NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Agrégation des sciences mathématiques (1924)

Nouvelles annales de mathématiques 5e série, tome 3 (1924), p. 220-238

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1924_5_3__220_1>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (1924).

Compositions de Mathématiques spéciales.

Soit (C) *la courbe* plane *définie en axes rectangulaires par les équations*

$$(C) \qquad x = at^3 + bt^2 - x_0 t, \qquad y = a't^3 + b't^2 - y_0 t;$$

a, b, a', b' *sont des constantes données;* x_0 *et* y_0 *sont les coordonnées d'un point* M_0 *qui pourra se déplacer.*

I. *Démontrer que la courbe* (C) *n'a un point de rebroussement que si le point* M_0 *se trouve sur une parabole* (P). *Quel est, dans ce cas, le lieu géométrique de ce point de rebroussement et quelle est la courbe enveloppe de la tangente de rebroussement? A quelle condition cette enveloppe est-elle la développée d'une parabole?*

II. M_0 *étant un point quelconque du plan, la*

(1) Ainsi le signe $\sim$, qui devrait être d'un usage courant, est à peine connu des élèves. Il faut par contre, évidemment, éviter l'erreur, fréquente également, qui consiste à créer un langage pour avoir le plaisir de s'en servir. Un mot nouveau doit être introduit lorsque le besoin s'en fait sentir, et dans ce cas seulement.

courbe (C) *admet un point double* ω. *Dans quelle région doit-on choisir le point* M_0 *pour que* ω *soit un point double réel? Calculer les coordonnées du point* ω *en fonction de celles du point* M_0 *et montrer qu'à un point* ω *correspond en général un point* M_0 *et un seul. Quel est le cas d'exception? Où se trouvent alors les points tels que* M_0?

III. *La différentielle de l'arc de la courbe* (C) *se met sous la forme*

$$ds = \sqrt{F(t)}\, dt,$$

où $F(t)$ *est un polynome du quatrième degré en* t. *Comment choisir le point* M_0 *pour que la courbe* (C) *soit rectifiable; c'est-à dire pour que* $F(t)$ *soit le produit d'un polynome du second degré par le carré d'un facteur linéaire, ou pour que* $F(t)$ *soit le carré d'un polynome du second degré?*

IV. *On remplace, dans la question précédente, la courbe* (C) *par la courbe* gauche (Γ) *définie en axes rectangulaires par les équations*

$$(\Gamma) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= at^3 - bt^2 - x_0 t,\\ y &= a't^3 + b't^2 - y_0 t,\\ z &= a''t^3 + b''t^2 - z_0 t: \end{aligned}\right.$$

x_0, y_0, z_0 *désignent les coordonnees d'un point* M_0.

On représente encore par $\sqrt{F(t)}\, dt$ *la différentielle de l'arc de la courbe* (Γ).

Démontrer que $F(t)$ *n'est le produit d'un polynome du second degré par le carré d'une fonction linéaire, que si* M_0 *est sur une parabole* (II) *et que, dans ce cas, la courbe* (Γ) *est une courbe plane.*

Démontrer que, si $F(t)$ *est le carré d'un polynome du second degré, le point* M_0 *est sur une parabole* (II') *et que la courbe* (Γ) *est alors une hélice.*

On vérifiera que les plans de (II) *et de* (II′) *sont rectangulaires et l'on calculera les coordonnées de leurs sommets et de leurs foyers.*

V. *Les deux points* M_0 *et* ω *étant reliés par la correspondance précitée (voir* II), *si le premier décrit une courbe* (Q), *le second se déplace sur une courbe* (ϖ). *On demande de choisir* (Q) *de telle sorte que les tangentes à ces deux courbes, aux points associés* M_0 *et* ω, *soient parallèles.*

On déterminera l'enveloppe des courbes (Q) *ainsi obtenues et celle des courbes* (ϖ) *correspondantes.*

SOLUTION PAR M. BERTRAND GAMBIER,
Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

Supposons d'abord

$$ab' - ba' \neq 0.$$

Il est commode, pour résoudre la question I qui a, presque tout entière, un caractère nettement projectif, de considérer en même temps que les points (x, y) ou (x_0, y_0) les points respectivement correspondants (X, Y) ou (X_0, Y_0), dont les coordonnées, par rapport aux mêmes axes rectangulaires, sont définies par les formules

$$(1)\qquad \begin{cases} x = a\,X + b\,Y, & x_0 = a\,X_0 + b\,Y_0, \\ y = a'X + b'Y, & y_0 = a'X_0 + b'Y_0. \end{cases}$$

Ces formules definissent une transformation homographique très simple, conservant l'origine et la droite de l'infini. La courbe C est remplacée par une autre $\overline{C}$, admettant ou non un point de rebroussement, dans les mêmes conditions que C.

