

**NOUVELLES ANNALES**  
**DE**  
**MATHÉMATIQUES.**



'BbP 202

# NOUVELLES ANNALES

DE

# MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

DIRIGÉ PAR

**R. BRICARD,**

Professeur au Conservatoire national  
des Arts et Métiers  
et à l'École Centrale des Arts et Manufactures

**H. VILLAT,**

Correspondant de l'Académie des Sciences  
Professeur à l'Université de Strasbourg  
Directeur du *Journal de Mathématiques pures  
et appliquées*

**J. PÉRÈS,**

Professeur à la Faculté des Sciences de Marseille.

---

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,  
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSÉ, ROUCHÉ, ANTOUARI,  
DUPORCQ, BOURLET, LAISANT.

CINQUIÈME SÉRIE.

TOME III.

(LXXXII<sup>e</sup> VOLUME DE LA COLLECTION)

BIBLIOTHÈQUE  
UNIVERSITAIRE  
DE GRANOULE

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET C<sup>ie</sup>, ÉDITEURS,

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,  
Quai des Grands-Augustins, 55.

1924

**Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation  
réservés pour tous pays.**

# NOUVELLES ANNALES

DE

# MATHÉMATIQUES.

---

---

[015b]

LA SEMI-CONTINUITÉ EN GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE ;

PAR MAURICE FRÉCHET,

---

I. REMARQUES SUR LA DÉFINITION DE L'AIRES D'UNE SURFACE COURBE. — La définition de l'aire d'une surface courbe  $S$  a donné lieu à de nombreux et importants travaux, depuis que l'objection bien connue présentée par Peano et Schwarz a entraîné l'abandon de la définition de l'aire de  $S$  comme limite de l'aire des surfaces polyédrales inscrites dans  $S$  et convergeant vers  $S$ , sans autre condition.

Sans entrer dans le détail de ces travaux, il nous suffira de constater qu'ils ont pour but d'attribuer à toute surface courbe  $S$  ou au moins à celles qui appartiennent à une catégorie aussi générale que possible un nombre qui sera appelé l'aire de la surface, et qui jouira des propriétés que la notion intuitive d'aire permet d'en attendre. Dans le champ  $Q$  des surfaces  $S$  (qu'on pourra appeler quarrables) auquel l'une de ces définitions permet d'attribuer une aire  $A$ , on aura défini une « fonction de surface »  $A(S)$ . C'est un exemple élémentaire de ces fonctions dénommées « fonctionnelles » par M. Hadamard pour rappeler que

leur argument  $S$  n'est pas nécessairement une variable numérique, mais un élément de nature quelconque.

Une condition qui s'impose naturellement à toute définition de l'aire d'une surface courbe, c'est que cette définition coïncide, dans le cas où  $S$  est une surface polyédrale, — c'est-à-dire une surface constituée par un nombre fini de polygones plans contigus — avec la définition classique fournie par la géométrie élémentaire. En particulier le champ  $Q$  constitué par l'ensemble des surfaces quarrables devra nécessairement contenir le champ  $\pi$  des surfaces polyédrales. On peut alors formuler le problème consistant à définir l'aire d'une surface courbe de la façon suivante.

Une certaine fonction de surface  $A(P)$  est définie par les méthodes de la géométrie élémentaire sur le champ  $\pi$  constitué par l'ensemble des surfaces polyédrales  $P$ . Il s'agit de définir un champ  $Q$  plus étendu que  $\pi$  — aussi étendu que possible — et sur lequel on prolongera la fonction  $A(P)$  en construisant une fonction  $B(S)$  définie pour toute surface  $S$  du champ  $Q$  et égale à  $A(S)$  sur le champ initial  $\pi$ .

Des problèmes de ce genre se présentent fréquemment en géométrie élémentaire. Par exemple lorsque ayant défini la mesure des angles commensurables avec l'unité d'angle on passe à la mesure des angles incommensurables avec l'unité d'angle. Mais cet exemple nous montre que pour déterminer la solution on impose d'avance une condition au prolongement : celle de fournir une fonction continue sur le champ prolongé.

Il est bien évident que cette condition ne peut être imposée sur le champ prolongé que si elle est déjà vérifiée sur le champ initial.

Par conséquent si l'on veut appliquer cette méthode

ou une méthode basée sur la même idée (1), il faudra d'abord étudier quelles sont les propriétés de la fonction donnée au point de vue de la continuité sur le champ initial. C'est ce que nous voudrions faire ici dans le cas où ce champ est celui des surfaces polyédrales et où la fonction est l'aire telle qu'elle est définie en géométrie élémentaire. Le résultat obtenu peut être considéré comme contenu implicitement dans les travaux sur l'aire d'une surface courbe et le mode de démonstration est une application à ce cas simple de la méthode développée par M. Baire dans ses *Leçons sur les théories générales de l'Analyse*, p. 210. Mais je ne crois pas que le résultat ni sa démonstration aient été publiés indépendamment de la théorie des surfaces courbes. Il m'a paru qu'ils pourraient intéresser les lecteurs de ces *Annales* comme un exemple de l'utilité que peuvent présenter pour la géométrie élémentaire certaines notions modernes comme la semi-continuité introduites à l'occasion de fonctions compliquées et peu courantes. C'est aussi une nouvelle preuve du fait généralement peu connu que les notions qui peuvent paraître les plus subtiles et les plus artificielles dans la théorie des ensembles linéaires et la théorie des fonctions d'une variable se trouvent au contraire indispensables et d'une utilisation courante pour les fonctionnelles les plus simples et les plus anciennement connues. C'est ainsi que dans son *Traité sur le Calcul des Variations*, M. Tonelli a constamment recours à la semi-continuité des fonctionnelles qu'il étudie.

## II. PROPRIÉTÉS DE L'AIRES D'UNE SURFACE POLYÉDRALE

---

(1) Cette méthode est appliquée dans un Mémoire qui sera publié prochainement dans *Fundamenta Mathematicæ*.

CONSIDÉRÉE COMME FONCTION DE SURFACE. — Envisageons donc l'aire  $A(P)$  d'une surface polyédrale comme une fonction de surface dans le seul champ  $\pi$  des surfaces polyédrales. Comme je l'ai indiqué plus haut, pour appliquer la méthode de prolongement ordinaire il faudrait s'assurer que, dans ce champ,  $A(P)$  est une fonction continue de  $P$ , c'est-à-dire que si les surfaces polyédrales  $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$  tendent vers une surface polyédrale  $P$ , l'aire  $A(P_n)$  tend vers l'aire  $A(P)$ .

Or il n'en est rien, comme on s'en assure facilement. Considérons d'abord le cas où  $P$  est réduit à un triangle  $T \equiv ABC$  et découpons celui-ci en  $n^2$  petits triangles homothétiques à  $ABC$ . Puis considérons ces triangles comme bases d'autant de pyramides semblables à une pyramide  $O_n ABC$  ayant pour base  $ABC$  et appelons  $T_n$  l'ensemble des surfaces latérales de ces petites pyramides. Si, par exemple,  $O_n$  se déplace sur une perpendiculaire au plan du triangle passant par l'intérieur du triangle et si la distance  $h_n$  de  $O_n$  au plan  $ABC$  est infiniment petite par rapport à  $n$ , la hauteur  $\frac{h_n}{n}$  des petites pyramides qui constituent  $T_n$  tendra vers zéro avec  $\frac{1}{n}$ , donc la surface  $T_n$  convergera vers  $T$ . D'autre part l'aire  $A(T_n)$  sera égale à l'aire latérale de la pyramide  $O_n ABC$ . Or en prenant  $h_n = \frac{H}{n}$ ,  $H$ , ou  $\sqrt{n}$ , on voit que l'on pourra faire tendre cette aire latérale vers n'importe quel nombre égal ou supérieur à l'aire  $A(T)$  du triangle  $ABC$  ou même vers l'infini.

Si maintenant on considère une surface polyédrale  $P$  et si on la décompose en triangles auxquels on applique la méthode précédente, on voit qu'étant donnée une surface polyédrale  $P$ , on peut construire une suite de surfaces polyédrales  $P_n$  qui converge vers  $P$  de

*telle manière que l'aire  $A(P_n)$  converge, comme on le voudra, soit vers  $A(P)$ , soit vers un nombre arbitrairement choisi supérieur à  $A(P)$ , soit même vers l'infini.*

Il est même possible, comme cela sera montré ailleurs <sup>(1)</sup>, de modifier la construction de Schwarz de façon à pouvoir imposer aux surfaces  $P_n$  la condition d'être formées de triangles inscrits <sup>(2)</sup> dans la surface polyédrale  $P$  <sup>(3)</sup>.

*Ainsi l'aire d'une surface polyédrale est, dans le champ, pourtant bien simple, constituée par toutes les surfaces polyédrales, une fonctionnelle discontinue.* Les méthodes intuitives de prolongement usitées en géométrie élémentaire ne peuvent donc s'appliquer même au cas simple où la fonction à prolonger est l'aire d'une surface polyédrale.

Cependant on pressent que cette fonction ne peut être d'une discontinuité irrémédiable et totale.

C'est grâce à la notion de « semi-continuité » introduite par M. Baire dans la théorie des fonctions de variables réelles que nous pourrons caractériser le genre de continuité partielle de l'aire dans le champ  $\pi$  des surfaces polyédrales.

*Une fonction  $A(P)$  définie dans un champ  $\pi$  d'éléments  $P$  est dite semi-continue inférieurement en  $P_0$  sur le champ  $\pi$ , si,  $P_0$  étant un élément du champ  $\pi$ ,  $A(P_0)$  est égal au « minimum » de  $A(P)$  en  $P_0$  sur  $\pi$ .* Le mot « minimum » est ici pris dans un sens généralisé. Le minimum de  $A(P)$  en  $P_0$  sur  $\pi$  est ici la plus petite des limites vers lesquelles peut tendre  $A(P_n)$

(1) FRÉCHET, *Annales de la Société Mathématique polonaise*, t. II, 1924.

(2) C'est-à-dire dont les sommets sont sur  $P$ .

(3) Dans l'exemple de Schwarz la surface limite est un cylindre.

lorsque  $P_n$  est un élément qui reste sur le champ  $\pi$  en tendant vers  $P_0$  tout en restant distinct de  $P_0$ . Désignons ce minimum par  $A_\pi(P_0)$ . Si  $A(P)$  est semi-continue inférieurement en  $P_0$ , on doit avoir  $A(P_0) = A_\pi(P_0)$ .

Nous allons montrer que l'aire est une telle fonction sur tout le champ  $\pi$  des surfaces polyédrales, c'est-à-dire quel que soit  $P_0$  sur  $\pi$ .

D'après ce que nous avons vu plus haut, quelle que soit la surface polyédrale  $P_0$ , et quel que soit le nombre  $B \geq A(P_0)$ , on peut construire une suite de surfaces polyédrales  $P'_1, P'_2, \dots$  distinctes de  $P_0$  et convergeant vers  $P_0$  de sorte que  $A(P'_n)$  converge vers  $B$ . Par suite

$$(1) \quad A_\pi(P_0) \leq A(P_0).$$

Il reste à montrer que  $A_\pi(P_0)$  n'est pas inférieur à  $A(P_0)$ .

Utilisons ici le raisonnement de M. Baire simplifié en l'adaptant au cas des surfaces polyédrales.

Soit  $P_1, P_2 \dots P_n \dots$  une suite de surfaces polyédrales qui converge vers une surface polyédrale  $P_0$ . Que ces surfaces soient polyédrales ou non, on entend par là qu'on peut établir entre  $P_0$  et  $P_n$  une correspondance ponctuelle  $H_n$  (1) telle que le maximum  $\delta_n$  de la distance de deux points  $M, M_n$  correspondants tend vers zéro avec  $\frac{1}{n}$ . Une face  $F$  de  $P_0$  est une région polygonale qui correspond, par  $H_n$ , à une certaine portion  $F_n$  de  $P_n$ . Soit  $m_n$  la projection du point  $M_n$  de  $F_n$  sur le plan de  $F$ . On a  $Mm_n \leq MM_n \leq \delta_n$ . Lorsque  $M$  parcourt le contour de  $F$ ,  $m_n$  reste à l'intérieur de la suite de rectangles de largeur  $2\delta_n$  ayant chacun pour axe de

---

(1) On suppose bien entendu cette correspondance biunivoque et bicontinue.

symétrie un des côtés du contour F prolongé dans les deux sens d'une longueur  $\delta_n$ . Soit  $\sigma_n$  l'aire de la région  $g_n$  commune à F et à la suite de ces rectangles. Lorsque M parcourt l'intérieur de F, le point  $m_n$  parcourt une région qui comprend au moins la région  $f_n$  obtenue en enlevant  $g_n$  de F. Cette région est limitée par un ou plusieurs polygones et son aire est  $A(F) - \sigma_n$ . Donc  $F_n$  comprend au moins une région  $F'_n$  de  $P_n$  limitée par un ou plusieurs polygones et qui se projette sur le plan de F suivant  $f_n$ . On a

$$A(F'_n) \geq A(f_n) = A(F) - \sigma_n.$$

En faisant la somme des relations analogues relatives aux différentes faces F de  $P_0$ , on aura

$$(2) \quad A(P_n) \geq \Sigma A(F'_n) \geq \Sigma A(f_n) = A(P_0) - \Sigma \sigma_n.$$

Lorsque  $n$  croît indéfiniment,  $\delta_n$  tend vers zéro; donc chacune des aires  $\sigma_n$  tend vers zéro et, comme leur nombre est fixe,  $\Sigma \sigma_n$  tend vers zéro. L'inégalité

$$(3) \quad A(P_0) - A(P_n) \leq \Sigma \sigma_n$$

montre que si  $A(P_n)$  tend vers une limite, cette limite est au moins égale à  $A(P_0)$ ; on a donc

$$(4) \quad A_\pi(P_0) \geq A(P_0).$$

On déduit finalement de (1) et de (4)

$$A_\pi(P_0) = A(P_0).$$

Ainsi nous avons démontré que si l'on considère comme une fonction de surface l'aire  $A(P)$  d'une surface polyédrale P, *la géométrie élémentaire nous fournit l'exemple d'une fonction très simple et très importante qui dans le champ très simple,  $\pi$ , constitué par l'ensemble des surfaces polyédrales : 1° n'est pas continue, 2° est semi-continue inférieurement.*

*Remarques.* — 1° Il y a lieu d'observer, — si l'on nous permet de sortir ici du domaine strict de la géométrie élémentaire — que la semi-continuité inférieure de  $A(P)$  est en un certain sens uniforme dans le champ  $\pi$ , au voisinage de  $P_0$ .

En effet désignons par  $(P_0, P_n)$  et appelons distance des surfaces polyédrales  $(P_0, P_n)$  la borne inférieure du maximum  $\delta_n$  de la distance de deux points correspondants de  $P_0$  et de  $P_n$ , quand la correspondance  $H_n$  varie (1). D'autre part, soit  $L_0$  la somme des longueurs des arêtes de  $P_0$ , celles qui appartiennent à deux faces étant comptées deux fois. On aura

$$\Sigma \sigma_n \leq (L_0 + 2r_0 \delta_n) \delta_n,$$

$r_0$  étant le nombre des arêtes de  $P_0$ , comptée chacune autant de fois qu'il y a aboutit de faces de  $P_0$ . D'où

$$A(P_0) - A(P_n) \leq (L_0 + 2r_0 \delta_n) \delta_n,$$

d'où

$$(5) \quad A(P_0) - A(P_n) \leq [L_0 + 2r_0(P, P_n)] (P, P_n).$$

Par suite on peut déterminer un nombre  $\eta$  tel que sous la seule condition  $(P_0, P) < \eta$ , on ait pour une surface polyédrale fixe  $P_0$  et une surface polyédrale variable  $P$  :

$$A(P_0) - A(P) < \varepsilon \quad \text{pour} \quad (P_0, P) < \eta.$$

Il suffit de prendre

$$2(L_0 + r_0 \eta) \eta < \varepsilon.$$

L'inégalité (5) n'est pas la plus stricte qu'on pourrait écrire connaissant  $P_0$  et seulement  $(P_0, P_n)$ . Il serait intéressant de la préciser.

2° Dans ce qui précède, la définition de la limite

(1) C'est la même définition que nous avons adoptée dans le cas plus général de deux surfaces continues quelconques dans un travail paru dans les *Annales de la Soc. Math. polonaise*, t. II, sous le titre *Sur la distance de deux surfaces*.

d'une suite de surfaces que nous avons adoptée correspond à ce qu'en Calcul des Variations on appelle voisinage d'ordre zéro.

On sait qu'on peut considérer l'aire d'une surface courbe comme continue si l'on substitue à la définition de la limite adoptée plus haut celle qui correspond au voisinage d'ordre 1, c'est-à-dire celle où la correspondance entre deux surfaces voisines est telle que non seulement les points correspondants mais aussi leurs plans tangents soient voisins.

Mais il est manifeste que si l'on voulait introduire cette condition dans l'étude de l'aire des seules surfaces polyédrales on ne se débarrasserait de la discontinuité de l'aire qu'en introduisant la discontinuité des plans tangents:

[L<sup>1</sup>7]

## SUR LES CERCLES FOCaux ;

PAR RENÉ GARNIER.

M. H. Lebesgue a montré récemment <sup>(1)</sup> comment on peut étudier simultanément les deux séries de cercles bitangents à une conique à centre <sup>(2)</sup>. Nous allons établir que *ces deux séries sont les seules*; nous nous appuierons uniquement *sur la définition des coniques par un foyer F et une directrice ( $\Delta$ )*, en n'invokant aucune autre notion que celles du programme de la classe de Mathématiques.

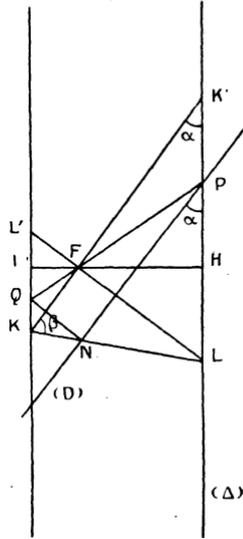
1. En partant de cette définition, *cherrchons le lieu*

<sup>(1)</sup> *Nouv. Ann.*, 5<sup>e</sup> série, t. I, 1923, p. 340.

<sup>(2)</sup> M. Lebesgue a étudié par un procédé analogue les cercles focaux de la parabole. Les considérations suivantes montrent également que ces cercles forment une série unique

des milieux des cordes d'une conique (C), parallèles à une direction donnée.

Soit P l'intersection d'une droite (D) avec ( $\Delta$ ) et soit  $\alpha$  l'angle des droites (D) et ( $\Delta$ ). Les points de (C)



qui appartiennent à (D) se trouvent sur le cercle lieu des points M tels que

$$\frac{MF}{MP} = e \sin \alpha$$

( $e$ , excentricité de la conique). Le centre Q de ce cercle se projette sur l'axe focal en un point I qui est le centre du cercle lieu des points tels que le rapport de leurs distances à F et à H soit  $e \sin \alpha$ . On a donc

$$\frac{IF}{FH} = \frac{e^2 \sin^2 \alpha}{1 - e^2 \sin^2 \alpha};$$

ainsi, le point I ne change pas lorsque (D) se déplace parallèlement à elle-même.

Cela étant, le milieu du segment découpé sur (D)

par (C) coïncide avec la projection N de Q sur (D). Il s'agit de trouver le lieu de N. Or, menons par F une parallèle à (D) coupant en K et K' les droites IQ et ( $\Delta$ ), et menons encore par F une perpendiculaire à (D) coupant en L' et L les droites IQ et ( $\Delta$ ). Je dis que le lieu cherché est la droite KL.

En effet, appelons N' l'intersection de KL avec (D), et N'' l'intersection de KL avec la perpendiculaire à (D) menée par Q; notre assertion sera justifiée si nous montrons que N' et N'' coïncident en un point N.

Or on a

$$\frac{LN''}{LK} = \frac{L'Q}{L'K} = \frac{LP}{LK'} = \frac{LN'}{LK}. \quad \text{c. q. f. d.}$$

Désignons alors par  $\beta$  l'angle de (D) avec son diamètre; il viendra :

$$\text{tang } \beta = \frac{FL}{KF} = \frac{FH}{\cos z} \cdot \frac{\sin z}{IF} = \frac{1 - e^2 \sin^2 \alpha}{e^2 \sin \alpha \cos z}.$$

Excluons le cas où (C) est un cercle; l'angle  $\beta$  ne pourra être droit que lorsque (D) est parallèle (') ou perpendiculaire à l'axe focal.

2. Ceci posé, observons que tout diamètre ( $\delta$ ) d'une conique (C) passe par le point de concours S des tangentes à (C) menées aux deux extrémités M, M' d'une corde de direction conjuguée à ( $\delta$ ): car si M, M<sub>1</sub> est une corde parallèle à MM' et infiniment voisine de MM', les droites MM<sub>1</sub> et M'M<sub>1</sub> se coupent sur le diamètre. Dès lors, s'il existe un cercle bitangent à (C) en M et M', on aura SM = SM'; le triangle SMM' étant isocèle, sa médiane ( $\delta$ ) est une hauteur, ce qui exige que MM' soit parallèle (') ou perpendiculaire à l'axe focal.

---

(<sup>1</sup>) On écarte le cas de la parabole. — La formule précédente montre d'ailleurs immédiatement que tous les diamètres de la parabole sont parallèles à l'axe.

[H'51]

**SUR LES FAISCEAUX DE CUBIQUES PLANES CUSPIDALES;**

PAR L. GODEAUX,

Professeur à l'École militaire (Bruxelles).

