rapport à Γ', chaque côté touchant la conique enveloppe des sécantes coupées harmoniquement par C_0 et Γ'.

Nous avons ainsi trouvé l'interprétation géométrique des opérations analytiques effectuées.

Problème analogue au problème de Poncelet.

9. Ce qui précède montre l'intérêt du problème suivant : Étant données deux coniques C_0, Γ, dont on peut sans restreintre la généralité ramener les équations à la forme

$$(C_0) \qquad x^2+y^2-1=0,$$

$$(\Gamma) \qquad \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}-\frac{1}{c}=0,$$

existe-t-il un polygone π_n de n côtés inscrit dans C_0, dont les sommets consécutifs sont conjugués par rapport à Γ ?

S'il en est ainsi, les côtés de π_n enveloppent la conique C_1 enveloppe des droites coupées harmoniquement par C_0 et Γ; l'équation tangentielle de C_1 est

$$(C_1) \qquad u^2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+v^2\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)=w^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right),$$

et si l'on pose

$$(1) \qquad a_1=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}, \qquad b_1=\frac{1}{c}+\frac{1}{a}, \qquad c_1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b},$$

la conique C_1 a pour équation ponctuelle

$$(C_1) \qquad \frac{x^2}{a_1}+\frac{y^2}{b_1}-\frac{1}{c_1}=0.$$

Donc, nous reprendrons l'invariant $I_n(a_1, b_1, c_1)$ trouvé précédemment; nous y ferons la substitution (1) et nous aurons la condition nécessaire et suffisante d'existence de ∞^1 π_n en égalant le résultat à zéro. Inversement les formules (1) donnent

$$(2) \quad \frac{2}{a}=b_1+c_1-a_1, \quad \frac{2}{b}=c_1+a_1-b_1, \quad \frac{2}{c}=a_1+b_1-c_1,$$

de sorte que si C et C_1 admettent ∞^1 polygones P_n de Poncelet, il existe une conique Γ et une seule partageant harmoniquement les côtés. Il résulte de là qu'en joignant de p en p les côtés d'un polygone π_n, on retrouve un nouveau polygone de n ou $\frac{n}{\delta}$ côtés, de définition semblable.

C_0 et Γ étant données *a priori*, nous n'avons en général que les polygones *impropres et repliés*, déjà signalés, au nombre de 4. A ce point de vue, le point A_0 étant pris au hasard sur C_0, les cordes A_0A_1 et $A_0A'_1$ s'obtiennent en coupant C_0 par la polaire de A_0 relativement à Γ, d'où résultent A_1 et A'_1; pour que A_1 et A'_1 coïncident, il faut que cette polaire touche C_0, il faut donc que A_0 soit sur la conique γ polaire réciproque de C_0 par rapport à Γ : ces deux droites particulières A_0A_1 et $A_0A'_1$ sont d'ailleurs les tangentes issues de A_0 à C_1, de sorte que cet A_0 particulier se trouve sur C_1 : donc les points communs à C_0 et à la conique γ d'équation

$$(\gamma) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0$$

donnent les polygones impropres π_{2n} et sont les points de base du faisceau linéaire engendré par les coniques C_n. D'autre part, les tangentes à C_0 aux points communs à C_0 et Γ sont tangentes à C_1 : ce sont donc ces points qui fournissent les solutions impropres π_{2n+1}.

Ceci explique pourquoi la recherche d'un trièdre trirectangle, inscrit dans un cône du second degré quelconque C_0, donne toujours quatre solutions, impropres, en prenant une génératrice isotrope I du cône, puis encore une fois cette génératrice I, puis la génératrice nouvelle J où le plan tangent à C_0 le long de I coupe C_0; les trois droites I, I, J sont deux à deux perpendiculaires, mais ne forment pas un trièdre véritable.

Le *triangle* π_3 fournit la relation bien connue

$$(3)\qquad a+b+c=0.$$

Le *quadrilatère* conduit à trois relations du type $b_1+c_1-a_1=0$ ou $\frac{1}{a}=0$, ce qui n'a lieu que si Γ *dégénère en deux droites;* cela est clair *a priori*, car dans $A_0A_1A_2A_3$ la droite A_1A_3 a pour pôles A_0 et A_2 simultanément, de sorte que si A_0 et A_2 sont distincts, Γ se réduit à deux droites Δ et Δ_1 et les deux droites A_0A_2, A_1A_3 concourent au point double (Δ, Δ_1) et sont conjuguées par rapport à Δ et Δ_1. Par contre si π_4 n'existe pas en général, bien que P_4 existe, on constate que π_2 existe, bien que P_2 n'existe pas; il suffit que C_0 coïncide avec γ, de sorte que $a^2=b^2=c^2$ et la conique Γ est l'une des coniques