Le point M_0 est remplacé par un point $\overline{M}_0$ décrivant une parabole $\overline{P}$ et l'on remonte aisément à la figure primitive par les formules inverses

$$(2)\qquad \begin{cases} X = \dfrac{b'x - by}{ab' - ba'}, & X_0 = \dfrac{b'x_0 - by_0}{ab' - ba'}; \\[2ex] Y = \dfrac{-a'x + ay}{ab' - ba'}, & Y_0 = \dfrac{-a'x_0 + ay_0}{a'b' - ba}. \end{cases}$$

Les équations paramétriques de $\overline{C}$ sont, *sans avoir besoin de résoudre le moindre système linéaire*, évidemment

$$(\overline{C})\qquad X = t^3 - tX_0, \qquad Y = t^2 - tY_0.$$

Pour que $\overline{C}$ (ou C) ait un point de rebroussement au point de paramètre θ il faut et il suffit que

$$(2)\qquad X_0 = 3\theta^2, \qquad Y_0 = 2\theta.$$

Ce sont les équations paramétriques de la parabole $\overline{P}$:

$$(2')\quad (\overline{P})\qquad 4X_0 = 3Y_0^2.$$

Le point de rebroussement (R_0) a pour coordonnées

$$(3)\qquad X_1 = -2\theta^3, \qquad Y_1 = -\theta^2.$$

Ce sont les équations paramétriques de la courbe $(\overline{R})$:

$$(\overline{R})\qquad X_1^2 + 4Y_1^3 = 0.$$

Entre les coordonnées de $\overline{M}_0$ et $\overline{R}_0$ ont lieu les relations

$$(4)\qquad \begin{cases} Y_1 = -\dfrac{X_0}{3}, & X_1 = -\dfrac{X_0 Y_0}{3}, \\[2ex] X_0 = -3Y_1, & Y_0 = \dfrac{X_1}{Y_1} \end{cases}$$

qui définissent une *transformation quadratique birationnelle.*

Les courbes particulières $(\overline{C})$, (ou C), qui admettent un point de rebroussement, forment donc une famille à un paramètre (θ) défini par les équations paramétriques

$$(\overline{C_\theta})\qquad X = t^3 - 3\theta^2 t, \qquad Y = t^2 - 2\theta t.$$

Les paramètres directeurs X'_t, Y'_t de la tangente contiennent le facteur $t - \theta$, correspondant au point de rebroussement et entraînant la diminution d'une unité pour la classe de $\overline{C}_\theta$ relativement à la classe de la courbe $\overline{C}$ générale : la suppression de ce facteur permet de prendre pour paramètres, en un point quelconque

$$\left[\frac{3}{2}(t+\theta),\ 1\right]$$

et, par suite, au point de rebroussement $(3\theta,\ 1)$: mais alors on constate que ce sont aussi les paramètres directeurs de la tangente à $\overline{R}$ au même point. Conclusion : *Le lieu du point de rebroussement, l'enveloppe de la tangente de rebroussement, l'enveloppe de la courbe $\overline{C}_\theta$ coïncident avec la courbe* $(\overline{R})$. *La correspondance par points* $\overline{M}_0$ *et* $\overline{R}_0$ *entre* $(\overline{P})$ *et* $(\overline{R})$ *a lieu, de plus, par tangentes parallèles.*

En revenant aux points ou courbes primitives, les mêmes propriétés ont lieu : les formules (1) donnent immédiatement les équations paramétriques de (P), (R) ou (C_θ) et les formules (1') les équations explicites de ces courbes. Ceci nous permet d'ailleurs de résoudre l'unique partie de la question 1 qui n'a plus le caractère projectif.

La relation

$$ab + a\,b' = 0$$

est nécessaire et suffisante pour que l'enveloppe (R) *soit la développée d'une parabole.*

En effet, (R) a pour équations paramétriques

$$\text{(R)} \qquad x = -2a\theta^3 - b\theta^2, \qquad y = -2a'\theta^3 - b'\theta^2$$

et l'on calcule l'arc s par la formule

$$\text{(5)} \qquad \frac{ds}{dt} = 2\theta\sqrt{(3a\theta + b)^2 + (3a'\theta + b')^2}\,.$$

