W. STOZEK

Remarque sur une inégalité concernant les modules des racines d'une équation quelconque

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 252-255

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__252_0>

REMARQUE SUR UNE INÉGALITÉ CONCERNANT LES MODULES DES RACINES D'UNE ÉQUATION QUELCONQUE ;

PAR M. W. STOZEK.

M. K. P. Williams, dans ses notes insérées dans le *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1914, 1922, New-York, a déduit certaines inégalités relatives aux modules des racines d'une équation algébrique, en se servant des déterminants et de l'inégalité de M. Hadamard. On peut, cependant, démontrer ces inégalités par des méthodes élémentaires de la façon suivante :

Envisageons l'équation

$$(1) \qquad W_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

L'équation

$$(2) \qquad (x - t) W_n(x) = 0,$$

où t désigne un paramètre arbitraire, possède toutes les racines de l'équation (1), et en plus, la racine $x = t$. Il en résulte que la borne supérieure des modules des racines de l'équation (2), pour toutes les valeurs du paramètre t, doit être en même temps une borne supérieure des modules des racines de l'équation (1). Pour obtenir cette borne supérieure, mettons l'équation (2) sous la forme

$$(3) \qquad x^{n+1} + (a_1 - t)x^n + (a_2 - ta_1)x^{n-1} + \ldots + (a_n - ta_{n-1})x - ta_n = 0.$$

Supposons, dans la suite, que nous nous occupions seulement des racines de l'équation (3), qui satisfont à l'inégalité

$$(4) \qquad |x| > 1.$$

Nous obtenons de l'équation (3)

$$x = (t - a_1) + (t.a_1 - a_2)\frac{1}{x} + \dots$$
$$+ (t.a_{n-1} - a_n)\frac{1}{x^{n-1}} + t.a_n\frac{1}{x^n};$$

d'où

$$|x| \leqq |t - a_1|.1 + |t.a_1 - a_2|\frac{1}{|x|} + \dots$$
$$+ |t.a_{n-1} - a_n|\frac{1}{|x|^{n-1}} + |t.a_n|\frac{1}{|x|^n}$$

ou bien, en appliquant l'inégalité de Schwartz,

$$(5) \quad |x|^2 \leqq [|t - a_1|^2 + |t.a_1 - a_2|^2 + \dots$$
$$+ |t.a_{n-1} - a_n|^2 + |t.a_n|^2]\frac{1 - \frac{1}{|x|^{2n+2}}}{1 - \frac{1}{|x|^2}}.$$

Mais il résulte de l'inégalité (4) que

$$1 - \frac{1}{|x|^2} > 0.$$

Donc, en multipliant les deux membres de l'inégalité (5) par $1 - \frac{1}{|x|^2}$, nous trouverons

$$|x|^2 - 1 \leqq [|t - a_1|^2 + |ta_1 - a_2|^2 + \dots$$
$$+ |ta_{n-1} - a_n|^2 + |ta_n|^2]\left[1 - \frac{1}{|x|^{2n+2}}\right];$$

d'où, en augmentant le second membre, nous obtenons

$$(6) \quad |x| \leqq [1 + |t - a_1|^2 + |ta_1 - a_2|^2 + \dots$$
$$+ |ta_{n-1} - a_n|^2 + |ta_n|^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Cette inégalité a été déduite sous l'hypothèse (4), mais il résulte de sa forme même qu'elle est vraie aussi pour les racines de l'équation (1) ou (2), pour lesquelles $|x| < 1$, c'est-à-dire que l'inégalité (6) est vraie pour toutes les racines de l'équation (1) ou (2). En posant dans l'inégalité (6) $t = 0$, puis $t = 1$, nous trouvons comme bornes supérieures des modules des racines de l'équation (1) :

$$(7) \quad |x| \leqq \sqrt{1 + |a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2},$$

$$(8) \quad |x| \leqq \sqrt{1 + |1 - a_1|^2 + \ldots + |a_{n-1} - a_n|^2 + |a_n|^2} \quad (^1).$$

Il reste encore à savoir pour quelles valeurs du paramètre t, le second membre de l'inégalité (6) atteint son minimum.

Si nous posons

$$a_p = \alpha_p + i\beta_p \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$
$$t = \xi + i\eta,$$

un calcul facile montre qu'il existe toujours un seul minimum pour

$$(9) \quad \begin{cases} \xi = \dfrac{\alpha_1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \alpha_{k+1} + \beta_k \beta_{k+1})}{1 + \sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha_k^2 + \beta_k^2)}, \\[2ex] \eta = \dfrac{\beta_1 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \beta_{k+1} - \beta_k \alpha_{k+1})}{1 + \sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha_k^2 + \beta_k^2)}. \end{cases}$$

---

(1) J'avais d'abord déduit l'inégalité (7) directement de l'équation (1), et l'inégalité (8) de l'équation $(x - 1) W_n(x) = 0$. C'est M. S. Banach qui m'a conseillé d'introduire le paramètre t.

Donc, si le minimum a lieu pour un $t = \xi + i\eta$ dont le module diffère peu de zéro, l'inégalité (7) est meilleure que l'inégalité (8); si, au contraire, le minimum a lieu pour un t dont le module diffère peu de l'unité, l'inégalité (8) est meilleure que l'inégalité (7). Évidemment, nous obtenons la meilleure des inégalités (6) en y faisant $t = \xi + i\eta$, où ξ et η sont définis par les formules (9) [1].

---

[1] *Note de la rédaction.* — Nous donnons ici le calcul indiqué par M. Stozek. Utilisant ses notations nous poserons $a_p = \alpha_p + i\beta_p$, mais nous donnerons à p toutes les valeurs entières de -1 à $+n+1$, en posant

$$a_0 = 1, \qquad a_{-1} = a_{n+1} = 0$$

La quantité qui figure entre crochets au second membre de (6) est

$$m = \sum_{-1}^{n} |a_p t - a_{p+1}|^2$$

$$= \sum_{-1}^{n} [(\alpha_p\xi - \beta_p\eta - \alpha_{p+1})^2 + (\beta_p\xi + \alpha_p\eta - \beta_{p+1})^2].$$

Donc

$$m = A(\xi^2 + \eta^2 + 1) - 2B\xi - 2C\eta,$$

avec

$$A = \sum_{-1}^{n} (\alpha_p^2 + \beta_p^2),$$

$$B = \sum_{-1}^{n} (\alpha_p\alpha_{p+1} + \beta_p\beta_{p+1}),$$

$$C = \sum_{-1}^{n} (\alpha_p\beta_{p+1} - \beta_p\alpha_{p+1}).$$

Le minimum m_0 de m, et les valeurs ξ_0 et η_0 qui le fournissent, sont donnés par

$$A\xi_0 - B = 0, \qquad A\eta_0 - C = 0, \qquad -B\xi_0 - C\eta_0 + A = m_0;$$