Considérons une cubique plane cuspidale  $C$  (c'est-à-dire possédant un point de rebroussement ou cuspide). On sait que, par un point  $P$  de  $C$  passe une seule tangente à cette courbe dont le point de contact  $Q$  soit différent de  $P$ . Inversement, la tangente en un point  $Q$  de la courbe  $C$  à cette courbe, la rencontre encore en un point  $P$ . On a ainsi une correspondance birationnelle  $(P, Q)$ , non involutive, entre les points de la courbe  $C$  <sup>(1)</sup>. Considérons maintenant un faisceau  $|C|$  de cubiques planes cuspidales  $C$ . Par un point  $P$  du plan passe une seule courbe de  $|C|$ ; à ce point  $P$  faisons correspondre, sur cette courbe, un point  $Q$  par la construction qui vient d'être indiquée. Inversement, à un point  $Q$  du plan, faisons correspondre le point  $P$  appartenant à la courbe de  $|C|$  passant par  $Q$ . Nous avons ainsi défini une correspondance birationnelle entre les points  $P, Q$  du plan. C'est cette correspondance birationnelle que nous nous proposons d'étudier dans cette Note.

1. Il résulte tout d'abord d'un théorème de M. Bertini <sup>(2)</sup>, que si les courbes d'un faisceau possèdent

<sup>(1)</sup> Voir, par exemple, CLEBSCH-LINDENMANN, *Leçons sur la Géométrie* (traduction Benoist), tome II, Paris, 1880, p. 341 et suiv.

<sup>(2)</sup> BERTINI, *Sui sistemi lineari* (*Rend. Ist. Lomb.*, 1880) ou *Geometria proiettiva degli iperspazi*, Pise, 1907, p. 227. Pour une autre démonstration, voir SEVERI, *Geometria Algebrica*, p. 28; Padoue, 1908, ou *Algebraische Geometrie*; Leipzig, 1921, p. 21.

toutes un point singulier, celui-ci est fixe, c'est-à-dire est commun à toutes les courbes du faisceau.

Cela étant, dans un faisceau  $|C|$  de cubiques planes cuspidales, le point de rebroussement est un point fixe A. Nous allons de plus montrer que *toutes les courbes C ont même tangente de rebroussement*.

Choisissons, comme triangle de référence, le triangle formé par la tangente de rebroussement  $x_1 = 0$ , la tangente d'inflexion  $x_3 = 0$  et la droite  $x_2 = 0$  joignant le point de rebroussement A au point d'inflexion d'une des courbes du faisceau. L'équation de cette courbe pourra s'écrire

$$x_3^2 - 3x_1^2 x_3 = 0.$$

L'équation d'une autre cubique du faisceau pourra s'écrire

$$f(x_1, x_2, x_3) \equiv ax_1^3 + 3bx_1^2 x_2 + 3cx_1 x_2^2 + dx_2^3 \\ + gx_1^2 x_3 + hx_2^2 x_3 + lx_1 x_2 x_3 = 0,$$

avec la condition  $l^2 - 4gh = 0$  exprimant que le point A est de rebroussement.

Une courbe quelconque du faisceau  $|C|$  est représentée par

$$(1) \quad f(x_1, x_2, x_3) + \lambda(x_3^2 - 3x_1^2 x_3) = 0.$$

Pour que cette courbe possède un point de rebroussement en A, on doit avoir

$$l^2 - 4h(g - 3\lambda) = 0,$$

quel que soit  $\lambda$ ;  $h$  et  $l$  doivent donc être nuls et le résultat annoncé en résulte.

2. Nous allons montrer que le faisceau  $|C|$  possède une cubique dégénérée en trois droites issues de A et

une autre cubique dégénérée en la droite  $x_1 = 0$  et une conique tangente en A à la droite  $x_1 = 0$ .

Il suffit, en effet, de prendre  $\lambda = \frac{1}{3}g$  pour obtenir une courbe décomposée en trois droites  $b_1, b_2, b_3$  passant par A.

Prenons au contraire  $\lambda = -d$ ; la cubique du faisceau se décompose en la droite  $a$ , d'équation  $x_1 = 0$  (tangente de rebroussement) et une conique  $\Gamma$ , tangente à la droite  $a$  au point A ( $x_1 = x_2 = 0$ ).

Nous connaissons donc deux courbes

$$b_1 + b_2 + b_3, \quad a + \Gamma,$$

du faisceau, qui nous permettent de le définir.

Observons tout d'abord que tout point commun à ces courbes est commun à toutes les courbes du faisceau  $[C]$ , et réciproquement. Il en résulte que les courbes du faisceau ont en commun :

1° Les points  $B_1, B_2, B_3$  où les droites  $b_1, b_2, b_3$  rencontrent respectivement la conique  $\Gamma$  en dehors de A;

2° Le point A.

On en conclut que le point A absorbe six intersections de deux cubiques du faisceau.

3. Prenons actuellement comme triangle de référence le triangle formé par la droite  $a(x_1 = 0)$ , la droite  $b_1(x_2 = 0)$  et la tangente  $x_3 = 0$  à la conique  $\Gamma$  au point  $B_1$ .

La conique  $\Gamma$  a pour équation

$$x_1 x_3 - c x_2^2 = 0;$$

soit d'autre part

$$a x_1 x_2 + b x_2^2 + d x_1^2 = 0$$

l'équation quadratique des droites  $b_2, b_3$ . Toute courbe

du faisceau  $|C|$  aura une équation de la forme

$$(2) \quad x_1(x_2x_3 - cx_2^2) + \lambda x_2(ax_1x_2 + bx_2^2 + dx_1^2) = 0.$$

C'est cette équation (2) que nous prendrons désormais pour définir le faisceau  $|C|$ ,  $\lambda$  étant le paramètre variable.

4. Proposons-nous de rechercher le lieu des points d'inflexion des courbes du faisceau. On sait que les points d'inflexion d'une courbe sont situés sur la hessienne de cette courbe. Dans le cas de la courbe (2), la hessienne se réduit à

$$x_1^2[\lambda(ax_1 + 3bx_2) - cx_1] = 0.$$

La droite

$$(3) \quad \lambda(ax_1 + 3bx_2) - cx_1 = 0$$

détermine sur la cubique (2), en dehors du point A, l'unique point d'inflexion de cette courbe.

Le lieu des points d'inflexion des courbes de  $|C|$  s'obtiendra en éliminant  $\lambda$  entre les équations (2) et (3); on obtient ainsi la droite  $x_1 = 0$  et la cubique

$$(4) \quad ax_1^2x_3 - 2bcx_2^2 + cdx_1^2x_2 + 3bx_1x_2x_3 = 0,$$

qui possède, en A, un point double ordinaire dont l'une des tangentes est la droite  $a(x_1 = 0)$  et qui passe par les points  $B_1, B_2, B_3$ .

5. Considérons le réseau de cubiques planes représenté par l'équation

$$(5) \quad x_1(x_1x_3 - cx_2^2) + \lambda x_2(ax_1x_2 + bx_2^2 + dx_1^2) \\ + \mu x_2(x_1x_3 - cx_2^2) = 0,$$

où  $\lambda, \mu$  sont des paramètres variables.

Toutes ces courbes (5) ont, en général, un point double ordinaire au point A, l'une des tangentes étant la droite  $a(x_1 = 0)$ , l'autre étant la droite  $x_1 + \mu x_2 = 0$ .

De plus, les courbes (5) passent par les points  $B_1, B_2, B_3$ .

Les courbes du réseau (5) données par  $\mu = 0$  sont précisément les courbes du faisceau  $|C|$ ; par suite, si les courbes (5) avaient en commun un point fixe distinct de  $A, B_1, B_2, B_3$ , ce point serait également commun aux courbes de  $|C|$ , ce qui est impossible.

Deux courbes arbitraires du réseau (5) ont en commun neuf points parmi lesquels les points  $B_1, B_2, B_3$ , simples, et le point double  $A$  qui compte pour cinq points d'intersection, puisque la tangente  $a$  aux courbes en ce point est commune. Il en résulte que deux courbes du réseau (5) ont en commun un seul point, variable avec ces courbes.

Observons enfin que la courbe (4), lieu des points d'inflexion des courbes de  $|C|$ , appartient au réseau (5); on l'obtient en faisant  $\lambda = \frac{c}{a}$ ,  $\mu = 3\frac{b}{a}$ .

6. Désignons par  $\pi$  le plan du réseau (5) et rapportons projectivement les courbes du réseau (5) aux droites d'un second plan  $\pi'$ . En d'autres termes, si  $X_1, X_2, X_3$  désignent les coordonnées homogènes ponctuelles du plan  $\pi'$ , et  $\rho$  un facteur de proportionnalité, posons

$$(I) \quad \begin{cases} \rho X_1 = x_1(x_1 x_3 - c x_2^2), \\ \rho X_2 = x_2(x_1 x_3 - c x_2^2), \\ \rho X_3 = x_2(ax_1 x_2 + b x_2^2 + d x_1^2). \end{cases}$$

On déduit de ces formules, en les résolvant par rapport à  $x_1, x_2, x_3$ , et en désignant par  $\sigma$  un facteur de proportionnalité,

$$(II) \quad \begin{cases} \sigma x_1 = X_1^2 X_3, \\ \sigma x_2 = X_1 X_2 X_3, \\ \sigma x_3 = X_2^2 (a X_1 + b X_2 + c X_3) + d X_1^2 X_2. \end{cases}$$

Les formules (I) et (II) définissent une correspondance birationnelle entre les points  $(x_1, x_2, x_3)$  de  $\pi$  et les points  $(X_1, X_2, X_3)$  de  $\pi'$ .

Aux droites de  $\pi'$  correspondent les cubiques du réseau (5) dans  $\pi$ , et aux droites

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 = 0$$

de  $\pi$  correspondent les cubiques

$$(6) \quad \alpha X_1^2 X_3 + \beta X_1 X_2 X_3 + \gamma X_2 (a X_1 X_2 + b X_2^2 + c X_2 X_3 + d X_3^2) = 0$$

du plan  $\pi'$ .

Les courbes (6) ont en commun les points fixes suivants :

Un point double  $A'(X_1 = X_2 = 0)$ ;

Un point simple  $A'_1(X_1 = 0, b X_2 + c X_3 = 0)$ ;

Un point simple  $B'_1(X_2 = X_3 = 0)$ ;

Deux points simples

$$B'_2, B'_3(X_2 = 0, a X_1 X_2 + b X_2^2 + d X_3^2 = 0).$$

Le point double  $A'$  absorbant quatre points d'intersection, car les tangentes en ce point sont variables, deux cubiques du réseau (6) ont en commun un seul point variable avec ces courbes, comme cela résulte d'ailleurs de la théorie des correspondances birationnelles.

7. Les points  $A, B_1, B_2, B_3$  de  $\pi$ ,  $A', A'_1, B'_1, B'_2, B'_3$  de  $\pi'$  sont des points singuliers pour la correspondance qui vient d'être définie. A chacun d'eux correspondent, dans l'autre plan, une infinité de points.

Considérons par exemple le point  $A'(X_1 = X_2 = 0)$ . Les deux premières des formules (I) montrent que tous les points de la conique  $\Gamma(x_1 x_3 - c x_2^2 = 0)$  correspondent à ce point.

Un raisonnement analogue montrera que : au point  $A'_1$  correspondent les points de la droite  $a$ ; aux points  $B'_1, B'_2, B'_3$  correspondent les points respectivement des droites  $b_1, b_2, b_3$ ; au point  $A$  correspondent les points des droites  $X_1 = 0, X_3 = 0$ ; aux points  $B_1, B_2, B_3$  correspondent respectivement les droites  $b'_1 \equiv A'B'_1, b'_2 \equiv A'B'_2, b'_3 \equiv A'B'_3$ .

Il convient d'examiner de plus près la correspondance entre le point  $A$  et les points des droites  $X_1 = 0, X_3 = 0$ .

Considérons le point donné par

$$X_1 = 0, \quad X_3 + kX_2 = 0.$$

Les formules (I) donnent

$$\begin{aligned} x_1(x_1x_3 - cx_2^2) &= 0, \\ x_1x_3 - cx_2^2 + k(ax_1x_2 + bx_2^2 + dx_1^2) &= 0. \end{aligned}$$

La première de ces équations se décompose en deux autres qui représentent la droite et la conique  $\Gamma$ , toutes deux tangentes à la troisième courbe, quel que soit  $k$ . Il en résulte qu'aux points de la droite  $X_1 = 0$  correspond le point infiniment voisin de  $A$  sur la droite  $a$ , ou mieux, les points infiniment voisins successifs à ce dernier.

Considérons maintenant le point donné par  $X_3 = 0, X_1 = kX_2$ . Les formules (1) donnent

$$x_2(ax_1x_2 + bx_2^2 + dx_1^2) = 0, \quad x_1 = kx_2.$$

Il en résulte qu'aux points de la droite  $X_3 = 0$  correspondent l'ensemble des points infiniment voisins de  $A$ .

8. Soit  $P$  un point du plan  $\pi$ ; par ce point passe une cubique du faisceau  $|C|$ . Soit  $Q$  le point de cette courbe, distinct de  $P$ , tel que la tangente à cette courbe passe par  $P$ . Appelons  $T$  la transformation birationnelle

ainsi déterminée, comme on l'a déjà vu, entre les points  $P, Q$  du plan  $\pi$ .

Les points communs à toutes les courbes de  $|C|$  seront des éléments singuliers de la transformation  $T$ .

D'autre part, les points  $P, Q$  coïncideront soit lorsqu'ils seront au point  $A$  de rebroussement, soit lorsqu'ils seront en un point d'inflexion d'une courbe de  $|C|$ . La transformation  $T$  laisse donc comme seuls points invariants le point  $A$  et les points de la cubique (4).

9. A un couple de points correspondants  $P, Q$  correspond un couple de points  $P', Q'$  du plan  $\pi'$  et ainsi se trouve définie une transformation birationnelle  $T'$  entre les points  $P', Q'$  du plan  $\pi'$ .

Cette transformation  $T'$  peut être définie directement.

Observons tout d'abord qu'aux cubiques de  $C$  correspondent, par les formules (I), les droites passant par le point  $O'(X_1 = X_3 = 0)$  dans le plan  $\pi'$ .

Soit maintenant  $P'$  un point de  $\pi'$ . Les cubiques (6) passant par  $P'$  découpent, sur la droite  $O'P'$ , une involution du second ordre et possédant par suite deux points de coïncidence. Il y a donc deux de ces cubiques qui touchent  $O'P'$  en un point en général distinct de  $P'$ . L'une de ces cubiques est la courbe  $X_1X_2X_3 = 0$  qui possède un point double en  $O'$ ; la seconde cubique est par suite rationnellement déterminée et nous désignerons par  $Q'$  le point de contact avec la droite  $O'P'$ .

Inversement, par un point  $Q'$  de  $\pi'$  passe une seule cubique (6) tangente en ce point à la droite  $O'Q'$ . Cette droite rencontre encore la courbe en un point  $P'$ .

Ainsi se trouve déterminée directement la transformation  $T'$ .

Observons maintenant que le point  $O'$  est certaine-

ment invariant pour  $T'$ , car il y a certainement une cubique (6) ayant un point d'inflexion en  $O'$ . Les autres points invariants pour  $T'$  ne peuvent être que les points d'inflexion des cubiques (6) dont la tangente passe par  $O'$ . Le lieu de ces points a pour correspondant, dans  $\pi$ , la cubique (4), lieu des points d'inflexion des courbes de  $|C|$ . Or, cette cubique fait partie du réseau (5); par suite,  $T'$  possède un point invariant et une droite de points invariants. C'est donc nécessairement une homographie.

10. Nous allons établir les formules donnant l'homographie  $T'$ .

Soient  $(Z_1, Z_2, Z_3)$  les coordonnées d'un point  $Q'$  de  $\pi'$ . Pour que la tangente en ce point à une cubique (6) le contenant, passe par  $O'$ , on doit avoir

$$\beta Z_1 Z_3 + \gamma (2 a Z_1 Z_2 + 3 b Z_2^2 + 2 c Z_2 Z_3 + d Z_1^2) = 0.$$

Par suite, la cubique en question a pour équation

$$\left| \begin{array}{ccc} X_1^2 X_3 & X_1 X_2 X_3 & X_2 (a X_1 X_2 + b X_2^2 + c X_2 X_3 + d X_1^2) \\ Z_1^2 Z_3 & Z_1 Z_2 Z_3 & Z_2 (a Z_1 Z_2 + b Z_2^2 + c Z_2 Z_3 + d Z_1^2) \\ 0 & Z_1 Z_3 & 2 a Z_1 Z_2 + 3 b Z_2^2 + 2 c Z_2 Z_3 + d Z_1^2 \end{array} \right| = 0.$$

Les coordonnées du point correspondant  $P'$  sont de la forme

$$\frac{Y_1}{Z_1} = \frac{Y_2}{Z_2 + k} = \frac{Y_3}{Z_3}.$$

L'équation précédente donne

$$k = -\frac{1}{b} (a Z_1 + 3 b Z_2 + c Z_3),$$

et, par suite, les formules donnant l'homographie  $T'$  sont

$$(T') \quad \frac{Y_1}{-b Z_1} = \frac{Y_2}{a Z_1 + 2 b Z_2 + c Z_3} = \frac{Y_3}{-b Z_3}.$$

Sous cette forme, on voit immédiatement que le point  $O'(X_1 = X_2 = 0)$  et les points de la droite

$$aX_1 + 3bX_2 + cX_3 = 0$$

sont invariants. On vérifie que les formules (I) font correspondre à cette droite la cubique (4) du plan  $\pi$ .

11. Une fois connues les transformations (I), (II), (T), on obtient sans difficulté les formules donnant la transformation T et la transformation inverse  $T^{-1}$ . Si  $P(y_1, y_2, y_3)$ ,  $Q(z_1, z_2, z_3)$  sont deux points correspondants,  $\rho, \sigma$  des facteurs de proportionnalité, on a

$$(T) \left\{ \begin{array}{l} \rho y_1 = -bz_1^2 z_2 (z_1 z_3 - cz_2^2) (az_1 z_2 + bz_2^2 + dz_1^2), \\ \rho y_2 = z_1 z_2 (az_1 z_2 + bz_2^2 + dz_1^2) \\ \quad \times (az_1^2 z_3 + 2bz_1 z_2 z_3 - bc z_2^2 + cdz_1^2 z_2), \\ \rho y_3 = 2z_2 (az_1^2 z_3 + 2bz_1 z_2 z_3 - bc z_2^2 + cdz_1^2 z_2)^2 \\ \quad + dz_1^2 (z_1, z_3 - cz_2^2) \\ \quad \times (az_1^2 z_3 + 2bz_1 z_2 z_3 - bc z_2^2 + cdz_1^2 z_2). \end{array} \right.$$

$$(T^{-1}) \left\{ \begin{array}{l} \sigma z_1 = -8b^2 y_2 (y_1 y_3 - cy_2^2)^2 (ay_1 y_2 + by_2^2 + dy_1^2), \\ \sigma z_2 = 4by_2 (y_1 y_3 - cy_2^2) (ay_1 y_2 + by_2^2 + dy_1^2) \\ \quad \times (ay_1 y_3 + by_2 y_3 + cdy_1 y_2) \\ \sigma z_3 = (ay_1 y_3 + by_2 y_3 + cdy_1 y_2)^2 \\ \quad \times (by_1 y_2 y_3 - ay_1^2 y_3 - cdy_1^2 y_2 - 2bcy_2^2) \\ \quad + 4bdy_1 (y_1 y_3 - cy_2^2)^2 \\ \quad \times (ay_1 y_3 + by_2 y_3 + cdy_1 y_2). \end{array} \right.$$

Ces formules montrent que les transformations T,  $T^{-1}$  sont distinctes, c'est-à-dire que T n'est pas involutive, ce qui résulte d'ailleurs de la définition géométrique de cette transformation.

On voit de plus que les courbes K, que T fait correspondre aux droites de  $\pi$ , sont du septième ordre. De même, les courbes  $K_1$ , que  $T^{-1}$  fait correspondre aux droites, sont du septième ordre. Mais il est aisé de voir que les courbes K,  $K_1$  ne se comportent pas de la

même manière aux points communs à toutes les courbes du faisceau  $|C|$ . Pour étudier les singularités de ces courbes, il nous sera plus facile d'utiliser la correspondance birationnelle entre les plans  $\pi, \pi'$ , définie plus haut.

12. Soient  $d$  une droite de  $\pi$ ,  $K$  la courbe que  $T$  lui fait correspondre. Aux courbes  $d, K$  correspondent dans  $\pi'$  une courbe  $d'$  du troisième ordre appartenant au réseau  $(\delta)$ , et une courbe  $K'$  transformée de  $d$  pour  $T'$ . Si

$\alpha X_1^2 X_3 + \beta X_1 X_2 X_3 + \gamma X_2^2 (a X_1 + b X_2 + c X_3) + \gamma d X_1^2 X_2 = 0$   
est l'équation de  $d'$ , celle de  $K'$  sera

$$\begin{aligned} & -\alpha b X_1^2 X_3 + \beta X_1 X_3 (a X_1 + 2b X_2 + c X_3) \\ & + \gamma X_2 (a X_1 + 2b X_2 + c X_3)^2 \\ & + \gamma d X_1^2 (a X_1 + 2b X_2 + c X_3) = 0. \end{aligned}$$

On voit aisément que la courbe  $K'$  passe, quels que soient  $\alpha, \beta, \gamma$ , une fois par les points  $A(X_1 = X_2 = 0)$  et les points

$$X_3 = 0, \quad (a X_1 + 2b X_2) [X_2 (a X_1 + 2b X_2) + d X_1^2] = 0,$$

deux fois par le point

$$X_1 = 0, \quad 2b X_2 + c X_3 = 0.$$

Les tangentes en ces points sont variables avec  $\alpha, \beta, \gamma$ .

L'ensemble des cubiques  $K'$ , obtenues en faisant varier  $\alpha, \beta, \gamma$ , forme un réseau de degré un, c'est-à-dire que deux courbes telles que  $K'$  se rencontrent en un seul point variable avec ces courbes.

A une courbe  $K'$  correspond, dans  $\pi$ , une courbe du neuvième ordre qui se décompose en la conique  $x_1 x_3 - c_2^2 = 0$  (puisque  $K'$  passe simplement par  $A$ ) et en une courbe  $K$  du septième ordre.