On suppose $ab' - ba' \neq 0$: donc le trinome en θ

sous le radical n'est pas carré parfait. Si l'on suppose $ab + a'b' = 0$, on a aussitôt

$$ds = 3\sqrt{a^2 + a'^2}\sqrt{\theta^2 + \frac{b^2 + b'^2}{9(a^2 + a'^2)}}\, d(\theta^2),$$

$$s = 2\sqrt{a^2 + a'^2}\left[\theta^2 + \frac{b^2 + b'^2}{9(a^2 + a'^2)}\right]^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2[(3a\theta + b)^2 + (3a'\theta + b')^2]^{\frac{3}{2}}}{27(a^2 + a'^2)}$$

et l'on constate sans peine que la courbe définie par les formules

$$x = \frac{2(3a\theta + b)}{27(a^2 + a'^2)}[(3a\theta + b)^2 + (3a'\theta + b')^2] - 2a\,\theta^3 - b\,\theta^2,$$

$$y = \frac{2(3a'\theta + b')}{27(a^2 + a'^2)}[(3a\theta + b)^2 + (3a'\theta + b')^2] - 2a'\theta^3 - b'\theta^2$$

est une parabole et admet (R) comme développée.

Si $ab + a'b' = 0$, on voit aussi que la parabole P a son sommet à l'origine.

On constate aisément que l'intégrale

$$\int (u + \lambda)\sqrt{u^2 + \mu}\, du$$

n'est algébrique que si $\lambda\mu = 0$, de sorte que, sans insister davantage, on constate que la condition $ab + a'b' = 0$, démontrée *suffisante*, est aussi *nécessaire*. On peut d'ailleurs remarquer que si l'on fait tourner les axes Ox, Oy autour de l'origine, les quantités (x, y), (a, a'), (b, b'), (x_0, y_0) sont soumises à la même transformation linéaire et homogène, de sorte que l'hypothèse $ab + a'b' = 0$ permet, par une rotation d'axes préliminaires, de supposer $b = 0$, $a' = 0$ sans diminuer la généralité ; je n'insisterai pas davantage sur ce point et la liaison avec les transformations homographiques ou les coordonnées trilinéaires.

Si l'on suppose $ab' - ba' = 0$, on écarte le cas où a, a' seraient nuls tous deux et où (C) se réduirait à une parabole; si donc $a \neq 0$, on peut écrire $b = ma$, $b' = ma'$, puis

$$(\mathrm{C}) \qquad x = at^3 + bt^2 - x_0 t, \qquad y = mx - (y_0 - mx_0)t.$$

Si donc $y_0 - mx_0 = 0$, la courbe C se réduit à la droite $y - mx = 0$; si $y_0 - mx_0 \neq 0$, la courbe C admet un point de rebroussement *indépendant de* x_0, y_0, rejeté à l'infini dans la direction $(1, m)$; la tangente de rebroussement est la droite de l'infini.

II et V. Opérons pour ces deux questions, uniquement avec les variables (X, Y) ou (X_0, Y_0).

II. Le cas $ab' - ba' = 0$ est écarté. Les constantes a, b, a', b', x_0, y_0 sont supposées réelles. La cubique C, unicursale, admet un point double, unique, donc *à coordonnées toujours réelles, isolé ou non isolé, suivant que les valeurs du paramètre*, t_1 *et* t_2, *qui leur correspondent sont imaginaires conjuguées ou réelles*.

Les équations $X(t_1) = X(t_2)$ et $Y(t_1) = Y(t_2)$ ayant été débarrassées du facteur $t_1 - t_2$, on a aisément

$$(1) \qquad \begin{cases} t_1 + t_2 = Y_0 \\ t_1 t_2 \quad = Y_0^2 - X_0 \end{cases} \qquad t_1 - t_2 = \varepsilon\sqrt{4X_0 - 3Y_0^2}.$$

Pour que ω soit point double, non isolé, on a la condition

$$4X_0 - 3Y_0^2 \geqq 0,$$

de sorte que la séparatrice est, comme juste, la parabole $(\overline{\mathrm{P}})$. Les coordonnées (X', Y') du point double ω sont

$$\frac{1}{2}[X(t_1) + X(t_2)], \qquad \frac{1}{2}[Y(t_1) + Y(t_2)],$$

de sorte que l'on obtient aisément

$$(2) \qquad X' = Y_0(X_0 - Y_0^2), \qquad Y' = X_0 - Y_0^2,$$

d'où l'on déduit aisément

$$(2') \qquad Y_0 = \frac{X'}{Y'}, \qquad X_0 = Y' + \frac{X'^2}{Y'^2}.$$

Les formules (2), (2') définissent une transformation birationnelle entre les deux systèmes de variables (X_0, Y_0) et (X', Y').