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} x^2+y^2+1&=0,\\ x^2-y^2-1&=0,\\ -x^2+y^2-1&=0.\end{aligned}\right.$$

Pour le *pentagone* au lieu de partir de l'invariant compliqué

$$I_5(a_1, b_1, c_1)$$

calculé précédemment, il suffit de remarquer que dans le pentagone π_5, $A_0A_1A_2A'_2A'_1A_0$, le côté $A_2A'_2$ est tangent à C_1; or la droite $A_2A'_2$ s'obtient en menant de A_0 les tangentes à la conique (γ) d'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{1}{c^2}=0,$$

de sorte que nous retrouvons ici un ealcul traité au paragraphe 4 : dans l'équation (8), on remplace a_1, b_1, c_1

par a^2, b^2, c^2 et l'on a ici pour équation de $A_2A'_2$

$$(5)\qquad \begin{aligned} & x(b^2+c^2-a^2)\cos\varphi_0 \\ & +y(c^2+a^2-b^2)\sin\varphi_0 = a^2+b^2-c^2. \end{aligned}$$

La condition de contact avec C_1 fournira la condition vraie pour π_5 et la condition parasite relative à π_3. On a

$$(6)\qquad \begin{aligned} & (b^2+c^2-a^2)^2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\cos^2\varphi_0 \\ & +(c^2+a^2-b^2)^2\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)\sin^2\varphi_0 \\ & =(a^2+b^2-c^2)^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right). \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$(7)\qquad T \equiv a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2,$$

la condition pour que (6) soit *identique* en φ_0 est

$$(8)\qquad \begin{aligned} & (T+4b^2c^2)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \\ & =(T+4c^2a^2)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right) \\ & =(T+4a^2b^2)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right). \end{aligned}$$

La première équation (8) donne

$$T\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)=4ac(a+c)-4bc(b+c)$$

ou

$$(a-b)[T-4abc(a+b+c)]=0.$$

Les équations (8) exigent donc

$$T=4abc(a+b+c)$$

et en supprimant la solution parasite $a+b+c=0$ du triangle,

$$(9)\qquad (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)+4abc=0.$$

10. Puisque dans un polygone π_n chaque sommet tel que A_0 est le pôle relativement à Γ de la diagonale $A_1A'_1$ joignant les sommets consécutifs à A, il en résulte que l'existence d'un π_{2n} relatif à C_0 et Γ revient à l'existence d'un P_n relatif à C_0 et γ, obtenu en joignant de deux en deux les sommets de π_{2n}. Donc la condition

$$(10) \qquad f_n(a_1, b_1, c_1) = 0,$$

relative à un P_n deviendra la condition

$$(11) \qquad f_n(a^2, b^2, c^2) = 0$$

relative à un π_{2n}; mais la condition (11) relative à un π_{2n} entraîne la condition

$$(12) \quad f_n\left[\frac{1}{(b_1+c_1-a_1)^2}, \frac{1}{(c_1+a_1-b_1)^2}, \frac{1}{(a_1+b_1-c_1)^2}\right] = 0,$$

relative aux P_{2n} pour C_0 et C_1. Nous avons donc retrouvé d'une façon intuitive les circonstances déjà signalées. Nous savons que si n est pair, en supposant f_n relatif à une seule série de P_n, l'équation (11) ne se décompose pas. Nous savons que si n est impair, l'équation (11) contient une solution impropre relative à un π_n parcouru deux fois; un facteur, propre, à conserver est alors, n étant impair,

$$f_n(a_1, a_1 - b_1, a_1 - c_1) = 0$$

ou, pour avoir un π_{2n} relatif à C_0 et Γ,

$$(13) \qquad f_n\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \frac{1}{b} - \frac{1}{a}, \frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) = 0.$$

Inversement la condition d'existence d'un π_n (C_0, Γ) étant

$$(14) \qquad \varphi_n(a, b, c) = 0.$$

on a la condition d'existence d'un P_n (C_0, C_1)

$$(15) \quad \varphi_n\left(\frac{1}{b_1 + c_1 - a_1}, \frac{1}{c_1 + a_1 - b_1}, \frac{1}{a_1 + b_1 - c_1}\right) = 0,$$

et par suite la condition d'existence d'un π_{2n} (C_0, Γ)

$$(16) \quad \varphi_n\left(\frac{1}{b^2+c^2-a^2}, \frac{1}{c^2+a^2-b^2}, \frac{1}{a^2+b^2-c^2}\right) = 0.$$

Les mêmes remarques ont lieu : si n est impair, l'équation (16) se décompose rationnellement en quatre facteurs, dont l'un, impropre, reproduit φ_n (a, b, c); mais alors les facteurs propres sont obtenus d'une façon remarquablement simple :

$$(17) \quad \begin{cases} \varphi_n(-a, \quad b, \quad c) = 0, \\ \varphi_n(\quad a, -b, \quad c) = 0, \\ \varphi_n(\quad a, \quad b, -c) = 0. \end{cases}$$

Si n est pair, ce procédé ne réussit plus, l'équation (16) ne se décompose pas.