La courbe  $K'$  rencontrant les droites  $b'_1, b'_2, b'_3$ , chacune en deux points variables avec  $\alpha, \beta, \gamma$ , en dehors de  $A'$ , la courbe  $K$  passe deux fois par chacun des points  $B_1, B_2, B_3$ , les tangentes en ces points étant variables.

La courbe  $K'$  rencontre l'ensemble des droites  $X_1 = 0, X_3 = 0$  en quatre points fixes, en dehors de  $A'$ . L'un de ces points est d'ailleurs double. Il en résulte que le point  $A$  est quintuple à tangentes fixes pour  $K$ , deux des tangentes étant confondues avec  $a(x_1 = 0)$ .

Comme nous l'avons vu, aux points de la droite  $X_1 = 0$  correspondent les points infiniment voisins successifs au point infiniment voisin de  $A$  sur  $a$ . Par suite,  $K'$  ayant un point double sur  $X_1 = 0$ , le point  $A$  possède deux points doubles infiniment voisins successifs situés sur la conique

$$2bx_1x_3 - bcx_2^2 + acx_1x_2 + cdx_1^2 = 0,$$

qui correspond (avec la droite  $x_2 = 0$ ) à la droite

$$2bX_2 + cX_3 = 0.$$

Cette conique oscule précisément au point  $A$ , les deux branches de la courbe  $K$  tangentes à  $a$ .

En résumé :

*La transformation  $T$  fait correspondre aux droites des courbes  $K$  d'ordre sept possédant :*

*Un point quintuple à tangentes fixes  $A$  auquel sont infiniment voisins successifs deux points doubles;*

*Trois points doubles à tangentes variables  $B_1, B_2, B_3$ .*

13. Désignons par  $K'_1$  une courbe qui correspond,

dans  $\pi'$ , à une courbe  $K_1$  de  $\pi$ . On trouve aisément que cette courbe a pour équation

$$\begin{aligned} & -8b^2\alpha X_1^2 X_3 + 4b\beta X_1 X_3 (aX_1 + bX_2 + cX_3) \\ & + \gamma (aX_1 + bX_2 + cX_3)^2 \\ & \quad \times (-aX_1 + bX_2 - cX_3) \\ & + 4db\gamma X_1^2 (aX_1 + bX_2 + cX_3) = 0. \end{aligned}$$

Cette courbe  $K'_1$  passe, quels que soient  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , simplement par les quatre points

$$\begin{aligned} X_1 = 0, \quad bX_2 - cX_3 = 0; \\ X_3 = 0, \quad (aX_1 + bX_2) [b^2 X_2^2 - (a^2 - 4bd) X_1^2] = 0, \end{aligned}$$

et doublement par le point  $A'(X_1 = 0, bX_2 + cX_3 = 0)$ .

On en conclut, en raisonnant comme plus haut, que :

*La transformation  $T^{-1}$  fait correspondre aux droites des courbes  $K_1$  d'ordre sept possédant :*

*Un point quadruple à tangentes fixes A, la branche touchant la droite a ayant une courbe osculatrice fixe;*

*Trois points triples à tangentes variables  $B_1, B_2, B_3$ .*

Actuellement, la courbe de  $\pi$  qui correspond à  $K'_1$  se compose d'une courbe  $K_1$  et de la droite  $a$  ( $x_1 = 0$ ) comptée deux fois.

[V1a]

## SUR LES THÉORIES VECTORIELLES ET SUR LA CINÉMATIQUE (QUESTIONS DE TERMINOLOGIE);

PAR RAOUL BRICARD.

1. La théorie des systèmes de vecteurs, fondement de la statique et de la cinématique, fait aujourd'hui

partie du programme de la classe de Mathématiques spéciales. Elle est donc couramment enseignée. Mais la terminologie en usage ne me paraît pas toujours heureuse, et les notations ne sont pas aussi fixées qu'elles devraient l'être. Je me propose d'indiquer ici les façons de dire et d'écrire auxquelles je m'arrêterai volontiers. Comme il convenait, j'ai cherché à être le moins original possible, s'agissant de choisir plutôt que d'innover.

Je signalerai aussi ce qu'il est bon, selon moi, d'introduire du *Calcul vectoriel* proprement dit dans l'enseignement de la statique, et cela dès le début. Il semble qu'on professe chez nous une certaine méfiance à l'égard de ce calcul, probablement par crainte d'un symbolisme dont nous n'avons pas le goût, et dont il faut convenir que certains ont abusé. Il n'en est pas moins vrai qu'il est des conceptions qui s'imposent aujourd'hui à tout mathématicien. Il faut penser à un vecteur *en soi* avant de penser à ses composantes X, Y, Z. Il faut rattacher le moment à un produit vectoriel et non pas le produit vectoriel à un moment. Nous sommes certainement sous ce rapport en retard sur l'étranger (1).

Comme le reconnaîtront les lecteurs à qui sont familiers les *Éléments de calcul vectoriel*, de MM. Burali-Forti et Marcolongo (traduction française de Lattès), ce qui suit se ressent de leur influence.

Je profiterai de l'occasion pour dire quelques mots sur le langage de la cinématique, bien que le sujet soit différent.

---

(1) Un pas important vient d'être fait avec le beau livre de M. Georges BOULIGAND, *Leçons de Géométrie vectorielle* (Paris, Vuibert, 1924). Mais cet ouvrage d'une haute portée ne s'adresse pas à des débutants.

2. Au commencement, il faut insister, plus qu'on ne le fait toujours, sur la différence profonde de nature entre le *vecteur libre* et le *vecteur glissant*. Ce sont des êtres tout à fait distincts, à tel point que si j'osais, je voudrais prévenir toute confusion entre eux en désignant le second par le terme de *glisseur* (ce qui, en outre, serait plus concis). Pour ne pas aller trop loin, conservons les expressions composées qui ne diffèrent que par les épithètes. On peut supprimer celles-ci quand on ne redoute pas de méprise, mais il faut être prudent.

Pour définir les vecteurs des deux sortes, le mieux me paraît être de partir de la notion de *segment orienté*, qui ne présente pas de difficulté. Le segment orienté d'origine A et d'extrémité B sera désigné par  $\vec{AB}$ . On définit à la manière ordinaire l'équipollence de deux segments orientés. Cela fait, convenons d'écrire de la manière suivante une telle équipollence :

$$(1) \quad \text{Vecteur libre de } \vec{AB} = \text{vecteur libre de } \vec{CD}.$$

On est ainsi conduit à attacher à tout segment orienté une certaine fonction de ce segment, son *vecteur libre*, fonction qui prend la même valeur pour tous les segments équipollents au premier et pour ceux-là seulement.

Un vecteur libre, étant une abstraction, ne peut être figuré : on ne peut en figurer qu'un *segment orienté représentatif*, ce segment orienté pouvant d'ailleurs être remplacé par un segment orienté équipollent quelconque. De même, on ne peut figurer une longueur *en soi* : on ne peut que figurer un segment ayant cette longueur, ce segment pouvant être remplacé par un segment quelconque égal (*congruent*, dirait-on à l'étranger), au sens de la géométrie élémentaire. Pour

noter le vecteur libre du segment orienté  $\overrightarrow{AB}$ , on peut employer la notation (1), raccourcie si l'on veut en Vect  $\overrightarrow{AB}$ , mais il faut se garder d'écrire  $\overrightarrow{AB}$  tout court, parce que  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  serait susceptible d'interprétations diverses.

Je crois avantageux d'introduire tout de suite la notation de Grassmann et d'autres auteurs :

$$\text{Vect } \overrightarrow{AB} = B - A,$$

le vecteur libre apparaissant ainsi comme la différence symbolique de deux points. Cette notation se justifie par le fait qu'en traitant comme une égalité algébrique l'égalité

$$B - A = C - D,$$

on en tire les conséquences exactes

$$A - B = D - C, \quad B - C = A - D.$$

Enfin on notera souvent un vecteur libre par une lettre unique, en employant un caractère spécial tel que  $\mathbf{u}$  (*égyptienne*). L'égalité

$$B - A = \mathbf{u}$$

étant traitée comme une égalité algébrique, on en tire

$$B = A + \mathbf{u},$$

d'un emploi commode. On a fréquemment en effet, étant donné un point A, à considérer le point B, extrémité d'un segment orienté ayant A pour origine et  $\mathbf{u}$  pour vecteur libre. On dira plus brièvement : le point  $A + \mathbf{u}$ .

Le *module* d'un vecteur  $\mathbf{u}$  est le nombre essentiellement positif qui mesure la longueur d'un segment

orienté de vecteur  $\mathbf{u}$ , l'unité de longueur étant choisie. On le note mod  $\mathbf{u}$ .

Les expressions *vecteurs libres parallèles*, *vecteurs libres parallèles et de même sens*, *vecteurs libres parallèles à une droite*, etc. se comprennent d'elles-mêmes.

3. Le *support* d'un segment orienté est la droite, indéfiniment prolongée, qui contient ce segment. On dit souvent qu'un *vecteur glissant* est un segment orienté, deux segments orientés équipollents et de même support n'étant pas considérés comme distincts. Il me paraît plus net de dire qu'un *vecteur glissant est le système formé d'une droite D et d'un vecteur libre  $\mathbf{u}$  parallèle à D*. On a ainsi une définition nominale.

Un vecteur glissant ne peut être figuré que par un segment orienté représentatif  $\overrightarrow{AB}$ , celui-ci pouvant être remplacé par l'un quelconque des segments orientés équipollents et de même support. Dans bien des cas, on peut sans inconvénient désigner par la même notation  $\overrightarrow{AB}$  le segment orienté et le vecteur glissant qu'il représente. Une autre notation, à laquelle conduit immédiatement la définition, est  $(D, \mathbf{u})$ . Elle est meilleure que la première, parce qu'elle ne fait intervenir que des éléments absolus du vecteur glissant. Mais la question de commodité passe souvent avant la logique. C'est pourquoi je préconiserai comme fréquemment avantageuse une troisième notation :  $A\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}$  étant le vecteur libre du vecteur glissant, et A l'origine d'un segment orienté représentatif quelconque. On a donc

$$A\mathbf{u} = A'\mathbf{u},$$

si  $A'$  est un point quelconque du support de  $A\mathbf{u}$ .

4. Je ne rappellerai pas les définitions bien connues de la *somme* de plusieurs vecteurs libres, du *produit scalaire* et du *produit vectoriel* de deux vecteurs libres. Le premier a depuis longtemps droit de cité dans l'enseignement, mais on y parle beaucoup plus timidement du produit vectoriel, je ne sais pourquoi. Les notations les plus recommandables me paraissent être celles de Burati-Forti et Marcolongo,  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  et  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ . J'aime mieux  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  que  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ , employé par M. G. Bouligand dans ses récentes *Leçons de Géométrie vectorielle*. Le point est un peu maigre. Il semble humilier le produit scalaire devant le produit vectoriel, et il n'y a pas de raison pour cela.

Je n'estime pas qu'en Spéciales il faille pousser jusqu'à l'étude du *double produit vectoriel*  $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$  et du *produit mixte*  $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$ . Je dirai toutefois, puisque l'occasion s'en présente, qu'il me paraît plus simple d'écrire ce dernier produit  $\mathbf{u} \mathbf{v} \mathbf{w}$ , en supprimant les signes. On en a le droit à cause de

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \times \mathbf{w}.$$

5. Le *moment* d'un vecteur glissant  $A\mathbf{u}$  par rapport à un point  $O$  est le vecteur libre  $(A - O) \wedge \mathbf{u}$ . Sans doute, on peut le considérer comme un vecteur glissant dont le support passe par le point  $O$ , et c'est même plus naturel *a priori*, mais le développement ultérieur de la théorie est plus souple si l'on considère le moment comme un vecteur libre.

6. Un *système de vecteurs glissants* peut être nommé plus brièvement un *torseur*, ce que plusieurs font déjà. N'oublions pas que la parole a une puissance créatrice, et qu'un mot unique est plus propre qu'une périphrase à faire concevoir l'individualité d'un être. Aurions-nous

une idée aussi nette de l'ellipse, si nous nous obstinions à l'appeler *le lieu des points tels que la somme de leurs distances*, etc. ? Or un torseur, qui se présente comme système de certains éléments, se comporte bien comme un être synthétique, à la notion duquel il importe de parvenir. On peut modifier à l'infini sa constitution intime, sans qu'il cesse d'être le même torseur.

Un torseur, constitué par les vecteurs glissants  $A_1 \mathbf{u}_1$ ,  $A_2 \mathbf{u}_2$ , ...,  $A_n \mathbf{u}_n$ , sera désigné par la notation

$$\mathfrak{C} = A_1 \mathbf{u}_1 + A_2 \mathbf{u}_2 + \dots + A_n \mathbf{u}_n = \sum_1^n A_i \mathbf{u}_i,$$

c'est-à-dire qu'il sera considéré comme *somme de ses vecteurs glissants*. De la sorte, le torseur formé par la réunion des torseurs  $\mathfrak{C}$  et  $\mathfrak{C}'$  sera désigné par  $\mathfrak{C} + \mathfrak{C}'$ .

On appellera *torseur opposé* à  $\mathfrak{C}$  et l'on désignera par  $-\mathfrak{C}$  le torseur  $\sum A_i (-\mathbf{u}_i)$ .

Le *moment* d'un torseur par rapport à un point est la somme des moments individuels de ses vecteurs glissants par rapport à ce point. On dit habituellement : *moment résultant*. On peut supprimer l'épithète.

Le vecteur  $\sum \mathbf{u}_i$ , désigné comme *résultante générale*, *somme géométrique* du torseur, peut être appelé plus simplement le *vecteur* (libre) du torseur.

Un *couple* est un torseur de vecteur nul constitué par deux vecteurs glissants. Il ne faut pas dire que les supports de ceux-ci sont nécessairement distincts, car alors un couple nul ne serait pas un couple.

Un torseur de vecteur nul a même moment par rapport à tout point de l'espace. On peut donc parler d'une manière absolue du *moment* d'un tel torseur, en particulier du *moment* d'un couple. Ne pas dire l'*axe* d'un couple. C'est un abus de langage.

Quand deux torseurs ont même moment par rapport

à un même point de l'espace, quel que soit ce point, on dit qu'ils sont *équivalents*. Je préfère dire *égaux*, parce que l'équivalence des torseurs jouit des propriétés de l'égalité. On écrira  $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}'$ . De même un torseur *équivalent à zéro* sera dit plus simplement *torseur nul*, et l'on écrira  $\mathfrak{C} = 0$ .

Il est aisé de voir que l'on peut traiter comme des égalités algébriques les égalités entre torseurs. Ainsi l'on a

$$\mathfrak{C} + (-\mathfrak{C}) = 0.$$

De  $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 = \mathfrak{C}_3 + \mathfrak{C}_4$ , on a le droit de tirer

$$\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_3 - \mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_4, \text{ etc.}$$

Le torseur  $\mathfrak{C} = \Sigma A_i \mathbf{u}_i$  a deux *invariants* : 1° un *invariant vectoriel*, qui est son vecteur  $\mathbf{u} = \Sigma \mathbf{u}_i$ ; 2° un *invariant scalaire*, appelé son *automoment*, qui est le produit scalaire  $\mathbf{m} \times \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{m}$  étant le moment de T par rapport à un point O quelconque.

Le problème essentiel de la théorie des torseurs est d'en *opérer la réduction*, c'est-à-dire de trouver un torseur, constitué aussi simplement que possible, qui lui soit égal. On sait qu'il existe  $\infty^4$  réductions à un système de deux vecteurs glissants et  $\infty^2$  réductions à un vecteur glissant et à un couple. La *réduction canonique* est telle que le moment du couple soit parallèle au vecteur du torseur, et elle n'est possible que d'une manière. Le support du vecteur glissant qui intervient dans la réduction canonique est appelé en général l'*axe central* du torseur. Je vois un pléonasme dans *axe central*, et il me semble que le terme d'*axe* sans plus est suffisant.

7. En cinématique, la première distinction à faire est

celle du *déplacement* et du *mouvement*. Le *déplacement* est l'opération théorique qui fait correspondre à une position d'un solide une autre position, sans qu'on ait égard aux positions intermédiaires. Le *mouvement* est l'opération physique dont le résultat est un *déplacement*. L'étude des déplacements n'est qu'un chapitre de la géométrie pure. Elle ne fait pas intervenir la considération du temps.

Dans ses ouvrages, Mannheim appliquait le terme de *déplacement* aux mouvements, en indiquant par là qu'il ne s'occupait que de leurs propriétés géométriques, et ne parlait jamais ni de vitesse ni d'accélération. Il est clair que la distinction entre le mouvement et le déplacement, au sens de Mannheim, est secondaire : car ce que Mannheim étudiait, c'était une suite de positions dépendant d'une manière continue d'une variable, et l'on peut toujours appeler  $t$  cette variable sans rien changer à la nature des choses.

La théorie des déplacements tend à prendre une forme classique. On définit d'abord un certain nombre de déplacements fondamentaux, dont les *produits* donnent tous les déplacements possibles.

Ces déplacements fondamentaux sont la *translation*, la *rotation*, le *renversement*, le *vissage*. Les deux premiers termes sont acceptés par tous. Le *renversement* est la rotation de  $180^\circ$  autour d'une droite. Darboux adoptait cette expression dans ses premiers écrits, par exemple dans une note additionnelle aux *Leçons de Cinématique* de M. Kœnigs. Dans ses *Principes de Géométrie analytique*, parus à la fin de sa vie, il l'a changée, pour des raisons que j'ignore, en celle de *retournement*. Je crois qu'il a eu tort, je dirai pourquoi tout à l'heure.

Le *vissage* porte aussi le nom de *déplacement héli-*

*coïdal* ou de *déplacement de verrou*. Je préfère l'expression la plus concise.

A côté du *déplacement*, opération générale qui fait passer d'une figure à une figure *directement* égale, il faut considérer l'opération générale qui fait passer d'une figure à une figure *inversement* égale. Le terme de *retournement*, qui apparaît pour la première fois, si je ne me trompe, dans le *Cours de Géométrie de l'École Polytechnique* de M. d'Ocagne, me semble excellent, et c'est pour cela que je conseillerai d'employer *renversement* dans le sens indiqué plus haut. Il suffit d'ailleurs de remarquer que lorsqu'on est *renversé* par une automobile, si grave que soit l'accident, on n'en sent pas pour cela son cœur passer de gauche à droite ; tandis qu'en *retournant* un gant de la main droite, on en fait un gant de la main gauche.

Un retournement particulier d'une grande importance est la *symétrie plane* ou symétrie par rapport à un plan. On dit aussi *inversion plane*. J'aime autant la première expression.

Les mouvements fondamentaux sont le *mouvement de translation*, le *mouvement de rotation*, le *mouvement de vissage*. On peut dire simplement *translation*, *rotation* et *vissage*, c'est-à-dire désigner ces mouvements de la même manière que les déplacements correspondants, quand cette synonymie n'entraîne pas de confusions, ce qui est le cas ordinaire.

Une exposition bien comprise de la cinématique (théorique ou appliquée) doit être dominée par l'idée de mouvement relatif. Sans aborder la question métaphysique de savoir si le mouvement absolu est concevable ou non, il est incontestable que nous ne pouvons étudier que les mouvements relatifs de divers solides en présence A, B, C, . . . Il est commode de désigner ces mouve-

ments par des notations telles que  $\left(\frac{A}{B}\right)$ ,  $\left(\frac{C}{B}\right)$ , ..., et d'écrire symboliquement

$$\left(\frac{C}{A}\right) = \left(\frac{C}{B}\right) \left(\frac{B}{A}\right),$$

pour exprimer que le premier de ces mouvements résulte de la composition des deux autres. Remarquer qu'on peut écrire aussi bien

$$\left(\frac{C}{A}\right) = \left(\frac{B}{A}\right) \left(\frac{C}{B}\right),$$

car la composition de deux mouvements, phénomènes simultanés, est commutative, à la différence de la multiplication de deux déplacements, opérations successives (on reconnaît même, en y réfléchissant, que la composition des mouvements n'a rien de commun avec celle des déplacements, et qu'il est pour cette raison préférable d'employer le terme de *multiplication* dans ce dernier cas).

Les deux mouvements  $\left(\frac{A}{B}\right)$  et  $\left(\frac{B}{A}\right)$  sont souvent dits *inverses* l'un de l'autre. Je crois qu'il vaut mieux dire : *réciproques*. Le mouvement *inverse* de celui d'un train qui est allé de Paris à Marseille est celui qui le ramène de Marseille à Paris. Le mouvement *réciproque* est celui de la voie, par rapport à un voyageur qui se croit immobile.

J'aurais pu, dans cet article, invoquer diverses autorités à l'appui de quelques expressions peu répandues. Je n'en ai rien fait, pour mettre le jugement du lecteur plus à son aise, et aussi pour m'épargner des recherches ennuyeuses. Je n'ai d'ailleurs jamais estimé que le nom de la Bruyère donnât du prestige à « ... qu'il y a des hommes et qui pensent ».

---



---

**ÉCOLE POLYTECHNIQUE (CONCOURS DE 1924).**


---

**Première composition de Mathématiques.**

I. Soit la courbe représentée par l'équation

$$(1) \quad y = \frac{1}{(x^2 - 2x + 10)\sqrt{x^2 + 16}},$$

calculer l'aire indéfinie dans les deux sens comprise entre cette courbe et l'axe des  $x$ .

II. 1° Construire la courbe représentant les variations de la fonction

$$(2) \quad y = 2x e^{\frac{1}{x}} + 4x^3 - 15x^2 + 18x.$$

2° Trouver un polynôme  $P(x)$  tel que  $y - P(x)$  tende vers zéro pour  $x$  croissant indéfiniment.

3° Placer la courbe  $y = P(x)$  sur la figure représentant la courbe définie par l'équation (2).

*Nota.* — On ne demande pas de calculer par approximation les coordonnées des points à tangente horizontale.