A un point $M_0(X_0, Y_0)$ correspond un seul point $\omega(X', Y')$ par les formules (2). Si X' et Y' ne sont pas nulles toutes deux, les formules (2') donnent inversement un point M_0 et un seul, correspondant à un point ω donné; mais si ω coïncide avec l'origine, les formules (2') deviennent illusoires et l'on s'aperçoit, par les formules (2), que les points correspondants M_0 sont répartis sur la parabole d'équation

$$(3) \qquad X_0 - Y_0^2 = 0.$$

Si l'on étudie les formules (2), (2') du point de vue des transformations birationnelles, sans nous préoccuper davantage de la question qui les a introduites, on remarque que chaque droite de l'un des plans (X_0, Y_0) ou (X', Y') est transformée en cubique dans l'autre. Les formules de transformation peuvent s'écrire avec des coordonnées homogènes

$$\begin{array}{ll} (4) & \left\{ \begin{array}{lll} X_0 = X'^2 Z' + Y'^3, & Y_0 = X'Y'Z', & Z_0 = Y'^2 Z', \\ X' = Y_0(X_0 Z_0 - Y_0^2), & Y' = (X_0 Z_0 - Y_0^2) Z_0, & Z' = Z_0^3, \end{array} \right. \\ (4') & \end{array}$$

Les points fondamentaux du plan (X_0, Y_0) se réduisent à l'unique point à l'infini sur l'axe des X_0; les formules (2) montrent que, pour X_0 infini et Y_0 fini, le point (X', Y') est rejeté à l'infini dans la direction (Y_0, 1) de sorte qu'au point à l'infini de l'axe des X_0 correspond toute la droite de l'infini du plan (X', Y'); c'est ici qu'apparaît l'utilité des formules homogènes (4), (4'). Servons-nous en effet de ces dernières : nous voyons qu'au point $Y_0 = Z_0 = o$ (point à l'infini de l'axe des X_0) correspond, soit $Z' = o$, et c'est ce qui vient d'être étudié (X_0 devenant infini et Y_0 restant fini, si l'on emploie les coordonnées non homogènes), soit $Y' = o$; d'après ce qui vient d'être dit, il est nécessaire dans cette dernière hypothèse que les coordonnées non homogènes X_0, Y_0 deviennent infinies toutes deux, de façon que la différence $Y_0^2 - X_0$ tende vers zéro (branche parabolique dans la direction de l'axe des X_0); par exemple, si le point (X_0, Y_0) décrit la courbe

$$X_0 = Y_0^2 + \frac{k}{Y_0},$$

où k est une constante numérique, les coordonnées non homogènes X' et Y' tendent respectivement vers k et o, quand Y_0 devient infini et l'on obtient ainsi, en faisant varier k, tous les points de la droite $Y' = o$: on a donc deux droites et non une, correspondant au point à l'infini de l'axe X_0.

Les points fondamentaux du plan (X', Y') sont l'origine, à laquelle correspond toute la parabole $X_0 - Y_0^2 = o$, puis le point à l'infini sur l'axe X'. Si l'on se donne un chemin *déterminé* arrivant à l'origine $X' = Y' = o$ avec une tangente *bien déterminée* de pente m, on a le point $X_0 = m^2$, $Y_0 = m$ susceptible de parcourir toute la parabole $X_0 - Y_0^2 = o$. Si l'on donne, en coordonnées non homogènes, à X' une valeur infinie et à Y' une valeur finie, X_0 et Y_0 sont infinis de sorte que $\frac{Y_0}{X_0}$ soit nul : on a donc le point à l'infini de l'axe X_0; si l'on fait grandir X' et Y' indéfiniment de façon que le rapport $\frac{Y'}{X'}$ tende vers zéro, le point (X', Y') s'éloigne à l'infini dans la direction de l'axe des X', les quantités X_0 et Y_0 augmentent indéfiniment et l'on a

$$\frac{X_0}{Y_0} = \frac{Y'^3 + X'^2}{Y'X'}.$$

Si donc on fait parcourir au point (X', Y') la courbe d'équation

$$Y'^3 + X'^2 = m Y'X',$$

où m est une constante, le point (X_0, Y_0) décrit la droite de pente $\frac{1}{m}$ issue de l'origine et quand le point (X', Y') s'éloigne à l'infini sur cette courbe, le point (X_0, Y_0) s'éloigne aussi à l'infini sur la droite en jeu : donc au point à l'infini de l'axe X' correspond la droite de l'infini du plan X_0, Y_0.