Appliquons ceci à l'*hexagone* : le triangle donne $a+b+c=0$. Donc l'hexagone donne

$$(18) \quad (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) = 0.$$

Mais alors nous retrouvons un résultat obtenu comme condition des quadrilatères P_4 relatifs à C_0 et Γ; C_0 *et* Γ *admettent simultanément des quadrilatères* P_4 *et des hexagones* π_6. Il est facile de vérifier géométriquement ce fait par la géométrie; C_0 et Γ peuvent être réduits à deux cercles dont le second a son centre ω_1 sur C_0; prenons un point A_0 de C_0 et menons une corde arbitraire $A_1A'_1$ de C_0 perpendiculaire à $A_0\omega_1$; le cercle ω_1 se trouve pleinement déterminé par la condition que A_0 soit pôle de $A_1A'_1$; la droite A_0A_2 est alors la perpendiculaire abaissée de A_0 sur ω_1A_1 de sorte que les angles $A'_1A_1\omega_1$ et $A_2A_0\omega_1$ sont égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires, et par suite les arcs $\omega_1A'_1$ et ω_1A_2 sont égaux; dans la chaîne $A'_1A_0A_1A_2$ on aboutit par trois chaînons au point A_2

symétrique de A'_1 par rapport à la ligne des centres, donc la continuation de la chaîne par trois chaînons nouveaux reconduit de A_2 en A'_1 et l'hexagone π_6 est formé; la fermeture des P_4 est d'ailleurs immédiate (le lecteur fera sans peine la figure).

On peut faire ici l'applicatiou d'une propriété générale citée par Halphen : nous avons vu plus haut que l'on peut, de quatre façons différentes, trouver une conique directrice d'une transformation par polaires réciproques échangeant C_0 et Γ : donc il existe ∞^1 hexagones circonscrits à Γ, deux côtés consecutifs de cet hexagone étant conjugués par rapport à C_0. Cela fait donc un ensemble de *trois* proprietés géométriques distinctes réalisées par le couple C_0, Γ et traduites par l'*unique* relation $b+c-a=o$.

Le cas de l'*octogone* π_8 est immédiat, puisque le quadrilatère P_4 donne, comme on l'a vu,

$$(b_1+c_1-a_1)(c_1+a_1-b_1)(a_1+b_1-c_1)=0.$$

On a donc pour π_8

$$(19)\qquad (b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0.$$

Si nous prenons par exemple deux cercles C_0 et Γ de rayon R et R_1 respectivement, la distance des centres étant D,

$$(C_0)\qquad x^2+y^2-2a\,x+c=0,$$
$$(\Gamma)\qquad x^2+y^2-2a'x+c=0,$$

nous écrirons entre les racines de l'équation en λ du faisceau $C_0-\lambda\Gamma=0$ l'égalité $\lambda_2^3=\lambda_1^2+\lambda_2^2$; en prenant

$$\lambda_3=1,\qquad \lambda_1+\lambda_2=\frac{R^2+R_1^2-D^2}{R_1^2},\qquad \lambda_1\lambda_2=\frac{R^2}{R_1^2}.$$

On trouve ainsi

$$(20)\qquad D^2-R^2=\pm DR_1\sqrt{2}.$$

Soient donc O le centre de C_0 et ω_1, ω_2 deux points inverses l'un de l'autre par rapport à C_0, ω_1 étant intérieur à C_0 et T étant le point de contact avec C_0 d'une tangente issue de ω_2. Si l'on prend le centre de Γ en ω_2, on a

$$D^2 - R^2 = \omega_2 T^2 = D \times \omega_1 \omega_2, \qquad R_1 = \frac{\omega_1 \omega_2}{\sqrt{2}}.$$

Si l'on prend le centre de Γ en ω_1, on a

$$-(D^2 - R^2) = \omega_1 T^2 = D \times \omega_1 \omega_2, \qquad R_1 = \frac{\omega_1 \omega_2}{\sqrt{2}}.$$

Donc on peut choisir le centre de Γ arbitrairement soit à l'intérieur, soit à l'extérieur de C_0, le rayon de Γ est égal au quotient par $\sqrt{2}$ de la distance du centre de Γ au pied de sa polaire.