III. Développer en série entière en  $x$  la fonction

$$y = \text{arc tang}(x + 1)$$

et déterminer le rayon de convergence de la série.

**Deuxième composition de Mathématiques.**

On considère les hyperboles équilatères  $H$  admettant un foyer  $F$  et telles que les directrices corres-

pondantes  $D$  passent par un point fixe  $O$  (le foyer  $F$  est supposé donné) :

1° Démontrer que le point  $O$  admet la même polaire par rapport à toutes ces hyperboles.

2° Par un point  $P$  du plan il passe deux hyperboles  $H$  réelles ou imaginaires, construire leurs directrices relatives au foyer  $F$ .

3° Dans quelle région du plan doit se trouver le point  $P$  pour que les deux hyperboles  $H$  qui y passent soient réelles? Cette région est limitée par une conique  $\Gamma$ . Trouver la polaire du point  $O$  par rapport à cette conique.

4° Trouver l'enveloppe des hyperboles  $H$ . En combien de points chaque hyperbole touche-t-elle son enveloppe? Comment sont répartis les points de contact?

5° Quel est le lieu que doit décrire le point  $P$  pour que les directrices  $D$  des hyperboles  $H$  passant par ce point fassent entre elles un angle donné  $\omega$ ? Démontrer que ce lieu se décompose en coniques et que chacun des points  $O$  et  $F$  admet la même polaire par rapport à toutes ces coniques.

#### SOLUTION

Par M. A. CLODION.

1° C'est un théorème classique que la polaire du point  $O$  par rapport à  $H$  est la perpendiculaire menée par le point  $F$  à  $FO$ . Cette polaire est donc fixe. La condition que  $H$  est une hyperbole équilatère n'intervient pas.  $H$  pourrait être une conique quelconque de foyer  $F$  et de directrice  $D$ .

2° Une hyperbole équilatère est une conique d'excentricité égale à  $\sqrt{2}$ . Donc la directrice d'une

hyperbole équilatère  $H$  passant en  $P$  est à une distance de ce point égale à  $\frac{PF}{\sqrt{2}}$ . Elle est donc tangente au cercle  $C$  de centre  $P$  et de rayon égal à  $\frac{PF}{\sqrt{2}}$ . On peut mener par le point  $O$  deux tangentes à ce cercle, distinctes et réelles ou imaginaires, ou confondues. A chacune de ces tangentes correspond une  $H$  satisfaisante.

3° Pour que  $H$  soit réelle, il faut et il suffit que la construction de ces tangentes soit possible, c'est-à-dire que le point  $O$  soit extérieur au cercle  $C$ , ou encore que l'on ait

$$PO \geq \frac{PF}{\sqrt{2}}.$$

Considérons le lieu des points tels que l'on ait

$$PO = \frac{PF}{\sqrt{2}}.$$

C'est, comme on le voit, un cercle dont un diamètre est dirigé suivant  $OF$ , les extrémités de ce diamètre divisant harmoniquement le segment  $OF$ .  $O$  est à l'intérieur,  $F$  à l'extérieur de  $G$ . Si  $P$  est à l'extérieur de  $G$ , on a

$$PO > \frac{PF}{\sqrt{2}},$$

et  $H$  est réelle. Si  $P$  est à l'intérieur de  $G$ ,  $H$  est imaginaire.

La polaire du point  $O$ , par rapport à  $G$ , se confond avec la droite trouvée au 1°.

4° Considérons d'abord deux hyperboles distinctes  $H$  et  $H'$ , de directrices  $D$  et  $D'$ . Elles se coupent en quatre points, réels ou imaginaires. Soient  $M$  l'un d'eux,  $I$  et  $I'$

ses projections sur D et sur D'. On a

$$MI = MI' = \frac{MF}{\sqrt{2}}.$$

Donc le point M est sur l'une des bissectrices de l'angle (D, D'). Réciproquement, les deux bissectrices de cet angle coupent H aux quatre points d'intersection de H et de H'. Si maintenant on fait tendre H' vers H, l'une des bissectrices considérées tend vers D. Elle rencontre H aux points de contact des tangentes issues à cette conique de point F, c'est-à-dire sur les isotropes issues de ce dernier point. Ainsi deux des points caractéristiques de H décrivent les isotropes qui se coupent en F. L'enveloppe comprend donc ces deux isotropes, comme il était évident *a priori*.

La seconde des bissectrices de l'angle (D, D') tend vers la perpendiculaire élevée en O à D. Cette perpendiculaire rencontre H aux deux autres points caractéristiques, dont le lieu constitue la partie intéressante de l'enveloppe.

Soit M l'un d'eux. Sa distance à D est MO. On a donc

$$MO = \frac{MF}{\sqrt{2}}.$$

D'où il résulte que *le lieu de ce point, c'est-à-dire l'enveloppe de H, n'est autre que le cercle G du 3°.*

5° D'après le 2°, le point P doit être tel que les tangentes issues du point O au cercle de centre P et de rayon  $\frac{PF}{\sqrt{2}}$  fassent entre elles l'angle  $\omega$  ou l'angle  $\pi - \omega$  (je suppose l'angle donné  $\omega$  compris entre O et  $\pi$ ). On a donc, soit

$$PO \sin \frac{\omega}{2} = \frac{PF}{\sqrt{2}},$$

soit

$$PO \sin \frac{\pi - \omega}{2} = PO \cos \frac{\omega}{2} = \frac{PF}{\sqrt{2}},$$

d'où

$$\frac{PF}{PO} = \sqrt{2} \sin \frac{\omega}{2} \quad \text{ou} \quad \sqrt{2} \cos \frac{\omega}{2}.$$

Le lieu du point P se compose donc, *en général*, de deux cercles.

Par rapport à chacun d'eux, la polaire de chacun des points O et F est la perpendiculaire élevée à OF par l'autre point.

Si  $\omega = \frac{\pi}{2}$ , les deux cercles se réduisent à la médiatrice de OF.

*Remarques.* — 1° On reconnaît aisément que, dans une hyperbole équilatère, le centre est le point symétrique d'un foyer par rapport à la directrice correspondante.

D'où l'on conclut que *le lieu des centres des hyperboles H est le cercle de centre O et de rayon OF.*

On trouvera encore des cercles comme lieux du second foyer, des sommets ou du pied de la seconde directrice de H. Tous ces cercles sont homothétiques et passent par F. On en conclut que *la seconde directrice et l'axe non transverse de H passent par des points fixes situés sur OF.*

2° Tous les résultats établis se généralisent immédiatement, en supposant que les H sont des hyperboles semblables à une hyperbole donnée quelconque.

#### Épure de Géométrie descriptive.

*On considère un système d'axes rectangulaires Ox, Oy, Oz : Ox étant dirigé en avant, Oy vers la droite et Oz vers le haut, et la droite (T)*

qui a pour équations

$$y = a, \quad x + z = 0.$$

L'axe vertical  $Oz$  tournant autour de  $(T)$  engendre un hyperboloïde de révolution que l'on coupe par un cylindre de révolution dont l'axe est  $Oz$ , et le rayon  $2a$ , et on limite la figure par deux plans horizontaux ayant pour équations  $z = \pm 2a$ . On demande de représenter les deux projections du solide compris entre les deux plans horizontaux précédents, à l'intérieur à la fois de l'hyperboloïde et du cylindre.

On déterminera un point courant de chacune des courbes d'intersection avec sa tangente, ainsi que les points remarquables avec leurs tangentes.

On distinguera les parties vues des parties cachées.

Sur la projection verticale, on couvrira de hachures verticales (ou d'une teinte claire à l'encre de Chine), la partie de la figure où l'on voit la surface du cylindre.

On indiquera sommairement, en marge de l'épure, la méthode employée pour construire les courbes et leurs tangentes, et l'on signalera les particularités qu'on aura remarquées; on pourra aussi donner les équations des courbes qui interviennent dans l'épure.

Disposition des données :  $a = 4^{\text{cm}}$  sur la projection verticale, on place  $Oz$  parallèle aux grands côtés de la feuille, et l'origine des coordonnées à  $8^{\text{cm}}$  au-dessus du centre de la feuille. Sur la projection horizontale, l'origine sera placée à  $8^{\text{cm}}$  en avant du centre de la feuille.

[O'2a]

**SUR LES AIRES ET LES COURBES SUPPLÉMENTAIRES  
EN GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE ;**

PAR RAOUL BRICARD.

1. Le présent article ne renferme probablement rien de bien nouveau. Il a pour objet de préciser certaines notions courantes sur les aires et sur les courbes supplémentaires, en géométrie sphérique.

2. *Définitions et conventions.* — Suivant l'usage, je prends comme unité de longueur le rayon de la sphère sur laquelle sont tracées les figures étudiées, de sorte que l'aire totale de la sphère est le nombre  $4\pi$ .

A chaque point de la sphère on peut attacher un sens positif de rotation sur la sphère autour de ce point (parce que la sphère est une surface *bilatérale*). Je conviendrai que ce sens est celui de *droite à gauche*, pour un observateur debout sur la sphère au point considéré.

J'appelle *arc régulier* un arc de courbe sphérique jouissant des propriétés suivantes : en chaque point il a un grand cercle tangent bien déterminé, et un cercle osculateur (nécessairement tracé sur la sphère) *autre qu'un grand cercle ou un cercle-point*. En un point d'un arc régulier, le *centre de courbure sphérique* est celui des deux pôles du cercle osculateur qui est le plus rapproché, et le *rayon de courbure sphérique* est le plus petit des deux rayons sphériques du même cercle. Il est compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ , bornes exclues (sauf peut-être en des points exceptionnels).

Quand un point  $M$  parcourt un arc régulier  $AB$  en allant de  $A$  vers  $B$ , le centre de courbure sphérique en  $M$  est constamment à gauche ou à droite du point  $M$ . Je dirai, suivant le cas, que l'arc  $AB$  est à *gauche* ou à *droite*. Deux arcs, l'un à gauche, l'autre à droite, sont de *sortes* différentes. Pour un déplacement infiniment petit du point  $M$  dans le sens indiqué, le grand cercle tangent en  $M$  tourne, autour d'un point infiniment voisin de  $M$ , d'un angle infiniment petit  $d\varphi$  (*angle de contingence sphérique*). Cet angle de contingence est, constamment positif pour un arc à gauche et négatif pour un arc à droite.

Un arc régulier et le même arc, parcouru dans le sens opposé, sont de *sortes* différentes. Un arc régulier et l'arc *antipode* (c'est-à-dire l'arc lieu des points de la sphère diamétralement opposés à ceux de l'arc donné) sont aussi de *sortes* différentes, étant bien entendu que les deux arcs sont supposés parcourus simultanément par des points qui ne cessent pas d'être antipodes l'un de l'autre.

Les courbes considérées ici seront formées d'arcs réguliers successifs en nombre fini, deux arcs réguliers pouvant être séparés par des *points d'inflexion*, des *points de rebroussement* ou des *points anguleux*. Un point d'inflexion est celui qui sépare deux arcs réguliers de *sortes* différentes tangents l'un à l'autre, et cela de telle manière qu'un point décrivant les deux arcs à la suite ne change pas le sens de son parcours au point considéré. Les points de rebroussement et les points anguleux n'ont pas besoin d'être définis. Pour simplifier l'exposition, je supposerai toujours que les points de rebroussement sont de *première espèce*, c'est-à-dire qu'ils séparent des arcs de même sorte. Les points de rebroussement de *seconde espèce*, qui

séparent des arcs de sortes différentes, sont donc exclus (un point de rebroussement de seconde espèce peut être considéré comme formé par l'union d'un point de rebroussement de première espèce et d'un point d'inflexion).

Les courbes peuvent avoir des points doubles, à tangentes distinctes ou non; quand les tangentes ne sont pas distinctes, il faut convenir quels sont les arcs qui se prolongent l'un l'autre.

### 3. Aire d'une courbe fermée sans point double.

— Soit  $C$  une telle courbe. Elle sépare deux régions sur la sphère, et l'expression : *aire de  $C$*  peut, *a priori*, désigner l'aire de l'une ou de l'autre de ces deux régions. Pour supprimer l'ambiguïté, donnons-nous sur  $C$  un sens de parcours. Alors l'une des régions est à gauche de  $C$ , l'autre à droite. J'appelle *aire de la courbe  $C$  orientée* et je désigne par  $(C)$  l'aire de la région de gauche.

Si la courbe  $C$  porte plusieurs points  $M, N, P$  se succédant quand on parcourt  $C$  dans un certain sens, la notation  $(MNPM)$  fait connaître à la fois ce sens en même temps qu'elle désigne l'aire  $(C)$ .

Il est clair que l'on a

$$(MNPM) + (MPNM) = 4\pi.$$

On reconnaît tout de suite que la définition précédente doit être élargie, si l'on veut que l'aire d'une courbe varie toujours d'une manière continue, quand cette courbe se déforme elle-même continûment.

Considérons en effet par exemple un triangle sphérique  $ABC$  à gauche (c'est-à-dire que le sens de parcours  $ABC$  laisse à gauche l'intérieur, au sens ordi-

naire du mot, de ce triangle). Alors  $(ABC)$  est l'aire, au sens ordinaire, du triangle.

Si, les points B et C étant supposés fixes, A varie de manière à traverser BC, ABC, une fois la traversée faite, devient un triangle à droite, et  $(ABC)$  passe d'une valeur très petite à une valeur voisine de  $4\pi$ . Pour éviter cette discontinuité qui serait fort gênante, j'admettrai que l'aire du triangle, et plus généralement l'aire d'une courbe fermée C, *n'est définie qu'à un multiple près de  $4\pi$* . Si donc S est l'aire, au sens ordinaire, de la région à gauche de C, on prendra comme formule de définition

$$(C) = S + 4k\pi,$$

$k$  étant un entier quelconque positif, négatif ou nul. J'écrirai plus brièvement, en employant la notation des congruences arithmétiques,

$$(C) \equiv S \pmod{4\pi}.$$

On peut presque toujours omettre la mention du module.

Le même fait se présente dans la mesure des arcs de cercle : sur le cercle orienté de rayon 1, la longueur algébrique d'un arc MN ne peut être définie qu'à  $2k\pi$  près, si l'on veut que cette longueur algébrique varie d'une manière continue, quand les points M et N varient eux-mêmes continûment suivant des lois quelconques.

Si C et C' sont, soit la même courbe fermée parcourue successivement dans deux sens opposés, soit deux courbes antipodes parcourues simultanément par deux points antipodes, on a

$$(C') \equiv -(C).$$

4. Aire d'une courbe fermée quelconque. —  
Établissons d'abord le lemme suivant :

Soient A, B, C, O quatre points quelconques de la sphère, dont deux quelconques ne sont pas antipodes. On a

$$(1) \quad (OBC) + (OCA) + (OAB) \equiv (ABC),$$

OBC, OCA, OAB, ABC étant des triangles sphériques au sens ordinaire du mot (côtés  $< \pi$ ).

Traçons complètement les grands cercles qui portent les côtés du triangle ABC. La surface de la sphère est ainsi partagée en huit triangles ABC, A'BC, AB'C, ABC', AB'C', A'BC', A'B'C, A'B'C', A', B' et C' étant les antipodes respectifs de A, B, C. En plaçant le point O successivement dans chacun de ces triangles, on reconnaît sans peine que la relation (1) a toujours lieu.

Soient maintenant A, B, C, D, O cinq points quelconques de la sphère. On a, d'après (1),

$$\begin{aligned} (OAB) + (OBC) + (OCA) &\equiv (ABC), \\ (OAC) + (OCD) + (ODA) &\equiv (ACD), \end{aligned}$$

d'où, en ajoutant,

$$(OAB) + (OBC) + (OCD) + (ODA) \equiv (ABC) + (ACD).$$

Plus généralement, A, B, C, ..., K, L étant des points quelconques de la sphère, la somme

$$S = (OAB) + (OBC) + \dots + (OKL) + (OLA)$$

est indépendante du point O, à un multiple près de  $4\pi$ .

Si le polygone sphérique AB ... KLA n'a pas de points doubles, on reconnaît que S n'est autre que l'aire (AB... KLA), à un multiple près de  $4\pi$ . S'il a des

points doubles, on conviendra que l'aire (AB...KLA), qui n'a pas de signification *a priori*, est par définition la somme S, toujours à  $4k\pi$  près.

Prenons maintenant une courbe fermée C quelconque. On peut la considérer comme limite d'un polygone sphérique inscrit AB...LA dont tous les côtés tendent vers zéro, et la somme S devient à la limite une certaine intégrale prise le long de C. Le point O peut toujours être quelconque, sous la réserve qu'il n'appartienne ni à C ni à l'antipode de C, de telle manière que si un point M décrit C, les longueurs de l'arc OM, qui se déduisent par continuité les unes des autres, soient toujours comprises entre 0 et  $\pi$ , bornes exclues. M et M' étant deux points de C infiniment voisins, l'élément de l'intégrale, qui est l'aire du triangle OMM', a pour valeur en grandeur et en signe, d'après une formule connue,

$$(1 - \cos OM) d\theta$$

en désignant par  $d\theta$  l'angle  $\widehat{MOM'}$  affecté d'un signe. Ainsi, par définition, on a

$$(2) \quad (C) \equiv \int_C (1 - \cos OM) d\theta \quad (1).$$

5. *Autre expression de l'aire.* — Considérons d'abord une courbe fermée orientée C sans points doubles (*fig. 1*). Je vais établir la formule

$$(3) \quad (C) \equiv 2\pi - \int_C d\varphi,$$

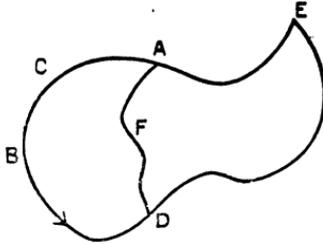
---

(1) Comme exercice, on peut chercher à démontrer directement que l'intégrale curviligne qui forme le second membre de (2) est indépendante du point O, à  $4k\pi$  près.

$d\varphi$  étant l'angle de contingence en un point de la courbe.

Si la courbe C n'a ni points anguleux ni points de rebroussement, l'intégrale qui figure dans le second

Fig. 1.



membre de (3) ne donne lieu à aucun commentaire. S'il existe un point anguleux tel que E, on peut d'abord *l'émousser*, c'est-à-dire raccorder les arcs DE et EA par une très petite courbe *n'introduisant pas de point double*. A la limite, on voit que ce point double fait intervenir dans l'intégrale le terme  $\widehat{DE, EA}$ , en désignant ainsi l'angle compris entre  $-\pi$  et  $+\pi$  dont il faut faire tourner autour de point E le grand cercle tangent à DE pour l'amener à coïncider avec le grand cercle tangent à EA, ces deux grands cercles étant orientés comme les arcs correspondants. De même, un point de rebroussement fait intervenir un angle égal à  $+\pi$  ou à  $-\pi$ , le recours à l'émoussement préalable ne laissant aucun doute sur le signe qu'il faut prendre.

Posons provisoirement

$$[C] = 2\pi - \int_C d\varphi.$$

Il faut montrer qu'on a

$$(4) \quad [C] \equiv (C).$$

Tout d'abord, joignons deux points A et D de C par

un arc **AFD**, contenu tout entier dans la région à gauche de **C** et n'ayant pas de points doubles. Je dis qu'on a

$$(5) \quad [ABDEA] = [ABDFA] + [AFDEA].$$

On a en effet par définition

$$[ABDFA] = 2\pi - \int_{ABDFA} d\varphi.$$

Mais, d'après la remarque relative aux points anguleux,

$$\int_{ABDFA} d\varphi = \int_{ABD} d\varphi + \int_{DFA} d\varphi + \widehat{BD, DF} + \widehat{FA, AB}.$$

Donc

$$[ABDFA] = 2\pi - \int_{ABD} d\varphi - \int_{DFA} d\varphi - \widehat{BD, DF} - \widehat{FA, AB}.$$

De même

$$[AFDEA] = 2\pi - \int_{AFD} d\varphi - \int_{DEA} d\varphi - \widehat{FD, DE} - \widehat{EA, AF}.$$

Ajoutant, il vient, en tenant compte des intégrales qui se détruisent,

$$\begin{aligned} [ABDFA] + [AFDEA] \\ = 4\pi - \int_{ABDEA} d\varphi - (\widehat{BD, DF} + \widehat{FD, DE} + \widehat{EA, AF} + \widehat{FA, AB}) \end{aligned}$$

Supposons que les points **A** et **D** ne soient anguleux ni l'un ni l'autre sur la courbe **C** (s'ils l'étaient, on les émousserait). Les quatre angles mis entre parenthèses à la fin de la formule précédente sont tous compris entre 0 et  $\pi$  et sont deux à deux supplémentaires. On a donc

$$\begin{aligned} [ABDFA] + [AFDEA] &= 4\pi - \int_{ABDEA} d\varphi - 2\pi \\ &= 2\pi - \int_{ABDEA} d\varphi = [ABDEA], \end{aligned}$$

La relation (5) s'étend naturellement à la décomposition de la région à gauche de C en un nombre quelconque de régions.

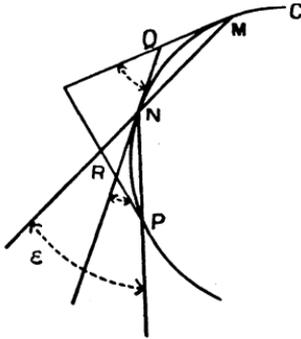
Cela posé, la relation (3) ou (4) est vraie pour un triangle sphérique ABC à gauche, car elle se réduit alors à

$$\begin{aligned} (\text{ABC}) &= 2\pi - (\pi - \hat{A}) - (\pi - \hat{B}) - (\pi - \hat{C}) \\ &= \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi, \end{aligned}$$

ce qui est une formule classique. On peut donc, par application de la formule (5), étendre la formule (3) à un contour polygonal sphérique quelconque sans points doubles, la région à gauche d'un tel contour pouvant toujours être décomposée en triangles à gauche.

Par un passage à la limite, on étend la formule (3) à une courbe fermée quelconque sans points doubles. Si le lecteur éprouve ici quelque inquiétude, voici (esquissée) la démonstration. Il faut établir que, MNP

Fig. 2.