V. Pour ne pas rompre le cours des idées, traitons maintenant V. Rappelons que $\overline{M}_0$ a pour coordonnées (X_0, Y_0) et ω (X', Y') avec les formules

$$(\mathrm{T}) \qquad \begin{cases} X' = Y_0(X_0 - Y_0^2), & Y' = X_0 - Y_0^2, \\ Y_0 = \dfrac{X'}{Y'}, & X_0 = Y' + \dfrac{X'^2}{Y'^2}. \end{cases}$$

Quand le point $\overline{M}_0$ vient de la parabole P, le point ω vient en un point $\overline{R}_0$ de $(\overline{R})$, la courbe $\overline{C}$ ayant un rebroussement en $\overline{R}_0$ et nous avons remarqué que les tangentes en $\overline{M}_0$ et $\overline{R}_0$ aux deux courbes $(\overline{P})$ et $(\overline{R})$ sont parallèles : ces deux courbes se correspondent dans la transformation birationnelle actuelle; nous avons vu plus haut que $(\overline{P})$ et $(\overline{R})$ se correspondent aussi dans une autre transformation birationnelle, mais quadratique.

La transformation (T) remplace une courbe *quelconque* de l'un des plans, de degré m, par une courbe de degré $3m$ de l'autre plan, admettant les points fondamentaux de ce plan avec un certain degré de multiplicité; si la courbe à transformer, au lieu d'être *quel-*

conque, passe par les points fondamentaux, le degré de la courbe correspondante s'abaisse. Pour que les tangentes aux points homologues de deux courbes transformées soient parallèles, il faut que l'on ait *constamment* sur ces deux courbes

$$\frac{dY'}{dX'} = \frac{dY_0}{dX_0}. \tag{1}$$

Ceci donne, en conservant les variables X_0, Y_0,

$$dX_0^2 - 3Y_0\,dY_0\,dX_0 + (3Y_0^2 - X_0)\,dY_0^2 = 0 \tag{2}$$

C'est une équation différentielle du premier ordre à laquelle doit satisfaire la courbe (Q) décrite par le point M_0. Cette equation prend immédiatement, en la resolvant par rapport à $\frac{dX_0}{dY_0}$, la forme

$$\frac{dX_0 - \frac{3}{2}Y_0\,dY_0}{\sqrt{X_0 - \frac{3}{4}Y_0^2}} = \pm\, dY_0 \tag{3}$$

manifestement intégrable : on obtient ainsi la famille de paraboles

$$4X_0 - 3Y_0^2 = (Y_0 - h)^2, \tag{4}$$

où h est une constante; toutes ces paraboles ont même direction d'axe que $\overline{P}$ et lui sont bitangentes aux points où la droite $Y_0 = h$ rencontre $\overline{P}$; donc l'enveloppe des courbes (Q) particulières est précisément $\overline{P}$. Donc dans le plan (X', Y') les courbes (ϖ) ont pour enveloppe la courbe $(\overline{R})$. Avec les formules (T) on a immédiatement l'équation des courbes ϖ :

$$X'^2 + 4Y'^3 = (X' - hY')^2$$

et l'on voit bien que les cubiques ainsi obtenues ont la courbe $(\overline{R})$ pour enveloppe.

III. On a

$$
\begin{aligned}
F(t) \equiv{} & (3at^2+2bt-x_0)^2+(3a't^2+2b't-y_0)^2 \\
\equiv{} & [3at^2+2bt-x_0+i(3a't^2+2b't-y_0)] \\
& \times [3at^2+2bt-x_0-i(3a't^2+2b't-y_0)].
\end{aligned}
$$

Pour que $F(t)$ ait *une seule racine double*, il est nécessaire et suffisant que l'*une* des trois hypothèses suivantes ait lieu :

$$(a) \qquad 3(a+ia')(x_0+iy_0)+(b+ib')^2=0,$$
$$(b) \qquad 3(a-ia')(x_0-iy_0)+(b-ib')^2=0,$$
$$(c) \qquad x_0=3a\theta^2+2b\theta, \qquad y_0=3a'\theta^2+2b'\theta.$$

Cette dernière exprime que le point M_0 appartient à la courbe (R) déjà étudiée. On a donc, dans ce cas,

$$(1) \quad \frac{ds}{dt}=(t-\theta)\sqrt{[3a(t+\theta)+2b]^2+[3a(t+\theta)+2b']^2}$$

L'arc s s'obtient alors par une combinaison de fonctions rationnelles et logarithmiques en t; le trinome en $(t+\theta)$ sous le radical n'est pas carré parfait, puisque $ab'-ba'$ est supposé non nul; pour que l'arc s soit algébrique, il faut et suffit que $t=\theta$ soit racine de la dérivée du trinome en t placé sous le radical, d'où

$$\theta=-\frac{ab+a'b'}{3(a^2+a'^2)}$$

et alors la courbe (C_θ) correspondante, non seulement admet le point, $t=\theta$, comme point de rebroussement, mais est une développée de parabole. La valeur de θ obtenue correspond au sommet de la parabole P.