étant un polygone, ayant pour côtés des arcs de grand cercle, inscrit dans une courbe C (*fig. 2*) <sup>(1)</sup>, la somme

<sup>(1)</sup> Sur cette figure, les arcs de grand cercle sont représentés par des droites.

des angles extérieurs  $\epsilon$  de ce polygone tend vers l'intégrale  $\int_C d\varphi$ , quand les côtés du polygone tendent vers zéro.

Menons les grands cercles tangents à C en M, N, P. On forme ainsi deux triangles sphériques infiniment petits MNQ, NRP. On a,  $\hat{Q}$  étant l'angle infiniment petit de sommet Q,

$$\hat{Q} \sim \widehat{QMN} + \widehat{MNQ},$$

à un infiniment petit du second ordre près, MN étant l'infiniment petit principal, car le triangle MNQ étant infiniment petit, son excès sphérique, égal à son aire, est du second ordre.

D'autre part, si les coordonnées d'un point de C sont des fonctions régulières d'un paramètre, on voit, sans qu'un calcul effectif soit nécessaire, que les rapports

$$\frac{\widehat{QMN}}{MN}, \quad \frac{\widehat{MNQ}}{MN}$$

tendent vers une même limite, quand N tend vers M.

Donc le rapport des angles  $\widehat{QMN}$ ,  $\widehat{MNQ}$  tend vers l'unité, et l'on peut écrire, toujours en négligeant un infiniment petit d'ordre supérieur,

$$\hat{Q} \sim {}_2\widehat{MNQ}.$$

De même,  $\hat{R}$  étant l'angle infiniment petit de sommet R,

$$\hat{R} \sim {}_2\widehat{RNP}.$$

Donc

$$\hat{Q} + \hat{R} \sim {}_2(\widehat{MNQ} + \widehat{RNP}) = 2\epsilon.$$

On peut donc écrire

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\hat{Q} + R) (1 + \theta),$$

$\theta$  étant infiniment petit.

Si l'on étend cette égalité à tous les points de  $C$ , on a, en ajoutant,

$$\Sigma \varepsilon = (1 + \theta') \Sigma \hat{Q},$$

$\theta'$  étant encore infiniment petit (il faut ici invoquer la continuité uniforme). Par conséquent

$$\lim \Sigma \varepsilon = \int_C d\varphi,$$

c. q. f. d. (1).

6. *Courbe fermée quelconque* — Si maintenant l'on suppose que  $C$  est une courbe fermée ayant des points doubles en nombre quelconque  $m$ , on a la formule

$$(6) \quad (C) \equiv 2(1 + m)\pi - \int_C d\varphi.$$

Si  $m = 0$ , la formule (6) est exacte, puisqu'elle se réduit à la formule (3). Il suffit donc d'établir que la formule (6) est vraie, si on la suppose établie pour toutes les courbes ayant moins de  $m$  points doubles.

A étant un point double de  $\hat{C}$  (*fig. 3*), décrivons cette courbe en partant de A jusqu'à ce que nous y repassions. Nous décrivons ainsi une première courbe fermée  $C_1$ . Continuons le parcours. Nous revenons encore au point A après avoir décrit une nouvelle

(1) La formule (3) n'est qu'un cas particulier de la *formule d'Ossian Bonnet*, vraie pour une surface quelconque (voir par exemple VESSIOT, *Leçons de Géométrie supérieure*, p. 75).

courbe fermée  $C_2$ . On a, en vertu de la définition (2) de  $(C)$ ,

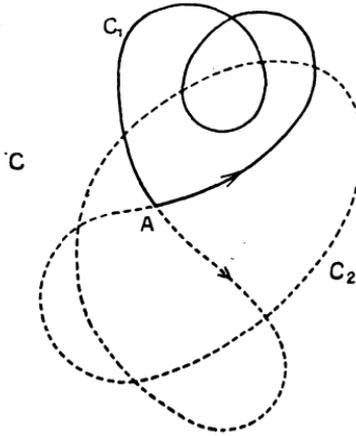
$$(C) \equiv (C_1) + (C_2).$$

Soient  $m_1$  et  $m_2$  les nombres des points doubles de  $C_1$  et de  $C_2$ , respectivement. On a

$$m = 1 + m_1 + m_2 + n,$$

$n$  étant le nombre des points doubles de  $C$  qui sont les

Fig. 3.



points d'intersection de  $C_1$  et  $C_2$ ;  $n$  est un nombre pair, puisque  $C_1$  et  $C_2$  sont des courbes fermées. Donc

$$m \equiv 1 + m_1 + m_2 \pmod{2}.$$

D'autre part, (6) est supposée vraie pour  $C_1$  et pour  $C_2$ .  
Donc

$$(C_1) \equiv 2(1 + m_1)\pi - \int_{C_1} d\varphi,$$

$$(C_2) \equiv 2(1 + m_2)\pi - \int_{C_2} d\varphi,$$

d'où

$$\begin{aligned} (C) &\equiv (C_1) + (C_2) \equiv 2\pi + 2(1 + m_1 + m_2)\pi - \int_{C_1} d\varphi - \int_{C_2} d\varphi \\ &\equiv 2(1 + m)\pi - \int_{C_1} d\varphi - \int_{C_2} d\varphi. \end{aligned}$$

Enfin  $\int_{C_1} + \int_{C_2}$  ne diffère de  $\int_C$  que par la somme des angles introduits dans les deux premières intégrales par le point anguleux A, et la figure montre clairement que cette somme est nulle. La formule (6) est donc établie.

7. *Corollaire.* — On déduit de la formule (6) une conséquence assez curieuse. Portons sur tous les grands cercles tangents à C, à partir des points de contact, et dans le sens qui résulte du sens de parcours de C, des longueurs égales à  $\frac{\pi}{2}$ . Le lieu des extrémités des quadrants ainsi obtenus est une courbe  $C_1$ , dont l'aire est égale à celle de la courbe C, augmentée de l'aire balayée par les quadrants. Or, l'élément de cette dernière est égal à  $d\varphi$ . On a donc

$$(C_1) \equiv 2(1 + m)\pi - \int_C d\varphi + \int_C d\varphi \equiv 2(1 + m)\pi.$$

Ainsi l'aire  $(C_1)$  est égale (mod  $4\pi$ ) à  $2\pi$  ou à zéro, suivant que C a un nombre pair ou un nombre impair de points doubles.

Si l'on invoque les propriétés classiques des indicatrices sphériques des courbes gauches, on conclut de là le théorème suivant, dû à Jacobi (1) :

---

(1) *Gesammelte Werke*, t. VII, p. 34. J. Bertrand cite ce théorème dans son *Traité de Calcul différentiel et de calcul intégral*, t. I, p. 744. Ni l'un ni l'autre de ces auteurs n'a regardé la question de près. Ils disent que la courbe C, divise l'aire de la sphère en deux parties équivalentes, ce qui n'est pas toujours exact, comme le montrent les développements du présent article.

*Par un point O menons des parallèles aux normales principales d'une courbe gauche fermée quelconque. Les traces de ces parallèles sur une sphère de centre O et de rayon égal à l'unité ont pour lieu une courbe fermée C, d'aire égale, soit à  $2\pi$ , soit à zéro.*

8. *Courbes supplémentaires.* — La courbe supplémentaire d'une courbe C est la courbe C', lieu des pôles des grands cercles tangents à C. Il est bien connu, et d'ailleurs presque évident, que, réciproquement, C est supplémentaire de C'.

Un grand cercle ayant deux pôles, cette définition donnerait deux supplémentaires à C. Pour avoir une courbe unique, voici comment je procéderai :

Soit d'abord un arc régulier AB, décrit dans le sens AB. Son arc supplémentaire A'B' sera le lieu des pôles à gauche ou à droite des grands cercles tangents orientés comme AB, suivant que cet arc est lui-même à gauche ou à droite.

Prenons maintenant une courbe fermée C, que je suppose, pour simplifier, dépourvue de points anguleux. Elle se compose d'arcs réguliers séparés par des points d'inflexion ou par des points de rebroussement. Les premiers séparent des arcs de sortes différentes et les seconds des arcs de même sorte, puisque nous excluons les rebroussements de seconde espèce.

Les points d'inflexion de C sont nécessairement en nombre pair, puisque, à chacun d'eux,  $d\varphi$  change de signe et que  $d\varphi$  doit reprendre son signe initial quand le point décrivant C revient au point de départ. Les rebroussements peuvent être en nombre pair ou en nombre impair.

Si l'on construit les arcs supplémentaires des arcs

réguliers successifs qui constituent AB, ils forment une suite discontinue, l'origine de chacun d'eux étant l'antipode de l'extrémité de l'arc précédent, que la discontinuité provienne d'un point d'inflexion ou d'un rebroussement de C. Pour obtenir une courbe continue, on peut s'y prendre comme il suit : partant d'un point d'inflexion ou d'un point de rebroussement de C, décrivons le premier arc régulier AB de cette courbe et construisons son supplémentaire A'B' comme il a été indiqué plus haut. Soit BD l'arc régulier qui suit AB. Je remplacerai son supplémentaire par l'arc antipode B'D'. B pouvait être un point d'inflexion ou un point de rebroussement de C. Il est aisé de reconnaître que, suivant le cas, B' est un rebroussement ou un point d'inflexion de A'B'D' (1).

En continuant ainsi, on construit un arc A'B'D'... , qui sera fermé, si le nombre des rebroussements est pair, car le nombre des points d'inflexion étant pair aussi, on aura remplacé un point par son antipode un nombre pair de fois, et l'on sera par conséquent revenu au point de départ à la fin de l'opération. Si le nombre des rebroussements de C est impair, on aboutit au point antipode du point A'. Il faut alors, pour obtenir une courbe fermée, décrire *deux fois* la courbe C. Il est toujours permis de supposer que C a un nombre pair de rebroussements, cette courbe pouvant être dans la réalité une même courbe décrite deux fois de suite.

9. *Relation entre l'aire de C et la longueur de sa supplémentaire C'.* — Pour éviter des complications, je considérerai, à partir de maintenant, les aires *comme*

---

(1) On se rend compte aisément de ces faits en prenant pour AB et BD deux arcs de cercle, dont les supplémentaires sont deux autres arcs de cercle.

définies suivant le module  $2\pi$  et non plus  $4\pi$ , de manière à éviter la considération des points doubles. AB étant un arc régulier, posons

$$(AB) \equiv - \int_{AB} d\varphi \pmod{2\pi}.$$

Pour une courbe fermée C, composée d'arcs réguliers AB, BD, DE, dépourvue de points anguleux et ayant un nombre pair de rebroussements, on a

$$(7) \quad (C) \equiv (AB) + (BD) + (DE) + \dots \pmod{2\pi},$$

car la somme des termes égaux à  $\pm \pi$  qui interviennent dans l'expression de (C) et qui proviennent des rebroussements est un multiple de  $2\pi$ .

L'arc élémentaire de l'arc A'B', supplémentaire de AB, est la distance des pôles de deux grands cercles qui se coupent sous l'angle  $d\varphi$ . C'est donc  $|d\varphi|$ , et comme  $d\varphi$  ne change pas de signe le long de AB, on a, en désignant par A'B' la longueur, considérée comme essentiellement positive, de l'arc A'B',

$$(AB) \equiv \pm A'B' \pmod{2\pi}$$

avec le signe +, si AB est à droite, et le signe —, si AB est à gauche.

Considérons maintenant la somme  $(AB) + (BD)$ , B étant un point de rebroussement ou un point d'inflexion.

1° Si B est un point de rebroussement, B' est un point d'inflexion sur l'arc A'B'D'. AB et BD étant deux arcs de même sorte, on a, avec correspondance de signes,

$$(AB) \equiv \pm A'B', \quad (BD) \equiv \pm B'D' \pmod{2\pi},$$

d'où

$$(AB) + (BD) \equiv \pm (A'B' + B'D') \pmod{2\pi}.$$

2° Si B est un point d'inflexion, B' est un point de rebroussement sur l'arc A'B'D'. AB et BD étant deux arcs de sortes opposées, on a, toujours avec correspondance des signes,

$$(AB) \equiv \pm A'B', \quad (BD) \equiv \mp B'D' \quad (\text{mod } 2\pi),$$

d'où

$$(AB) + (BD) \equiv \pm (A'B' - B'D') \quad (\text{mod } 2\pi).$$

En continuant, on parvient à une relation de la forme

$$(8) \quad (C) \equiv (AB) + (BD) + (DE) \\ \equiv \pm A'B' \pm B'D' \pm D'E' \pm \dots \quad (\text{mod } 2\pi),$$

où deux termes consécutifs du second membre ont le même signe, s'ils désignent les longueurs de deux arcs séparés par un point d'inflexion, et le signe contraire, si ces arcs sont séparés par un point de rebroussement. Le résultat s'exprime ainsi :

*L'aire (C) de la courbe C est congrue, suivant le module  $2\pi$ , à  $\pm L'$ , L' désignant la somme alternée des longueurs des arcs de la courbe supplémentaire C', séparés par les points de rebroussement successifs de cette courbe.*

En tenant compte des points doubles de C, on parviendrait à une congruence suivant le module  $4\pi$ , plus précise que (8), mais plus compliquée.

On voit que *deux courbes fermées, de même longueur totale, ont pour supplémentaires des courbes fermées, de même aire.* Ce théorème n'est vrai qu'en gros, et les développements qui précèdent montrent comment il faut le préciser.

[J4]

**UNE REMARQUE SUR LA THÉORIE DES GROUPES FINIS ;**

PAR G. CERF

(Strasbourg).

Quand on étudie les groupes de transformations à un paramètre dont les opérations sont deux à deux inverses l'une de l'autre, on peut, tout au début, présenter une remarque susceptible de rendre quelque service. Nous allons le faire pour l'espace ordinaire ; mais des considérations toutes pareilles peuvent servir dans un espace à un nombre quelconque de dimensions.

Soit une famille de transformations  $S$  dépendant d'un paramètre  $t$  et définies par les relations

$$(1) \quad \begin{cases} x' = f(x, y, z; t), \\ y' = g(x, y, z; t), \\ z' = h(x, y, z; t). \end{cases}$$

Nous supposons que la famille contient la transformation identique. Lorsque  $t$  varie, à tout point  $M$ , de coordonnées  $x, y, z$ , les relations (1) font correspondre les points d'une courbe  $C_M$ , la trajectoire de  $M$ , passant par  $M$  et lieu des points déduits de  $M$  par les transformations  $S$ . L'ensemble des courbes  $C_M$  forme généralement un complexe. Nous allons montrer que *dans le cas où les équations (1) définissent un groupe contenant des transformations deux à deux inverses l'une de l'autre, et par conséquent comprenant la transformation identique, les courbes  $C_M$  forment une congruence et non un complexe.*

Nous nous appuyerons pour cela sur les deux observations suivantes :

*a.* Si  $C_M$  passe en  $M'$ ,  $C_{M'}$  passe en  $M$  : car si la transformation  $S$  permet de passer de  $M$  en  $M'$ , la transformation  $S^{-1}$ , qui appartient au groupe, permet de passer de  $M'$  en  $M$ .

*b.* Soient  $S$  une transformation quelconque du groupe et  $M' = S(M)$ ;  $M_1$  un point quelconque de  $C_M$  et  $S_1$  la transformation qui permet de passer de  $M$  en  $M_1$  :

$$M_1 = S_1(M)$$

on peut passer de  $M_1$  en  $M'$  par une transformation du groupe, car  $M' = S(M) = (SS_1^{-1})S_1(M) = (SS_1^{-1})(M_1)$  et  $SS_1^{-1}$  appartient au groupe;  $C_{M_1}$  passe par  $M'$ .

Cela posé, la proposition que nous avons en vue est aisée à démontrer :

$C_M$ , passant par  $M'$ ,  $C_{M'}$  passe par  $M_1$ , et  $M_1$  étant un point quelconque de  $C_M$ ,  $C_{M'}$  coïncide avec  $C_M$ .

Les trajectoires des points de  $C_M$  sont donc toutes confondues avec  $C_M$  puisque  $M'$  est un point quelconque de  $C_M$ ; et comme, d'autre part, d'après *a*, les trajectoires passant par  $M$  ne peuvent être que celles des points de  $C_M$ , il en résulte que par  $M$ , point quelconque de l'espace, ne passe qu'une courbe de la famille considérée : celle-ci constitue donc bien une congruence et non un complexe.

[D1 a]

**SUR QUELQUES FONCTIONS DISCONTINUES  
OU DÉPOURVUES DE DÉRIVÉES ;**

PAR TH. LÉCONTE.

La troisième édition du *Traité d'Analyse* de M. Picard contient l'étude d'une fonction continue

n'admettant de dérivée pour aucune valeur de la variable. Cette fonction, construite par M. Helge von Koch, est plus simple que la fonction célèbre de Weierstrass, la première en date (voir le *Cours d'Analyse* de M. Goursat) et celles que l'on trouve dans le Mémoire de Darboux sur les fonctions discontinues [par exemple, la somme de la série de terme général  $\frac{\sin(n!x)}{n!}$ ].

J'ai cherché, en partant des fonctions anormales que l'on peut tirer de la représentation décimale de la variable, un exemple qui fût plus accessible encore. Je me suis ensuite aperçu, en feuilletant les *Mathematische Annalen* que l'étude de M. Helge von Koch a été suivie de diverses notes contenant des exemples plus simples que le sien; cependant il ne sera pas inutile, je crois, de publier ce court article qui est d'un caractère élémentaire, qui peut prêter à la réflexion et fournir des énoncés d'exercices.

1. L'un des moyens les plus simples et les plus féconds de construire des fonctions anormales consiste à écrire la représentation décimale (ou dans un système à base quelconque) de la variable et à utiliser les chiffres de cette représentation pour définir la fonction.

Une même circonstance se rencontre dans tous les exemples formés sans précautions par ce procédé : la fonction n'est définie lorsque  $x$  est un nombre décimal que si l'on a, au préalable, fait choix de l'un des deux modes de représentation d'un nombre décimal, soit de la représentation limitée  $0, a_1 a_2 \dots a_n 0 0 \dots$ , soit de la représentation illimitée  $0, a_1 a_2 \dots a_n - 1 9 9 \dots$ . La règle qui conduit à la valeur de la fonction, appliquée à ces deux formes, ne donne pas en général le même

nombre en sorte que de telles fonctions sont discontinues lorsque  $x$  est un nombre décimal.

Disons quelques mots de l'un de ces exemples <sup>(1)</sup> dont l'étude précède naturellement celle des fonctions de Peano. On sait que Peano a, le premier, en écrivant la variable dans le système à base 3, construit des fonctions continues dépourvues de dérivées et définissant une courbe qui emplit un carré <sup>(2)</sup>.

Soit, dans l'intervalle  $(0, 1)$ , la variable

$$x = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

Adoptons, pour préciser, la représentation illimitée de la variable lorsqu'elle est un nombre décimal et envisageons la fonction  $y = 0, a_1 a_3 a_5 \dots$ . Cette fonction est évidemment continue pour les valeurs de  $x$  qui ne sont pas des nombres décimaux. Elle l'est aussi pour un nombre décimal de la forme

$$x_0 = 0, a_1 a_2 \dots a_{2n-1} 9 9 \dots \quad (a_{2n-1} \neq 9),$$

à laquelle correspond

$$y_0 = 0, a_1 a_3 \dots a_{2n-1} 9 9 \dots;$$

c'est immédiat à gauche parce qu'un nombre variable  $x$  tendant vers  $x_0$  en croissant finit par avoir autant de décimales communes avec  $x_0$  que l'on voudra ; à droite, cela résulte de ce qu'un nombre variable  $x$  tendant vers  $x_0$  en décroissant a une représentation décimale

<sup>(1)</sup> Pour d'autres utilisations du même procédé, voir LEBESGUE, *Leçons sur l'Intégration*, p. 44 et 90, et BOULIGAND, *Revue de l'Enseignement des Sciences*, 11<sup>e</sup> année, n<sup>o</sup> 103 et 104.

<sup>(2)</sup> Les recherches, trop oubliées, de Peano ont précédé celles de Hilbert qui a aussi donné un exemple, obtenu par une voie différente, d'une courbe remplissant un carré (voir le *Traité d'Analyse* de M. Picard).

dont les premiers chiffres sont  $a_1, a_2, \dots, a_{2n-1} + 1$ , suivis d'autant de zéros que l'on voudra et de ce que la limite des valeurs correspondantes de  $y$  est le nombre  $0, a_1 a_3 \dots a_{2n-1} + 1 0 0 \dots$  qui est égal à  $y_0$ . Enfin, pour un nombre décimal de la forme

$$x_0 = 0, a_1 a_2 \dots a_{2n} 9 9 \dots \quad (a_{2n} \neq 9),$$

à laquelle correspond

$$y_0 = 0, a_1 a_3 \dots a_{2n-1} 9 9 \dots;$$

il y a continuité à gauche, il est aisé de le voir, mais il y a discontinuité à droite car si une valeur variable de  $x$  tend vers  $x_0$  en décroissant, sa représentation décimale a pour premiers chiffres  $a_1, a_2, \dots, a_{2n} + 1$ , suivis d'autant de zéros que l'on voudra et la limite des valeurs correspondantes de  $y$  est le nombre

$$0, a_1 a_3 \dots a_{2n-1} 0 0 \dots;$$

il y a donc discontinuité de première espèce et le saut de la fonction est  $\frac{1}{10^{2n-1}}$ ; en un tel point, à droite, la fonction n'admet pas pour valeur la borne inférieure de ses valeurs.

Cette fonction n'admet de dérivée en aucun point, soit  $x_1$ , où elle est continue; il est en effet possible d'imaginer deux ensembles infinis de valeurs de  $x$  tendant vers  $x_1$ , le premier dans lequel  $a_1, a_3, \dots$  gardent la même valeur, le second dans lequel  $a_{2p+1}$  seul change, étant augmenté ou diminué d'une unité, de sorte que l'on a dans ce cas

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\pm \frac{1}{10^{p+1}}}{\pm \frac{1}{10^{2p+1}}} = 10^p$$

et que le rapport  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  croît ici indéfiniment avec  $p$  alors qu'il était constamment nul pour le premier ensemble ; il n'y a donc pas de dérivée.

Il est bon de remarquer que la fonction admet une valeur donnée  $0, A_1 A_3 A_5 \dots$  pour une infinité de valeurs de  $x$  de la forme  $0, A_1 a_2 A_3 a_4 A_5 a_6 \dots$ , les chiffres  $a_2, a_4, \dots$  étant arbitraires. L'ensemble  $E$  de ces valeurs de  $x$ , qui a évidemment la puissance du continu, est de mesure nulle ; on le voit en envisageant l'ensemble complémentaire  $E'$  de l'ensemble  $E$  ; l'ensemble  $E'$  est formé d'abord de l'ensemble des nombres  $0, a_1 \dots, a_1 \neq A_1$ , dont la mesure est  $\frac{9}{10}$ , puis de l'ensemble des nombres  $0, A_1 a_2 a_3 \dots, a_2$  quelconque,  $a_3 \neq A_3$  dont la mesure est  $10 \times \frac{9}{10^3} = \frac{9}{10^2}$  ; on peut ainsi continuer indéfiniment, la mesure totale de l'ensemble  $E'$ ,  $\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \dots$ , est égale à 1.

Étudions maintenant la fonction au point de vue de la croissance ou de la décroissance en un point  $x_0$ . Il est aisé de voir que,  $x_0$  étant un nombre décimal en lequel la fonction est continue, pour  $x$  suffisamment voisin de  $x_0$ , on a, à droite,  $y \geq y_0$  et à gauche  $y \leq y_0$ , la fonction ne décroît pas en un tel point ; le résultat est différent lorsque  $x_0$  est un nombre décimal en lequel il y a discontinuité, à droite  $y < y_0$ , à gauche  $y \leq y_0$ , et sans qu'on puisse dire qu'il y a maximum relatif,  $y_0$  est une valeur extrême supérieure ou égale à toutes les valeurs voisines. Pour les autres valeurs de  $x_0$ , on remarquera que lorsqu'on augmente un chiffre de rang impair,  $x_0, y_0$  augmentent et que cela est possible pour des valeurs infiniment voisines de  $x_0$  à moins que tous les chiffres de rang impair ne soient des 9 à partir d'un certain rang ; de même, en diminuant un chiffre de

rang impair, on diminue  $x_0$ ,  $y_0$  et cela est possible pour des valeurs infiniment voisines de  $x_0$  à moins que tous les chiffres de rang impair ne soient des zéros à partir d'un certain rang; en augmentant un chiffre de rang pair et en diminuant un chiffre de rang impair qui vient après, on augmente  $x_0$ , on diminue  $y_0$ ; une opération analogue permet de diminuer  $x_0$  et d'augmenter  $y_0$ ; hormis des cas d'exception faciles à énoncer, ces deux dernières opérations sont possibles pour des valeurs infiniment voisines de  $x_0$ , en sorte que, mises à part des valeurs exceptionnelles de  $x_0$  pour lesquelles on ferait une étude directe, la fonction n'est ni croissante ni décroissante.

2. Les fonctions  $x, y$  de la variable  $t$ , que nous allons définir, sont l'adaptation au système à base 10 des fonctions que Peano a définies dans le système à base 3. A la variable  $t = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ , nous faisons correspondre les fonctions

$$x = 0, z_1 z_3 z_5 \dots, \quad y = 0, z_2 z_4 z_6 \dots,$$

$z_1 = a_1$ ,  $z_3$  est égal à  $a_3$  ou à  $9 - a_3$  suivant que le reste de la division de  $a_2$  par 9 est pair ou impair,  $z_5$  est égal à  $a_5$  ou à  $9 - a_5$  suivant que le reste de la division de  $a_2 + a_4$  par 9 est pair ou impair et ainsi de suite; de même  $z_2$  est égal à  $a_2$  ou à  $9 - a_2$  suivant que le reste de la division de  $a_1$  par 9 est pair ou impair,  $z_4$  est égal à  $a_4$  ou à  $9 - a_4$  suivant que le reste de la division de  $a_1 + a_3$  par 9 est pair ou impair et ainsi de suite.

Ces fonctions sont continues pour toute valeur de  $t$ ; c'est immédiat lorsque  $t$  n'est pas un nombre décimal; cela résulte, pour une valeur de la variable qui est un nombre décimal, de ce que les deux formes

$$0, a_1 a_2 \dots a_{2n} 9 9 \dots, \quad 0, a_1 a_2 \dots a_{2n} + 1 0 0 \dots$$

( $a_{2n} \neq 9$ )

conduisent à la même valeur de  $x$ , à la même valeur de  $y$  et qu'il en est de même pour les deux formes

$$\begin{aligned} & 0, a_1 a_2 \dots a_{2n+1} 9 9 \dots, \\ 0, a_1 a_2 \dots a_{2n+1} + 1 0 0 \dots \quad (a_{2n+1} \neq 9), \end{aligned}$$

Ces fonctions définissent une courbe qui emplit le carré  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$  car  $x, y$  étant choisis arbitrairement, on en déduit aisément une valeur de  $t$  qui les fournit (une seule si les valeurs de  $x$  et  $y$  ne sont pas des nombres décimaux, deux ou quatre si l'une des valeurs de  $x$  et de  $y$  ou les deux valeurs sont des nombres décimaux).

Enfin, ces fonctions n'admettent de dérivée pour aucune valeur de la variable; le raisonnement employé au n° 1 au sujet de la fonction  $0, a_1 a_3 \dots a_{2n+1} \dots$  s'applique à la fonction  $x$  de  $t$  avec de légères modifications et s'étend à la fonction  $y$ .

3. Voici un énoncé d'exercice qui fournit l'occasion de reprendre certaines des considérations précédentes. Soit la variable  $x = 0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ , en supposant, pour préciser, que l'on choisisse toujours la représentation illimitée. Posons

$$y = a_1 r_1 + a_2 (r_2)^2 + \dots + a_n (r_n)^n + \dots,$$

$|r_1|, |r_2|, \dots, |r_n|, \dots$  étant inférieurs à un nombre  $k$  inférieur à 1. Cette série est convergente; sa somme définit une fonction de  $x$ .

Déterminer  $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$  de telle manière que cette fonction soit continue pour toute valeur de  $x$ .

Lorsque  $r_1 = r_2 = \dots = r_n = \dots = \frac{1}{p}$ ,  $p$  désignant un entier supérieur à 10, l'ensemble des valeurs prises par la fonction à la puissance du continu, mais il est de mesure nulle.

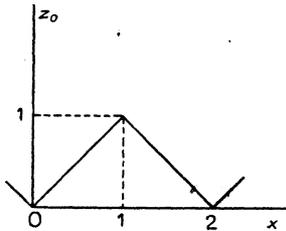
4. Pour arriver à d'autres exemples de fonctions dépourvues de dérivées, je vais définir certaines fonctions auxiliaires. Soit la variable  $x = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ ,  $a_0$  étant un entier positif ou négatif; posons

$$b_1 = 9 - a_1, \quad \dots, \quad b_n = 9 - a_n, \quad \dots$$

Considérons la fonction  $z_0 = f_0(x)$  dont la valeur est définie par l'expression  $0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$  lorsque  $a_0$  est nul ou pair, par l'expression  $0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$  lorsque  $a_0$  est impair; cette fonction est périodique et de période 2; considérons aussi la fonction  $z_1 = f_1(x)$  dont la valeur est  $0, a_2 a_3 \dots$  lorsque  $a_1$  est nul ou pair et  $0, b_2 b_3 \dots$  lorsque  $a_1$  est impair, fonction périodique et de période  $\frac{2}{10}$ , telle que  $f_1(x) = f_0(10x)$ ; on peut continuer indéfiniment et envisager, quel que soit l'entier positif  $n$ , la fonction  $z_n = f_n(x)$  dont la valeur est  $0, a_{n+1} a_{n+2} \dots$  lorsque  $a_n$  est nul ou pair,  $0, b_{n+1} b_{n+2} \dots$  lorsque  $a_n$  est impair, fonction périodique et de période  $\frac{2}{10^n}$ , telle que  $f_n(x) = f_0(10^n x)$ .

Ces fonctions sont continues pour toute valeur de  $x$ ;

Fig. 1.



on le voit immédiatement en remarquant que les deux formes d'un nombre décimal donnent les mêmes valeurs pour l'une quelconque de ces fonctions. On peut aussi

remarquer que la courbe représentative  $(C_0)$  de la fonction  $z_0 = f_0(x)$ , qu'il suffit d'indiquer dans l'intervalle  $(0, 2)$  en raison de la périodicité, se compose (fig. 1) d'une ligne brisée formée de la droite  $y = x$  dans l'intervalle  $(0, 1)$  et de la droite  $y = 2 - x$  dans l'intervalle  $(1, 2)$ ; la courbe représentative  $(C_1)$  de la fonction  $z_1$  s'obtient en partant de  $(C_0)$  par réduction des abscisses dans le rapport  $\frac{1}{10}$ , de même pour passer de  $(C_1)$  à  $(C_2)$ , etc., et l'on voit nettement que ces constructions conservent la continuité.

§. Considérons la fonction

$$f(x) = u_0 z_0 + u_1 z_1 + \dots + u_n z_n + \dots,$$

$z_0, z_1, \dots, z_n, \dots$  désignant les fonctions continues inférieures ou égales à 1 que nous avons définies au paragraphe précédent,  $u_n$  désignant le terme général d'une série absolument convergente.

La fonction  $f(x)$  est continue quel que soit  $x$ ; sous certaines conditions imposées aux  $u_n$ , elle n'admet de dérivée pour aucune valeur de la variable. Pour le montrer, j'utiliserai le lemme suivant:  $g(x)$  admettant une dérivée pour la valeur  $x_0$  de la variable,  $x', x''$  tendant vers  $x_0$  de telle manière que  $x' < x_0 < x''$ , le rapport  $\frac{g(x'') - g(x')}{x'' - x'}$  tend vers  $g'(x_0)$ ; la démonstration de cette proposition repose sur la remarque que le rapport  $\frac{g(x'') - g(x')}{x'' - x'}$  est compris entre les rapports  $\frac{g(x'') - g(x_0)}{x'' - x_0}$ ,  $\frac{g(x_0) - g(x')}{x_0 - x'}$  qui tendent tous deux vers  $g'(x_0)$ .

Soit  $x_0$  une valeur de  $x$  qui ne soit pas un nombre décimal; choisissons pour  $x', x''$  les valeurs décimales

approchées à  $\frac{1}{10^n}$  près, par défaut et par excès, de  $x_0$ .

Écrivons

$$x_0 = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots,$$

$$x' = a_0, a_1 a_2 \dots a_n,$$

$$x'' = a_0, a_1 a_2 \dots a_n + 1,$$

et calculons  $f(x'') - f(x')$ . Les fonctions  $z_{n+1}, z_{n+2}, \dots$  qui admettent pour périodes, respectivement,  $\frac{2}{10^{n+1}}, \dots$  admettent aussi pour période  $\frac{1}{10^n}$  qui est un multiple des nombres précédents; ces fonctions prennent donc la même valeur pour  $x'$  et pour  $x''$ . Occupons-nous maintenant de  $z_0, z_1, \dots, z_n$ .  $z_0$  augmente de  $\frac{(-1)^{a_0}}{10^n}$  lorsqu'on passe de  $x'$  à  $x''$ ;  $z_1$  augmente de  $\frac{(-1)^{a_1}}{10^{n-1}}$ ;  $\dots$ ;  $z_{n-1}$  de  $\frac{(-1)^{a_{n-1}}}{10}$ ;  $z_n$  de  $(-1)^{a_n}$ , et par suite

$$\begin{aligned} f(x'') - f(x') &= \frac{(-1)^{a_0} u_0}{10^n} + \frac{(-1)^{a_1} u_1}{10^{n-1}} + \dots \\ &\quad + \frac{(-1)^{a_{n-1}} u_{n-1}}{10} + (-1)^{a_n} u_n \end{aligned}$$

et, enfin, puisque  $x'' - x' = \frac{1}{10^n}$ ,

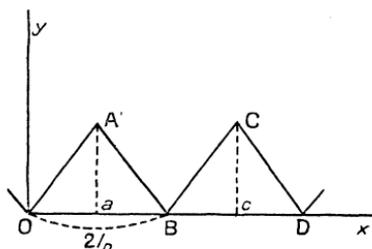
$$\begin{aligned} \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} &= (-1)^{a_0} u_0 + (-1)^{a_1} 10 u_1 + \dots \\ &\quad + (-1)^{a_{n-1}} 10^{n-1} u_{n-1} + (-1)^{a_n} 10^n u_n, \end{aligned}$$

si la série de terme général  $(-1)^{a_n} 10^n u_n$  n'est pas convergente, la dérivée n'existe pas. Il suffit, en particulier, pour obtenir ce résultat, de choisir  $u_n$  de telle manière que  $10^n u_n$  ne tende pas vers zéro. La condition est très large.

Si  $x_0$  est un nombre décimal,  $x'$  sera égal à  $x_0$  à partir d'une certaine valeur de  $n$ ; le calcul précédent reste valable mais on se trouve alors dans un cas plus simple dans lequel le lemme devient inutile.

6. Il existe bien d'autres façons de construire des fonctions dépourvues de dérivées. Voici un procédé qui m'a été indiqué par M. Lebesgue; laissant de côté certaines particularités, il faut y voir surtout l'utilisation de cette idée si fréquemment utilisée par les analystes : Former une série  $\Sigma u_n$  telle que pour chaque point  $x$  il y ait un terme  $u_n$  jouant un rôle prépondérant dans le calcul considéré; ici, dans le calcul de la dérivée. Soit la fonction  $f(x)$ , somme de la série dont le terme général,  $u_n(x)$ , est une fonction qui a pour courbe représentative (fig. 2) une ligne brisée en dents de scie

Fig. 2.



déduites les unes des autres par des translations parallèles à  $Ox$  et égales à  $2l_n$ , les pentes des côtés  $OA$ ,  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ , ... étant  $\pm \lambda_n$ . Évaluons  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ; en choisissant  $h$  égal, soit à  $\frac{l_n}{2}$ , soit à  $-\frac{l_n}{2}$ , on peut faire en sorte que  $x$  et  $x+h$  appartiennent à l'un des intervalles tels que  $Oa$ ,  $aB$ , ...; avec cette condition, la contribution de  $u_n$  dans le rapport est, en valeur absolue, égale à  $\lambda_n$ ; celle de  $u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$  est au plus égale en valeur absolue à  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1} = \sigma_n$ ; enfin celle de  $u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$  est  $\varphi_n = \pm \frac{2}{l_n} \sum_{p=1}^{p=\infty} \Delta u_{n+p}$ . Or, il est facile de choisir  $l_n$  et  $\lambda_n$  de façon que la série

de terme général  $u_n(x)$  soit uniformément convergente, que  $\lambda_n$ , infiniment grand avec  $n$ , soit infiniment grand par rapport à  $\sigma_n$  et  $\rho_n$  en sorte que le rapport considéré croisse indéfiniment et que l'inexistence de la dérivée soit prouvée. Entre autres exemples, prenons  $\lambda_n = \frac{1}{(n!)^2}$ ,  $\lambda_n = n!$ . On peut écrire

$$|u_n| \leq \lambda_n \lambda_n = \frac{1}{n!}, \quad |\Delta u_n| \leq \frac{1}{n!},$$

$$|\rho_n| \leq 2(n!)^2 \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{(n+p)!} < \frac{2(n!)^2}{n \cdot n!}, \quad |\rho_n| < \frac{2\lambda_n}{n},$$

$$\frac{\sigma_n}{\lambda_n} = \frac{1 + 2! + \dots + (n-1)!}{n!}$$

$$= \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{(n-1)!} + \frac{2!}{(n-1)!} + \dots + 1 \right],$$

$$\frac{\sigma_n}{\lambda_n} < \frac{1}{n} \left( \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-3}} + \dots + \frac{1}{2} + 1 \right),$$

$$\frac{\sigma_n}{\lambda_n} < \frac{2}{n},$$

les conditions précédentes sont donc bien remplies.

[L'3]

**LES PROPRIÉTÉS DIAMÉTRALES DES CONIQUES  
DÉDUITES DE LA DÉFINITION FOCALÉ ;**

PAR A. BLOCH.

Les propriétés projectives des coniques peuvent s'établir par de simples considérations de géométrie plane. Plusieurs auteurs les déduisent par exemple du fait suivant :

Lorsque l'on applique à une conique une transfor-

mation homologique ayant pour centre un des foyers de la courbe, pour axe l'homothétique par rapport à ce foyer, le rapport d'homothétie étant 2, de la directrice correspondante, enfin pour rapport d'homologie  $-1$ , la courbe transformée est un cercle ayant pour centre le foyer en question.

Mais lorsque l'on se borne aux propriétés d'affinité, on est en droit de désirer une démonstration donnant des choses une vision plus directe. Laisant de côté le cas de la parabole, qui est classique (<sup>1</sup>), voici comment le second théorème de Poncelet permet, pour l'ellipse et l'hyperbole, d'obtenir rapidement ces propriétés.

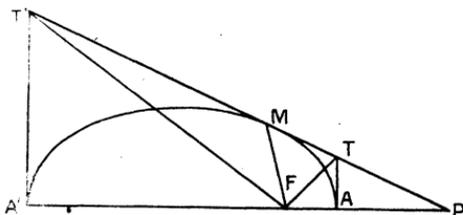
*Ellipse.* — Soit une ellipse de grand axe  $AA'$ , dont  $F$  est l'un des foyers ; la tangente en un point quelconque  $M$  coupe le grand axe en  $P$  et les tangentes en  $A$  et  $A'$  aux points  $T$  et  $T'$ .

$FT$  est bissectrice de l'angle  $AFM$  ;  $FT'$ , de l'angle  $A'FM$ . L'angle  $TFT'$  est droit, et l'on a

$$AT \cdot A'T' = FA \cdot FA' = \text{const.}$$

D'autre part les points  $M$  et  $P$  sont conjugués harmoniques par rapport à  $T$  et  $T'$ .

Fig. 1.



On a ainsi une construction, par droites et par

---

(<sup>1</sup>) Cf., par exemple, J. HADAMARD, *Leçons de Géométrie élémentaire*, t. II, p. 230-237.

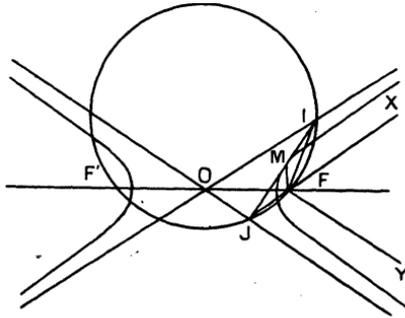
points, des ellipses de grand axe  $AA'$ ; toutes ces ellipses sont affines les unes des autres par rapport à cet axe, et le sont en particulier du cercle de diamètre  $AA'$ ; les propriétés d'affinité du cercle s'étendent donc à l'ellipse.

*Hyperbole.* — Soit l'hyperbole d'asymptotes  $OX$ ,  $OY$ , de foyers  $F$  et  $F'$ . La tangente en un point quelconque  $M$  coupe les asymptotes en  $I$  et  $J$ .

Supposons par exemple  $M$  sur la branche de courbe ayant  $F$  à son intérieur. Soient  $FX$  et  $FY$  les parallèles menées par  $F$  aux asymptotes. Les angles  $IFM$  et  $IFX$  sont égaux, ainsi que les angles  $JFM$  et  $JFY$ . L'angle  $IFJ$  est donc le supplément du demi-angle des asymptotes, et les points  $F$ ,  $F'$ ,  $I$ ,  $J$  sont sur un même cercle. On a donc  $OI \cdot OJ = \overline{OF}^2 = \text{const.}$

D'autre part les distances de  $I$  à  $FM$  et à  $FX$  sont égales, celles de  $J$  à  $FM$  et  $FY$  le sont aussi; les distances de  $I$  et  $J$  à  $FM$  sont donc égales, et  $M$  est le milieu de  $IJ$ .

Fig. 2.



Le produit des distances de  $M$  aux asymptotes est donc constant; de cette propriété résultent immédiatement l'existence des diamètres et toutes les propriétés d'affinité.

NOTE. — Dans un article paru dans les *Nouvelles Annales* en 1905 (p. 145) sous le titre *Sur la théorie des coniques*, M. Hadamard a développé des idées analogues aux précédentes. Il se propose de passer des propriétés focales aux propriétés projectives des coniques par une méthode plus simple et plus naturelle que les méthodes classiques.

Les deux théorèmes à établir tout d'abord sont les suivants : 1° l'ellipse est la projection d'un cercle; 2° le produit des distances d'un point d'une hyperbole à ses asymptotes est constant. La démonstration que donne M. Hadamard du second théorème ne diffère pas sensiblement de la mienne; pour le premier, je crois être arrivé à une simplification appréciable, en utilisant comme dans l'autre cas le théorème de Poncelet, alors que M. Hadamard emploie des considérations différentes.

Les présentes démonstrations, obtenues d'ailleurs sans la connaissance de l'article de M. Hadamard, l'ont été pour l'hyperbole en 1909, pour l'ellipse en 1923.

### QUESTIONS.

2476. Soit  $M$  la projection d'un point  $A$  du plan sur la tangente à une courbe  $\Gamma$  de classe  $c$ . Cette tangente rencontre la podaire de  $\Gamma$  relative au point  $A$  en  $2c - 1$  points autres que  $A$ . Si  $M'$  est leur centre des moyennes distances, le point  $M'$  décrit, quand la tangente varie, une autre podaire de  $\Gamma$  relative à un second point  $A'$  qui est homothétique de  $A$ , le centre d'homothétie étant le centre (généralisé) de  $\Gamma$ , et le rapport d'homothétie ayant pour valeur  $\frac{c-1}{2c-1}$ . A. LABROUSSE.