Si l'hypothèse (a) ou (b) est réalisée, à l'exclusion de l'autre, la courbe (C) est imaginaire.

Pour que $F(t)$ ait *deux racines doubles*, il faut, ou bien que les deux facteurs de $F(t)$ soient proportionnels, d'où $ab' - ba' = 0$ et $\frac{a'}{a} = \frac{y_0}{x_0}$, c'est le cas où (C) se réduit à une droite, ou bien que chaque facteur soit carré parfait, autrement dit (a) et (b) sont réalisées simultanément. Mais alors si l'on considère la parabole (P) déjà rencontrée

$$(2) \qquad x = 3at^2 + 2bt, \qquad y = 3a't^2 + 2b't,$$

cela exprime purement et simplement que la distance

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

d'un point *variable* t de cette parabole au point *fixe* (x_0, y_0) s'exprime rationnellement en t ou, si l'on préfère, au moyen des coordonnées (x, y) du point de P; le point (x_0, y_0) est donc le foyer de P. Les coordonnées (x_0, y_0) de ce foyer F et le paramètre p se déterminent aisément grâce à cette remarque. En effet (a) et (b) réunies donnent

$$(3) \qquad \begin{cases} 3(a\,x_0 - a'y_0) + b^2 - b'^2 = 0, \\ 3(a'x_0 + a\,y_0) - 2bb' \quad = 0; \end{cases}$$

d'où pour le foyer F

$$(4) \quad x_0 = \frac{a(b'^2 - b^2) - 2a'bb'}{3(a^2 + a'^2)}, \qquad y_0 = \frac{a'(b^2 - b'^2) - 2abb'}{3(a^2 + a'^2)},$$

puis

$$(5) \quad \begin{aligned} F(t) &\equiv \frac{[3(a + ia')t + (b + ib')]^2[3(a - ia')t + (b - ib')]^2}{9(a^2 + a'^2)} \\ &\equiv \frac{[(3at + b)^2 + (3a't + b')^2]^2}{9(a^2 + a'^2)} \\ &\equiv \frac{[3ax + 3a'y + b^2 + b'^2]^2}{9(a^2 + a'^2)}. \end{aligned}$$

La directrice a donc pour équation

$$(6) \qquad 3ax + 3a'y + b^2 + b'^2 = 0.$$

La distance du foyer F à la directrice, ou p, se calcule aisément :

$$(7) \qquad p = \frac{2(ab' - ba')^2}{3(a^2 + a'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

IV. On a cette fois

$$(1) \qquad F(t) \equiv (3at^2 + 2bt - x_0)^2 + (3a't^2 + 2b't - y_0)^2 + (3a''t^2 + 2b''t - z_0)^2.$$

Pour que $F(t)$ ait *une seule racine double*, il suffit de l'identifier avec

$$(t^2 - 2\theta t + \theta^2)\left[9(a^2 + a'^2 + a''^2)t^2 + \lambda t + \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{\theta^2}\right]$$

et les relations obtenues en égalant les termes en t^3, t^2 et t permettent, par l'élimination de λ et θ, d'obtenir une équation unique entre x_0, y_0, z_0 de sorte que le point M_0 décrit une *surface*, d'ailleurs tout entière imaginaire, possédant une *ligne double réelle*, *mais isolée;* cette ligne est celle que l'énoncé demande; on l'obtient en exprimant que le facteur $t - \theta$ appartient à chacun des trois trinomes qui figurent dans $F(t)$. On a ainsi

$$(\Pi) \qquad x_0 = 3a\theta^2 + 2b\theta, \quad y_0 = 3a'\theta^2 + 2b'\theta, \quad z_0 = 3a''\theta^2 + 2b''\theta,$$

$$F(t) \equiv (t-\theta)^2 \big\{ [3a(t+\theta) + 2b]^2 + [3a'(t+\theta) + 2b']^2 + [3a''(t+\theta) + 2b'']^2 \big\}.$$