2477. Lieu des points du plan d'un triangle pour lesquels le triangle pédal a une aire constante. C. CLAPIER.

2478. Lieu des centres des coniques inscrites dans un triangle, pour lesquels le triangle pédal a une aire moyenne arithmétique entre les aires des triangles pédaux relatifs aux deux foyers. C. CLAPIER.

---

---

### BIBLIOGRAPHIE.

---

OEUVRES DE G.-H. HALPHEN, publiées par les soins de C. Jordan, H. Poincaré, E. Picard avec la collaboration de E. Vessiot. 1 vol.  $25 \times 16$  de v-660 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1924. Prix : 100<sup>fr</sup>.

Nous signalons à nos lecteurs la publication du quatrième et dernier tome de la belle édition des œuvres d'Halphen. On y trouvera « les derniers travaux d'Halphen, parus de 1883 à 1890, sur les équations différentielles, la théorie des nombres, les fonctions elliptiques et leurs applications. On y a réimprimé la théorie des singularités des courbes algébriques, publiée en appendice à la traduction française de la géométrie analytique de Salmon ». Le volume comprend aussi des extraits de lettres à Zeuthen et de précieux inédits.

Il est impossible d'analyser ici, avec les développements qui seraient nécessaires, cet important volume. Mais il faut en souligner l'intérêt. L'œuvre d'Halphen est toujours *actuelle* et sa publication, juste hommage à un Maître très éminent, rendra les plus grands services. S. F.

---

---

### CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.

---

ÉPREUVE THÉORIQUE. — *Dans ce qui suit, négliger le frottement et l'influence du mouvement de la terre.*

*Soient  $O_1 x_1, y_1, z_1$  trois axes rectangulaires, liés à la*

terre :  $O_1 z_1$  est la verticale ascendante du point  $O_1$ . Un cylindre circulaire droit peut se déplacer en restant tangent au plan  $x_1 O_1 y_1$  suivant une génératrice. Soumis à la seule action de son poids, il a une densité, variable dans chaque section droite, mais constante le long de toute parallèle à son axe. Sur cet axe, le centre de gravité  $G$  est projeté en  $g$ . Soit  $c$  la distance  $gG$ . Les axes liés au corps forment un trièdre trirectangle  $Gxyz$ , dont l'arête  $Gy$  est parallèle à l'axe du cylindre, dont l'arête  $Gz$  prolonge  $gG$  au delà de  $G$ , et dont le sens concorde avec celui du trièdre de référence. Des trois angles d'Euler  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ , qui fixent la direction du trièdre  $Gxyz$ , deux seulement,  $\psi$  et  $\theta$ , sont arbitraires. Par rapport à ce trièdre, l'équation de l'ellipsoïde d'inertie est

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Ezx = 1.$$

Étudier le mouvement, en se conformant au plan suivant :

1° Justifier, en deux mots, les indications ci-dessus (lignes soulignées). Calculer les projections de la rotation instantanée sur  $Gx$ ,  $Gy$ ,  $Gz$  et la force vive.

2° Écrire les équations de Lagrange. Quel est le mouvement de  $G$ ? Interpréter l'équation issue du paramètre  $\psi$ . Montrer qu'on peut déterminer  $\theta$ , puis  $\psi$ , en fonction du temps, par deux quadratures.

3° Étudier les simplifications apportées par un choix particulier des conditions initiales. Montrer qu'elles peuvent être prises de manière que le mouvement soit une rotation autour d'un axe vertical, ou encore, s'effectue parallèlement à un plan vertical fixe.

4° Quelles conditions faut-il imposer à  $A$ ,  $C$ ,  $E$  pour que, dans tout mouvement de l'appareil, l'expression de  $\theta$  en fonction de  $t$  soit identifiable avec celle qui définit un de ses mouvements parallèles à un plan vertical fixe. Ces conditions étant remplies, achever l'étude du mouvement.

5° Donner la discussion lorsque  $c = 0$  (sans autre hypothèse) et si possible dans le cas tout à fait général. Toute position initiale du cylindre est-elle compatible avec l'existence d'un mouvement de rotation autour d'une verticale?

INDICATIONS SUR LA SOLUTION, par M. P. Robert. — L'angle d'Euler  $\varphi$  est égal à  $-\frac{\pi}{2}$ . Les composantes de la rotation instantanée sont donc :

$$p = -\psi' \sin \theta, \quad q = \theta', \quad r = \psi' \cos \theta,$$

et la force vive totale est :

$$2T = M(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) + \psi'^2(A \sin^2 \theta + 2E \sin \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta) + B\theta'^2,$$

avec la liaison  $\zeta = R + c \cos \theta$ .

Le mouvement du centre de gravité est rectiligne et uniforme. On peut d'ailleurs se ramener au cas où cette vitesse est nulle : il ne restera alors qu'à déterminer  $\theta$  et  $\psi$  en fonction du temps. On écrira pour cela l'équation de Lagrange issue du paramètre  $\psi$  (elle exprime le théorème du moment cinétique par rapport à la verticale du centre de gravité dans le mouvement autour de ce point), et l'intégrale des forces vives [en remarquant qu'il y a ici une fonction des forces

$$U = -Mg(R + c \cos \theta)],$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \psi'(A \sin^2 \theta + 2E \sin \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta) &= K, \\ (Mc^2 \sin^2 \theta + B)\theta'^2 + \psi'^2(A \sin^2 \theta + 2E \sin \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta) &= h - 2Mgc \cos \theta. \end{aligned}$$

Éliminant  $\psi'$  entre ces deux équations, on trouve  $\theta$  en fonction du temps par une quadrature. Les mouvements de rotation s'obtiennent en choisissant  $h$  et  $K$  de manière que l'expression

$$(1) \quad h - 2Mgc \cos \theta - \frac{K^2}{A \sin^2 \theta + 2E \sin \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta}$$

ait une racine double  $\theta_0$ . Si  $\theta_0$  est donné, on trouve deux équations pour déterminer  $h$  et  $K^2$  qui conviennent pour un mouvement de rotation. On remarquera que la valeur  $K^2$  doit être positive. Il s'ensuit qu'une inclinaison déterminée de  $gG$  n'est pas toujours compatible avec une rotation de l'appareil autour d'un axe vertical. Pour faire complètement la discussion générale, il y aura intérêt à réaliser une représentation graphique de l'expression (1) située sur le cylindre  $u = \cos \theta$ ,  $v = \sin \theta$  (système d'axes  $u, v, w$ ). On sera ainsi amené à envisager les

positions relatives du plan  $\omega = h - 2Mgcu$  et d'une courbe ( $\gamma$ ) représentée par les équations

$$u = \cos \theta, \quad v = \sin \theta, \quad \omega = \frac{K^2}{A v^2 + 2Euv + Cu^2}.$$

Si le mouvement est parallèle à un plan vertical fixe, la rotation instantanée doit être horizontale. Donc il faut que  $\psi' = 0$ . Le mouvement obtenu dans ce cas rappelle le mouvement pendulaire. Pour résoudre la quatrième partie, il suffit d'écrire que la forme  $A \sin^2 \theta + 2E \sin \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta$  se réduit à une constante, c'est-à-dire que l'on doit avoir  $A = C$ ,  $E = 0$ .

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Sur un plan horizontal fixe P, peut se mouvoir, sans frottement, une sphère pesante S, non homogène, de centre O et de rayon R. Tout se passe comme si la sphère S comportait :*

1° Une masse M, uniformément répartie entre la totalité de son volume.

2° Quatre masses, égales chacune à  $\frac{M}{3}$ , et concentrées respectivement aux sommets d'un losange, de centre O, dont les demi-diagonales  $OA = OA' = a$  et  $OB = OB' = b$  sont définies par les relations  $2b^2 + a^2 = R^2$  et  $a^2 = b^2\sqrt{3}$ . A l'instant initial, le losange est horizontal et le solide au repos. On lui applique alors une percussion horizontale, sous l'influence de laquelle le centre O prend une vitesse V, parallèle à OB et de même sens. Par rapport au trièdre trirectangle direct OABC, dont deux arêtes sont dirigées suivant les diagonales du losange, le point d'application de cette percussion est le point  $x, y, z$  de la sphère S, tel qu'on ait  $x = y = z > 0$ .

Étudier le mouvement de la sphère, rapporté à la position initiale du trièdre OABC, d'après les indications suivantes :

1° Évaluer, à l'instant  $t$ , les projections  $p, q, r$  de la rotation instantanée de S sur les arêtes du trièdre OABC lié à S. Trouver le lieu décrit dans le corps S, par le vecteur rotation. Le calcul, poussé jusqu'au bout, décèlera une particularité importante du mouvement.

2° Déterminer, en fonction de  $t$ , les angles d'Euler  $\psi, \theta, \varphi$

définissant le trièdre  $OABC$  par rapport à sa position initiale. Tenant compte du résultat de la première partie, on reviendra aux notations littérales (compatibles avec ce résultat) pour exécuter seulement à la fin de la rédaction les calculs qui se présentent.

INDICATIONS, par M. P. Robert. — Le mouvement pris par la sphère autour de son centre de gravité est un mouvement à la Poinsot. Le lieu de l'axe instantané dans le corps est un plan; les quantités  $p, q, r$  s'expriment à l'aide de fonctions hyperboliques du temps. Pour le calcul des angles d'Euler, on remarquera que le moment cinétique du mouvement autour du centre de gravité a une direction invariable, celle de la seconde bissectrice de l'angle  $\widehat{A_0OC_0}$  (position initiale de  $\widehat{AOC}$ ). On calculera d'abord les cosinus directeurs de cette direction par rapport au trièdre  $OABC$ , en fonction des angles d'Euler. (Poitiers, juin 1922.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. —  $S$  est un solide homogène pesant de révolution, suspendu par un point  $O$  de son axe  $Gz$  sur lequel  $\Omega$  est un point marqué.  $\Delta$  est une tige homogène mobile autour de son centre de gravité, fixé sur la verticale ascendante de  $O$  en un point  $O_1$  ( $OO_1 = O\Omega$ ). Le point  $\Omega$  est assujéti à se trouver toujours sur la tige  $\Delta$  et le plan  $O\Delta$  à tourner autour de  $OO_1$  avec la vitesse constante donnée  $\omega$ .

1° Indiquer les divers cas de variation de l'angle  $\theta$  de  $Oz$  avec la verticale descendante.

2° Montrer que si, gardant les mêmes conditions initiales satisfaisant à l'inégalité

$$\theta_0^3 > 4\omega^2,$$

on diminue la masse de  $\Delta$ , on diminue l'intervalle de variation de  $\theta$ .

3° Étudier les divers mouvements qui peuvent se produire quand, à l'instant initial, le solide  $S$  est en repos relatif pour un observateur subissant la rotation  $\omega$ . Indiquer les conditions que doivent remplir les données pour qu'en faisant varier  $\theta_0$  on puisse obtenir tous les cas de mouvement que l'on vient de trouver et déterminer, pour  $\theta_0$ , les arcs qui y correspondent.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — Avec les notations habituelles, on a

$$\begin{aligned} 2T &= A(\omega^2 \sin^2 \theta + \theta'^2) \\ &+ C(\omega \cos \theta + \varphi')^2 + B \left( \omega^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{\theta'^2}{4} \right), \\ U &= Mgl \cos \theta. \end{aligned}$$

On a une intégrale immédiate donnée par  $\varphi$  et l'intégrale des forces vives de Painlevé. On est ainsi conduit à

$$\begin{aligned} \left( A + \frac{B}{4} \right) \theta'^2 &= F(\theta) = A \omega^2 \sin^2 \theta + B \omega^2 \frac{1 - \cos \theta}{2} \\ &+ 2(Mgl + C\lambda\omega) \cos \theta + h - C\lambda^2 \\ \varphi' &= \lambda - \omega \cos \theta. \end{aligned}$$

1° En posant  $\cos \theta = x$ ,  $\sin \theta = y$  on est conduit, pour discuter  $\theta$ , à étudier l'intersection du cercle  $x^2 + y^2 = 1$  avec une parabole ayant  $Ox$  pour axe.

2° En remplaçant  $h$  et  $\lambda$  au moyen des valeurs initiales, on voit que  $F$  se met sous la forme

$$F(\theta) = \Phi(\theta) + B\Psi(\theta),$$

la fonction  $\Psi$  étant positive quel que soit  $\theta$  d'après l'inégalité de l'énoncé. Si  $B > B_1$ , il en résulte

$$F > F_1$$

quel que soit  $\theta$ . Donc si  $\theta$  rend  $F_1$  positif, il rend  $F$  positif *a fortiori*.

3° On a  $\theta'_0 = \varphi'_0 = 0$  :

$$F(\theta) = (\cos \theta - \cos \theta_0) \left[ 2Mgl - \frac{B\omega^2}{2} - A\omega^2(\cos \theta + \cos \theta_0) \right]$$

et l'on a divers mouvements suivant que la droite

$$x = -x_0 + \frac{2Mgl - \frac{B\omega^2}{2}}{A\omega^2}$$

rencontre le cercle  $x^2 + y^2 = 1$ , lui est tangente ou ne le rencontre pas. Quand  $x_0$  varie de  $-1$  à  $+1$  l'abscisse de cette droite varie de

$$-1 + \frac{2Mgl - \frac{B\omega^2}{2}}{A\omega^2} \quad \text{à} \quad +1 + \frac{2Mgl - \frac{B\omega^2}{2}}{A\omega^2}$$

et l'on obtiendra tous les cas de discussion si l'une des deux valeurs  $-1, +1$  est comprise dans cet intervalle. Une discussion élémentaire montre qu'il faut

$$\frac{B}{2} - 2A < \frac{2Mgl}{\omega^2} < \frac{B}{2} + 2A$$

et la question s'achève sans difficulté.

**ÉPREUVE PRATIQUE.** — On donne un point fixe  $O$  et un plan vertical fixe  $P$  dont la distance à  $O$  est  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ . Un solide pesant a la forme d'un cube  $ABCD A'B'C'D'$  de côté  $1$ , la densité à son intérieur étant, en chaque point, numériquement égale à sa distance à la face  $ABCD$ .

On fixe le sommet  $A$  en  $O$  et l'on oblige les deux sommets  $B', D'$  à décrire le plan  $P$ . On a ainsi deux dispositions qui donnent deux liaisons différentes; pour chacune d'elles, le solide a une position d'équilibre stable autour de laquelle il effectue de petites oscillations quand on l'écarte très peu et il existe un pendule simple synchrone. Déterminer numériquement les longueurs de ces deux pendules simples.

**INDICATIONS SUR LA SOLUTION.** — Par  $B'D'$  on peut mener deux plans à la distance  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  du point  $A$ . Soient  $\Delta$  et  $\Delta'$  les perpendiculaires abaissées de  $A$  sur ces deux plans. Les deux liaisons sont celles obtenues en fixant horizontalement soit  $\Delta$ , soit  $\Delta'$ . On a ainsi deux pendules composés, de sorte que tout revient à chercher les moments d'inertie du solide par rapport à ces deux droites ainsi que leurs distances au centre de gravité.

Pour faire les calculs simplement on prendra pour axes les trois arêtes issues de  $A$  et l'on aura les deux moments d'inertie des droites  $\Delta, \Delta'$  issues de  $A$  au moyen de l'ellipsoïde d'inertie de ce point et de leurs cosinus directeurs.

(Bordeaux, juin 1923.)

[M]

## SUR LA GÉNÉRATION DES COURBES ET SURFACES ;

PAR LÉON POMEY.

1. *Principe général.* — L'idée directrice très simple qui va nous guider et qui se rattache, comme on le verra, à certaines méthodes de Chasles et de Grassmann, est la suivante : Imaginons, dans le plan, un système  $S$  de  $n$  courbes (algébriques ou transcendentes) dépendant de certains paramètres arbitraires et soumises à des conditions en nombre suffisant pour réduire à 1 le degré de liberté de  $S$ . Tout point  $M$  (ou, dualistiquement, toute droite  $\Delta$ ), dont la position est déterminée par celle des courbes de  $S$  (comme cela a lieu, par exemple, si  $M$  ou  $\Delta$  est lié au polygone formé par les divers points d'intersection de ces courbes, etc.), décrit (ou enveloppe) une courbe  $\Gamma$ . On obtient donc ainsi ponctuellement ou tangentiellement un mode de génération géométrique (et éventuellement mécanique) de la courbe  $\Gamma$  au moyen du déplacement du système  $S$ .

Après avoir reconnu la nature de  $\Gamma$ , le premier problème à se poser est de rechercher le type *le plus général* des courbes susceptibles d'être engendrées par un tel procédé (qu'on pourra évidemment étendre aisément dans l'espace à la définition de courbes et surfaces).

2. Appliquons immédiatement ce principe aux courbes planes algébriques.

*Premier mode de génération ponctuelle.* —

*Ann. de Mathémat.*, 5<sup>e</sup> série, t. III. (Décembre 1924.) 7

Prenons dans un plan  $n$  points fixes ou pivots  $A_1, \dots, A_n$ , et  $n$  droites mobiles  $D_1, \dots, D_n$  constamment assujetties à passer respectivement par ces points; chacune, telle que  $D_i$ , dépend d'un paramètre  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Astreignons en outre ces droites à rester concourantes et les paramètres  $\lambda_i$  à vérifier une relation homographique d'ordre  $n$ , c'est-à-dire une relation du premier degré par rapport à chaque  $\lambda_i$  individuellement et du  $n^{\text{ième}}$  degré par rapport à leur ensemble,

$$(1) \quad \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n + a \lambda_2 \dots \lambda_n + b \lambda_1 \lambda_3 \dots \lambda_n + \dots \\ + d \lambda_{n-1} \lambda_n + e \lambda_1 + \dots + f \lambda_n + g = 0.$$

Il est clair que le lieu géométrique  $\Gamma$  du point de concours variable  $M$  des droites  $D_i$  est une courbe algébrique d'ordre  $n$ , qui passe par les  $n$  pivots.

Si l'on prend en effet les points d'intersection des droites  $D_i$  avec une autre droite arbitraire  $R$ , il y aura évidemment entre les abscisses de ces points (comptées sur  $R$ ) une correspondance linéaire (ou homographique) par rapport à chacune, comme entre les  $\lambda_i$ ; cette relation sera donc de degré  $p \leq n$  par rapport à l'ensemble de ces abscisses. En égalant celles-ci à une même inconnue  $z$  on obtient une équation algébrique entière (de degré  $p$ ) en  $z$ , dont les racines déterminent les points où  $R$  coupe la courbe  $\Gamma$ . Celle-ci est donc algébrique de degré  $p \leq n$ .

Or si les  $\lambda_i$  représentent, par exemple, les abscisses — comptées sur une droite fixe  $L$  — des points de rencontre des droites  $D_i$  avec cette droite  $L$ , ou encore s'ils représentent les coefficients angulaires des  $D_i$ , on aura les points, où  $\Gamma$  coupe, suivant le cas, la base  $L$  ou la droite de l' $\infty$ , en prenant les  $n$  racines de l'équa-

tion algébrique en  $\lambda$ , obtenue en faisant

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda.$$

Donc  $p = n$  et  $\Gamma$  est bien de degré  $n$ .

Nous nous occuperons plus loin de la proposition réciproque.

*Remarque.* — Plus généralement, on aurait pu supposer que les droites  $D_i$ , au lieu de passer par des points fixes, restent tangentes à des courbes fixes.

3. *Autres modes de génération résultant du premier.* — Divisons le système  $S$  des  $n$  droites mobiles  $D_i$  en  $m$  groupes comprenant : le premier,  $p$  de ces droites  $D_1, D_2, \dots, D_p$ ; le second,  $q$  autres droites  $D_{p+1}, \dots, D_{p+q}$ ; le troisième,  $r$  autres droites, etc. (avec  $n = p + q + r + \dots$ ).

Soient  $\bar{M}$  et  $\bar{S}$  une position particulière d'une part du point  $M$  sur  $\Gamma$  et du système  $S$ , position pour laquelle les valeurs correspondantes  $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_n$  des paramètres satisfont à la condition (1). Laissons alors fixes dans (1) les valeurs de  $\bar{\lambda}_{p+1}, \dots, \bar{\lambda}_n$ ; les paramètres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  de  $D_1, \dots, D_p$  resteront variables mais soumis à la relation (1), où les autres paramètres ont les valeurs  $\bar{\lambda}_{p+1}, \bar{\lambda}_{p+2}, \dots, \bar{\lambda}_n$ . Dans ces conditions les  $p$  droites concourantes du premier groupe, astreintes à une relation homographique d'ordre  $p$ , engendreront une courbe  $\Gamma_p$  de degré  $p$ , passant par les points  $A_1, A_2, \dots, A_p$  et  $\bar{M}$  de  $\Gamma$ .

De même, laissant fixes tous les paramètres sauf ceux du deuxième groupe, les droites de ce groupe engendreront une courbe  $\Gamma_q$  de degré  $q$ , passant par  $A_{p+1}, A_{p+2}, \dots, A_{p+q}$  et par le point  $\bar{M}$  de  $\Gamma$ .

Et ainsi de suite. Nous obtiendrons ainsi un système

de courbes  $\Gamma_p, \Gamma_q, \Gamma_r, \dots$  se coupant toutes en  $\overline{M}$ . Quand tous les paramètres varient ensemble sous la condition (1), ces courbes engendrent des faisceaux dont le point commun décrit  $\Gamma$ .

Nous appellerons ce mode générateur de  $\Gamma$  le mode  $m$  ( $p, q, r, \dots$ ). Le premier mode ou mode  $n$  ( $1, 1, 1, 1, \dots$ ) sera dit mode linéaire.