Le point M_0 décrit alors une parabole (Π); la courbe Γ_θ a pour équations paramétriques

$$(\Gamma_\theta) \qquad \begin{cases} x = a\,(t^3 - 3\theta^2 t) + b\,(t^2 - 2\theta t), \\ y = a'(t^3 - 3\theta^2 t) + b'(t^2 - 2\theta t), \\ z = a''(t^3 - 3\theta^2 t) + b''(t^2 - 2\theta t). \end{cases}$$

Les deux courbes (Π) et (Γ_θ) sont donc dans le plan d'équation

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} x & a & b \\ y & a' & b' \\ z & a'' & b'' \end{vmatrix} = 0.$$

La courbe (Γ_θ) correspond par *affinité* à la courbe

$$(\overline{C_\theta}) \qquad X = t^3 - 3\theta^2 t, \qquad Y = t^2 - 2\theta t$$

déjà rencontrée, qui a un point de rebroussement pour $t = \theta$.

On peut remarquer que, si l'on effectue une transformation de coordonnées en passant du système rectangulaire $Oxyz$ à un autre système, rectangulaire ou non, OXYZ de même origine, les quantités (x, y, z), (a, a', a''), (b, b', b''), (x_0, y_0, z_0) subissent la même transformation et l'on peut dire que c'est cette simple remarque qui domine la solution actuelle. Si donc le déterminant Δ

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ x_0 & y_0 & z_0 \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, on peut réduire les équations de Γ à la forme simple

$$(3) \qquad X = t^3, \qquad Y = t^2, \qquad Z = -t$$

par *affinité*. Si le déterminant $\Delta = 0$, on peut par une transformation d'axes rectangulaires réduire les équations de Γ à la forme

$$(4) \qquad \begin{cases} x = at^3 + bt^2 - x_0 t, \\ y = a't^3 + b't^2 - y_0 t, \\ z = 0 \end{cases}$$

et nous voyons bien que Π et Γ_θ jouent alors l'une par rapport à l'autre le rôle de P et C_θ précédemment.

Si $F(t)$ *est le carré d'un trinome de second degré*, le point x_0, y_0, z_0 coïncide, pour la raison déjà donnée au paragraphe précédent, avec l'un des foyers de la parabole (Π) déjà rencontrée

$$(\Pi)\quad x = 3at^2 + 2bt, \quad y = 3a't^2 + 2b't, \quad z = 3a''t^2 + 2b''t,$$

de sorte que le point M_0 décrit la parabole (Π') focale de (Π). La tangente au point t de (Γ) a pour paramètres directeurs

$$x - x_0, \quad y - y_0, \quad z - z_0$$

[x, y, z désignant le point de (Π) correspondant au même t que le point de (Γ)].

Elle est donc parallèle successivement aux diverses génératrices du cône de sommet (x_0, y_0, z_0) s'appuyant sur (Π); ce cône est de révolution, donc (Γ) est une hélice.

Pour traiter la question sans calculs fastidieux ou inélégants, calculons d'abord les coordonnées du sommet de (Π). L'axe a pour paramètres directeurs (a, a', a''); la tangente au sommet est perpendiculaire à l'axe, d'où pour le t_1 du sommet

$$(3at_1 + b)a + (3a't_1 + b')a' + (3a''t_1 + b'')a'' = 0$$

ou

$$(5)\qquad t_1 = -\frac{ab + a'b' + a''b''}{3(a^2 + a'^2 + a''^2)}.$$

Si l'on pose

$$(6)\qquad t = \bar{t} - \frac{ab + a'b' + a''b''}{3(a^2 + a'^2 + a''^2)}$$

et si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au sommet, on a, en appelant x_1, y_1, z_1 les coordonnées du sommet S de (Π)

$$(7)\quad \begin{cases} x = x_1 + \overline{x}, \quad y = y_1 + \overline{y}, \quad z = z_1 + \overline{z}; \\ x_0 = x_1 + \overline{x_0}, \quad y_0 = y_1 + \overline{y_0}, \quad z_0 = z_1 + \overline{z_0}; \\ \overline{x} = 3a\overline{t^2} + 2\overline{b}\overline{t}, \quad \overline{y} = 3a'\overline{t^2} + 2\overline{b'}\overline{t}, \\ \qquad \overline{z} = 3a''\overline{t^2} + 2\overline{b''}\overline{t}; \\ \overline{b} = 3at_1 + b, \quad \overline{b'} = 3a't_1 + b', \quad \overline{b''} = 3a''t_1 + b''; \end{cases}$$

$$(8)\qquad F(t) = S(x - x_0)^2 = S(\overline{x} - \overline{x_0})^2.$$

Faisons maintenant une rotation des axes autour de S en prenant pour axes nouveaux SX, SY, SZ les droites qui ont pour cosinus directeurs dans les anciens axes

$$(\mathrm{SX})\qquad \frac{a}{\sqrt{Sa^2}}, \qquad \frac{a'}{\sqrt{Sa^2}}, \qquad \frac{a''}{\sqrt{Sa^2}};$$

$$(\mathrm{SY})\qquad \frac{bSa^2 - aSab}{\sqrt{Sa^2}\sqrt{Sa^2Sb^2 - (Sab)^2}}, \quad \frac{b'Sa^2 - a'Sab}{\sqrt{Sa^2}\sqrt{Sa^2Sb^2 - (Sab)^2}}, \quad \frac{b''Sa^2 - a''Sab}{\sqrt{Sa^2}\sqrt{Sa^2Sb^2 - (Sab)^2}};$$

$$(\mathrm{SZ})\qquad \frac{a'b'' - b'a''}{\sqrt{Sa^2Sb^2 - (Sab)^2}}, \quad \frac{a''b - b''a}{\sqrt{Sa^2Sb^2 - (Sab)^2}}, \quad \frac{ab' - ba'}{\sqrt{Sa^2Sb^2 - (Sab)^2}}.$$

On s'est servi de ce fait que les matrices

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ \overline{b} & \overline{b'} & \overline{b''} \end{vmatrix}$$

donnent les mêmes mineurs, et des formules

$$(9)\quad \begin{cases} \overline{b} = \dfrac{bSa^2 - aSab}{Sa^2}, \quad \overline{b'} = \dfrac{b'Sa^2 - a'Sab}{Sa^2}, \\ \overline{b''} = \dfrac{b''Sa^2 - a''Sab}{Sa^2}. \end{cases}$$

On aura, en posant

$$(10)\quad A = \sqrt{Sa^2}, \qquad B = \sqrt{S\overline{b}^2} = \frac{\sqrt{Sa^2Sb^2 - (Sab)^2}}{\sqrt{Sa^2}},$$

comme équations paramétriques de (Π)

$$(\Pi) \qquad X = 3A\bar{t}^2, \qquad Y = 2B\bar{t}, \qquad Z = 0;$$

$$(11) \qquad F(t) \equiv (3A\bar{t}^2 - X_0)^2 + (2B\bar{t} - Y_0)^2 + Z_0^2$$
$$\equiv 9A^2\bar{t}^4 - (6AX_0 - 4B^2)\bar{t}^2 - 4BY_0\bar{t} + X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2.$$

Si $F(t)$ est carré parfait, on a nécessairement

$$(12) \qquad \begin{cases} Y_0 = 0, \\ F(t) \equiv \left[3A\bar{t}^2 - \left(X_0 - \dfrac{2B^2}{3A}\right)\right]^2. \end{cases}$$

On a donc pour le lieu du point M_0 la parabole (Π') :

$$(\Pi') \qquad X_0^2 + Z_0^2 = \left(X_0 - \frac{2B^2}{3A}\right)^2, \qquad Y_0 = 0.$$

Le foyer de (Π') est le point S; le foyer de (Π) est le sommet de (Π'), $\left(X = \dfrac{B^2}{3A}, \ Y = Z = 0\right)$. La directrice de (Π') est la droite d'équations $Y = 0$, $X = \dfrac{2B^2}{3A}$.

On a pour équations de Γ

$$X = A\bar{t}^3 - X_0\bar{t}, \qquad Y = B\bar{t}^2, \qquad Z = -Z_0\bar{t};$$
$$\frac{ds}{dt} = 3A\bar{t}^2 - \left(X_0 - \frac{2B^2}{3A}\right),$$

formules où l'on doit remplacer X_0 par son expression

$$X_0 = -\frac{3AZ_0^2}{4B^2} + \frac{B^2}{3A}.$$

On remonte aisément aux axes primitifs par les formules

$$x = x_1 + \frac{aX}{A} + \frac{\bar{b}Y}{B} - \frac{a'b'' - b'a''}{\sqrt{Sa^2Sb^2 - (Sab)^2}} Z,$$
$$y_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$z_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Je n'achève pas les calculs qui maintenant n'offrent plus de difficulté, je signale simplement la formule

$$p = \frac{2}{3}\,\frac{(a'b'' - b'a'')^2 + (a''b - b''a)^2 + (ab' - ba')^2}{(a^2 + a'^2 + a''^2)^{\frac{3}{2}}}$$

qui donne le paramètre commun de (Π) et (Π').