4. *Cas particulier.* — Considérons le mode 2 ( $1, n-1$ ) réalisé de la manière suivante : quand la droite  $A_1 M$  ou  $D_1$  tourne autour de  $A_1$ , à chaque valeur de son paramètre  $\lambda_1$  correspond une courbe  $\Gamma_{n-1}$  engendrée par le système des  $(n-1)$  autres droites concourantes soumises à la condition (1) et réciproquement. Cette droite  $D_1$  et cette courbe  $\Gamma_{n-1}$  se correspondent ainsi d'une manière univoque et peuvent donc s'écrire ( $P$  et  $Q$  étant de degré 1,  $R$  et  $U$  de degré  $n-1$ )

$$\begin{aligned} (D_1) & \quad P + \lambda_1 Q = 0, \\ (\Gamma_{n-1}) & \quad R + \lambda_1 U = 0. \end{aligned}$$

Donc le lieu  $\Gamma$  de leur point de rencontre  $M$  a pour équation

$$(\Gamma) \quad P U - R Q = 0.$$

Donc la courbe  $\Gamma_{n-1}$  étant de degré  $(n-1)$ , la courbe  $\Gamma$  sera de degré  $n$ . Comme la courbe  $\Gamma_2$  obtenue par ce procédé est lieu du point de rencontre des rayons homologues  $A_1 M, A_2 M$  de deux faisceaux homographiques, c'est une conique. De sorte que la loi de récurrence, vraie pour  $n=2$ , l'est bien d'une manière générale; ce qui confirme le fait reconnu plus haut (§ 2), que  $\Gamma$  est bien de degré  $n$ .

Ce mode 2 ( $1, n-1$ ) rentre d'ailleurs, comme nous l'a signalé M. E. Pomey, dans le procédé de Chasles, qui consiste à considérer la courbe  $\Gamma$  comme lieu

des points d'intersection de deux courbes algébriques  $\Gamma_p, \Gamma_q$  (de degrés  $p$  et  $q$  avec  $n = p + q$ ) appartenant à deux faisceaux, dont les deux paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  sont liés par une relation homographique (1).

5. Réciproquement, toute courbe algébrique  $\Gamma$  de degré  $n$  peut être engendrée par le mode linéaire ou par le mode  $m(p, q, \dots)$ .

En effet chacun de ces modes peut se ramener — comme on vient de l'indiquer (n° 4) — au procédé de Chasles, lequel jouit effectivement de la propriété énoncée (2).

6. Autres modes de génération déduits du mode  $m(p, q, r, \dots)$

Considérons à nouveau la position particulière  $\bar{M}, \bar{S}$  du point  $M$  sur  $\Gamma$  et du système  $S$  de droites, ainsi que les positions correspondantes  $\bar{\Gamma}_p, \bar{\Gamma}_q, \bar{\Gamma}_r, \dots$  des courbes génératrices  $\Gamma_p, \Gamma_q, \dots$  définies au n° 3. Laissons fixes tous les paramètres sauf les  $p + q$  premiers qui sont relatifs à  $\Gamma_p$  et  $\Gamma_q$ , savoir  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{p+q}$ , ceux-ci restant variables mais astreints à la condition (1), où les autres paramètres ont les valeurs fixes  $\bar{\lambda}_{p+q+1}, \dots, \bar{\lambda}_n$ . Alors les points de rencontre de  $\Gamma_p$  et  $\Gamma_q$  (ou ce qui revient au même le point de concours des  $p + q$  droites  $D_1, \dots, D_{p+q}$ ) décrit une courbe algébrique  $\Gamma_{p+q}$  de degré  $p + q$ , qui passe par  $\bar{M}$  et par  $A_1, A_2, \dots, A_{p+q}$ .

En associant de même deux à deux les diverses courbes  $\Gamma_p, \Gamma_q, \Gamma_r, \dots$ , nous obtiendrons une suite de

(1) Voir Félix LUCAS, *Théorie générale des courbes planes*, p. 113 et 147, ou CLEBSCH et LINDEMANN, *Leçons sur la Géométrie*, t. II, p. 95-96, 141-142, 269-276, et t. III, p. 128-132.

(2) CLEBSCH, t. III, p. 132.

courbes  $\Gamma_{p+q}, \Gamma_{p+r}, \Gamma_{q+r}, \dots$ , dont le point de concours  $M$  engendrera encore  $\Gamma$ .

D'où le *mode de génération* ( $\Gamma_{p+q}, \Gamma_{q+r}, \dots$ ).

Ensuite, on pourra associer dans des conditions analogues ces dernières courbes  $\Gamma_{p+q}, \Gamma_{p+r}, \dots$ , et réaliser encore un nouveau mode de génération.

Et ainsi de suite, le degré des courbes génératrices s'élevant ainsi de plus en plus, depuis les premières qui étaient des droites.

7. La transformation par *dualité* nous donne autant d'autres modes générateurs corrélatifs. Ainsi le premier ou *mode linéaire ponctuel*, pour nous en tenir à ce seul exemple, deviendra celui-ci :

*Mode linéaire tangentiel de génération* : si sur  $n$  droites fixes se déplacent  $n$  points assujettis à rester alignés sur une droite mobile  $\Delta$  de façon que les paramètres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  dont ils dépendent vérifient une relation homographique du  $n^{\text{ième}}$  ordre, l'enveloppe de  $\Delta$  sera une *courbe algébrique de classe  $n$* , tangente aux  $n$  bases fixes.

*Cas particulier.* — Si l'on prend pour paramètres  $\lambda$  les *abscisses* (comptées sur les  $n$  origines fixes) des intersections de ces bases avec la tangente mobile  $\Delta$ , et si la relation homographique qui les lie est *linéaire* (soit  $\Sigma m_i \lambda_i = c$ ,  $m_i$  et  $c$  étant des constantes arbitraires), l'enveloppe de  $\Delta$  est *la courbe de  $n^{\text{ième}}$  classe la plus générale admettant la droite de l' $\infty$  pour tangente multiple d'ordre  $(n - 1)$* . Les courbes de cette espèce ont été envisagées par Darboux dans ses *Principes de Géométrie analytique* (1917, p. 161 et suiv.); la plus simple d'entre elles est la parabole.

8. Par la lecture dans Clebsch *du procédé de Chasles*, notre attention a été également attirée sur le *procédé de Grassmann* (1) qui n'est autre chose qu'un cas particulier de notre *mode linéaire* (ponctuel ou tangentiel). Ce procédé de Grassmann en se bornant, pour plus de simplicité, au troisième degré, généralise celui de Mac Laurin et Taylor pour les coniques et consiste en ceci :

Si un point M se meut de telle manière que les droites, qui le joignent à trois points fixes  $A_1, A_2, A_3$ , rencontrent respectivement trois droites fixes en trois points situés sur une droite mobile  $\Delta$ , ce point M décrit une courbe du troisième ordre et cette droite  $\Delta$  enveloppe une courbe de troisième classe.

Il est ainsi visible que notre *mode générateur linéaire et ses dérivés* forment un lien et une transition entre les procédés de Chasles et de Grassmann. Ce dernier fournit en même temps un exemple de la manière dont on pourrait, entre autres, réaliser *mécaniquement* nos procédés définis géométriquement.

#### 9. Cas particulier *du mode générateur linéaire*. —

Supposons la relation (1) *involutive*, c'est-à-dire symétrique par rapport aux  $\lambda_i$ , qui sont les abscisses des points  $z_i$  sur L. On peut en donner une *interprétation géométrique* (voir M. APPELL, *Thèse*, 1876, p. 7). Prenant, pour simplifier l'écriture,  $n$  égal à 3, l'équation involutive (1) est de la forme

$$(1') \quad A\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + B(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1) \\ + C(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + D = 0.$$

Soient  $\alpha', \alpha'', \alpha'''$  les points *triples*, dont les abscisses

(1) CLEBSCH, t. II, p. 270.

sont racines de l'équation

$$A\lambda^3 + 3B\lambda^2 + 3C\lambda + D = 0;$$

l'équation (1') équivaut à celle-ci (où  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  sont les points d'abscisses  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sur L),

$$\overline{\alpha_1 \alpha'} \times \overline{\alpha_2 \alpha''} \times \overline{\alpha_3 \alpha'''} + \overline{\alpha_1 \alpha''} \times \overline{\alpha_2 \alpha'''} \times \overline{\alpha_3 \alpha'} + \overline{\alpha_1 \alpha'''} \times \overline{\alpha_2 \alpha'} \times \overline{\alpha_3 \alpha''} = 0.$$

(D'ailleurs les points triples sont trois points homologues de l'involution.)

Faisons encore, avec M. Appell, une autre remarque : Quand deux des points  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  coïncident, soient  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$ , cette relation géométrique devient

$$\frac{3}{\alpha_2 \alpha_1} = \frac{1}{\alpha_2 \alpha'} + \frac{1}{\alpha_2 \alpha''} + \frac{1}{\alpha_2 \alpha'''},$$

qui exprime que le point  $\alpha_1$  est le centre des moyennes harmoniques (1) du point  $\alpha_2$  par rapport aux points triples  $\alpha', \alpha'', \alpha'''$ .

10. *Surfaces algébriques.* — L'extension de ce qui précède à l'espace est immédiate. Indiquons-la *analytiquement* en deux mots dans le cas du *mode linéaire ponctuel*.

Soient  $n$  droites fixes  $D_1, D_2, \dots, D_n$  dont chacune telle que  $D_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) est définie comme intersection de deux plans  $P_i = 0$  et  $Q_i = 0$ , et sert d'axe de rotation à un plan variable  $\pi_i$ , qui a pour équation  $P_i + \lambda_i Q_i = 0$ , les paramètres  $\lambda_i$  étant astreints à vérifier une relation homographique d'ordre  $n$  :  $F(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = 0$ .

Les  $n$  plans mobiles  $\pi_i$  étant en outre assujettis à concourir en un même point M, le lieu de celui-ci

---

(1) Voir, par exemple, Félix LUCAS, *Théorie générale des courbes planes*, p. 25 et 65.

sera la *surface algébrique d'ordre n*, dont l'équation ponctuelle est

$$F\left(\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \dots, \frac{P_n}{Q_n}\right) = 0.$$

Les autres modes générateurs, notamment ceux de Chasles et Grassmann, s'en déduisent sans effort.

[K'1c]

GÉNÉRALISATION DE LA NOTION DE POINTS RÉCIPROQUES ;

PAR ÉMILE WEBER,  
Ingénieur.

1. Soit P un point quelconque du plan ABC. Nous désignons ses coordonnées barycentriques par  $\alpha, \beta, \gamma$ . Son triangle pédal est le triangle A, B, C.

Soit R ( $\lambda, \mu, \nu$ ) un autre point du plan ABC. Joignons AR. Cette droite coupe B, C, en m. Prenons le point m' isotomique de m sur la base B, C, et cherchons l'équation de la droite Am'. Les coordonnées barycentriques courantes sont x, y, z.

Les équations de B, C, et de AR étant

$$-\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 0 \quad \text{et} \quad \nu y = \mu z,$$

il est facile de voir que les coordonnées barycentriques absolues du point m sont  $K\alpha\left(\frac{\mu}{\beta} + \frac{\nu}{\gamma}\right), K\mu, K\nu$ , où

$$K \equiv \frac{\beta\gamma}{\mu\gamma(\alpha + \beta) + \nu\beta(\alpha + \gamma)}.$$

Les coordonnées barycentriques du point milieu

de  $B_1C_1$  sont

$$\frac{\alpha}{2} \left( \frac{1}{\alpha + \gamma} + \frac{1}{\alpha + \beta} \right), \quad \frac{1}{2} \frac{\beta}{\alpha + \beta}, \quad \frac{1}{2} \frac{\gamma}{\alpha + \gamma}.$$

Les coordonnées  $y'$  et  $z$  du point  $m'$  (symétrique de  $m$  par rapport au milieu) sont respectivement :

$$\frac{\beta}{\alpha + \beta} - K\mu \quad \text{et} \quad \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} - K\nu,$$

et, après un calcul très simple, on a l'équation de la droite  $Am'$  :

$$\frac{y'}{z} = \frac{\frac{(\alpha + \gamma)^2 \beta^2}{\mu}}{\frac{(\alpha + \beta)^2 \gamma^2}{\nu}}.$$

2. Si nous effectuons les mêmes constructions pour  $BR$  et  $CR$ , que pour  $AR$ , nous obtiendrons les droites  $Bn'$  et  $Cp'$ . Les équations de ces droites s'obtiennent par le simple jeu des permutations et sont

$$\frac{z}{x} = \frac{\frac{(\alpha + \beta)^2 \gamma^2}{\nu}}{\frac{(\beta + \gamma)^2 \alpha^2}{\lambda}},$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{(\beta + \gamma)^2 \alpha^2}{\lambda}}{\frac{(\gamma + \alpha)^2 \beta^2}{\mu}}.$$

3. Il résulte de là que les droites  $Am'$ ,  $Bn'$ ,  $Cp'$  concourent en un point  $R'$  dont les coordonnées sont :

$$\frac{(\beta + \gamma)^2 \alpha^2}{\lambda}, \quad \frac{(\gamma + \alpha)^2 \beta^2}{\mu}, \quad \frac{(\alpha + \beta)^2 \gamma^2}{\nu}.$$

Nous proposons d'appeler le point  $R'$  point réciproque de  $R$  dans le système  $(\alpha, \beta, \gamma)$ .

4. Si le point origine  $P$  est le barycentre  $G$  de  $ABC$ ,

le point réciproque  $R'$  de  $R$  dans le système  $(1, 1, 1)$  sera

$$\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\gamma},$$

ce qui est bien le point réciproque de  $R$  d'après la notion habituelle introduite par G. de Longchamps.

5. Steiner a donné le théorème suivant : Si l'on joint les trois sommets aux points milieux des côtés correspondants  $B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1$  on obtient trois droites concourantes. Ce théorème est visiblement un cas particulier de la théorie ci-dessus.

6. Il est facile de faire rentrer la notion des points isogonaux dans cette correspondance générale  $(R, R')$ . On sait, que l'inverse triangulaire du point  $\lambda, \mu, \nu$  a pour coordonnées barycentriques  $\frac{a^2}{\lambda}, \frac{b^2}{\mu}, \frac{c^2}{\gamma}$ . La question se pose comme suit : quel point  $P$  faut-il choisir comme point origine de la transformation  $(RR')$ , pour que  $R'$  soit l'inverse triangulaire de  $R$ ?

Il faut avoir

$$a : b : c = \alpha(\beta + \gamma) : \beta(\gamma + \alpha) : \gamma(\alpha + \beta),$$

ou

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{-a + b + c} : \frac{1}{-b + a + c} : \frac{1}{-c + a + b}.$$

Le point  $P$  doit donc être le point de Gergonne de  $ABC$ .

La transformation isogonale est donc une transformation réciproque ayant pour point-origine le point de Gergonne du triangle fondamental.

7. La généralisation précédente rentre dans les transformations involutives étudiées dans *Mathesis*, 1888, p. 177. Par les sommets  $A, B, C$  menons des paral-

lèles à  $B_1C_1$ ,  $C_1A_1$ ,  $A_1B_1$ . Ces droites forment un triangle  $A_2B_2C_2$ . Appelons  $A_3$ ,  $B_3$ ,  $C_3$  les milieux des droites  $B_1C_1$ ,  $C_1A_1$ ,  $A_1B_1$ . Imaginons maintenant trois faisceaux involutifs définis par le couple (AB et AC) et les rayons doubles  $AB_2$  et  $AA_3$ , le couple (BA et BC) et les rayons doubles  $BC_2$  et  $BB_3$ , le couple (CA et CB) et les rayons doubles  $CB_2$  et  $CC_3$ . Les rayons (AR, AR'), (BR, BR'), (CR, CR') formeront des couples de rayons conjugués de ces involutions. Les points principaux de cette transformation quadratique involutive sont les points  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  et le point de concours S, des droites  $AA_3$ ,  $BB_3$ ,  $CC_3$ . On peut adopter des coordonnées trilinéaires ou choisir les paramètres de référence de manière que les coordonnées de S soient 1, 1, 1. Alors les coordonnées de deux points homologues R et R' sont telles que  $\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma'$ . Toute transformation quadratique involutive (dépendant de trois involutions hyperboliques) peut se ramener à une transformation réciproque généralisée.

### BIBLIOGRAPHIE.

PETIT TRAITÉ DE PERSPECTIVE, par *Raoul Bricard*.  
1 vol, 25 × 17 de 88 pages et de 62 figures; Paris, Vuibert, 1924. Prix : 8<sup>fr</sup>.

La plupart des Traités exposent la perspective en la rattachant à la méthode des projections de Monge. Cette façon de faire, comme le remarque fort justement M. Bricard, est théoriquement peu satisfaisante et peut amener des confusions entre les deux points de vue. Aussi, dans cet Ouvrage, l'au-

teur reprend-il de façon très originale la méthode *autonome* dont le principe fut donné par Cousinery, en 1828 : il expose d'abord la *perspective indépendante*, étude des constructions faites, sur le *tableau*, à partir d'éléments perspectifs donnés; c'est seulement après avoir ainsi familiarisé le lecteur avec les méthodes propres de la perspective, que M. Bricard aborde les relations entre représentations géométrale et perspective.

Les avantages pédagogiques du plan suivi, qui met en relief la partie essentielle et vraiment originale de la théorie, sont évidents, surtout à qui profitera du lumineux exposé de M. Bricard.

Dans ce parfait « Petit traité de perspective », l'auteur, tout en se gardant d'abuser des développements purement théoriques de géométrie projective, a su retenir ce qui doit éveiller l'intérêt du lecteur ou ce qui contribuera à la simplicité et à l'élégance de l'exposition. Les applications traitées, les exercices proposés, fort bien choisis, rendent le Livre tout à fait pratique. Enfin, il faut aussi signaler, en marge de la théorie, l'excellent exposé des principes physiques et psychologiques de la perspective (Chap. II), puis (Chap. VIII) quelques pages très fines sur la valeur de la perspective, les conditions de la restitution mentale et les principes de la perspective d'observation.

Bref, la lecture de ce petit Livre, si attachant et bien équilibré, fort simple et pourtant complet, fait souhaiter qu'une étude, dont l'auteur a montré toute la valeur éducative, prenne plus large place dans les programmes. J. P.

LEÇONS SUR LES FONCTIONS UNIFORMES A POINT SINGULIER ESSENTIEL ISOLÉ, par *Gaston Julia* (rédigées par P. Flamant). 1 vol. 25 × 16 de VII-152 pages. Collection de monographies sur la théorie des fonctions. Paris, Gauthier-Villars, 1923. Prix : 15<sup>fr</sup>.

Ces leçons, professées par l'auteur au Collège de France et très parfaitement rédigées par M. P. Flamant, donnent un remarquable exposé d'ensemble d'une théorie que les travaux de l'auteur ont beaucoup contribué à développer.

Le sujet du Livre est l'étude de la distribution des racines

des équations

$$f(z) = b \quad (b \text{ étant arbitrairement choisi})$$

au voisinage d'un point singulier essentiel isolé de  $f(z)$ . Les théorèmes de M. Picard dominent la question : ils nous apprennent qu'une fonction prend, au voisinage d'un point singulier essentiel isolé, une infinité de fois toute valeur (l'infini compris), sauf au plus deux valeurs exceptionnelles. Pour établir ces théorèmes et diverses généralisations, l'auteur reprend la méthode de M. Picard, basée sur l'emploi de la fonction modulaire : c'est l'occasion d'un très suggestif exposé des propriétés de cette fonction, souvent utilisée dans la suite. La fonction modulaire est étudiée ici à partir de la représentation conforme, suivant la méthode indiquée par M. Lindelöf, méthode si accessible et qui mérite d'être classique.

Un Chapitre suivant du Livre est consacré aux recherches de M. Montel, qui retrouve les théorèmes en question à partir de la notion de *famille normale de fonctions*. Une famille est *normale* (dans un domaine) lorsque, de toute suite infinie de fonctions de la famille, on peut extraire une suite uniformément convergente; on démontre que des fonctions, holomorphes dans un domaine et n'y prenant pas deux valeurs distinctes  $a$  et  $b$ , forment une famille normale; on passe enfin au théorème de M. Picard, en remplaçant l'étude d'une fonction dans un cercle entourant le point singulier, par celle d'une famille de fonctions définies par les valeurs de la première dans des couronnes concentriques.

Ce point de vue se révèle fécond. On le verra dans la suite du Livre, d'abord à propos de l'étude d'une fonction dans un secteur ayant pour sommet le point singulier, puis dans les recherches, dues à l'auteur, sur les valeurs prises par la fonction lorsque l'on tend vers le point singulier suivant certaines courbes, ou bien de façon discontinue (en donnant à  $z$  des valeurs prises, par exemple, en progression géométrique).

La place nous manque pour donner ici une idée de la belle précision des résultats ainsi obtenus par M. Julia, de l'intérêt qu'ils présentent pour le développement ultérieur de la théorie. Il faut lire ce Livre où l'auteur expose si heureusement, sous une forme très accessible à qui possède les notions fondamentales d'Analyse, une importante théorie.

J. P.

---

---

**AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.**  
**(SESSION DE 1924.)**

---

**Problème de Calcul différentiel et intégral.**

I. Soient  $S$  et  $S_1$  deux surfaces données. On fait correspondre chacun à chacun, suivant une certaine loi  $(L)$ , les points  $M$  de  $S$  et les points  $M_1$  de  $S_1$ . Toutes les fonctions employées sont analytiques.

Montrer que les courbes, sur lesquelles les longueurs d'arcs se conservent, forment en général deux familles à un paramètre.

II. Montrer que si ces familles se confondent en une seule (savoir  $F$  sur  $S$ ,  $F_1$  sur  $S_1$ ), la loi  $(L)$  fait correspondre aux trajectoires orthogonales des courbes  $F$  celles des courbes  $F_1$ .

Réciproque.

III. On suppose en outre que la loi  $(L)$  associe à une courbe  $F$  quelconque une courbe  $F_1$  égale, de sorte que les arcs superposables de ces deux courbes soient homologues. On convient alors de dire que la correspondance de  $S$  et de  $S_1$  est d'espèce :

- ( $\alpha$ ) si  $(L)$  ne réalise pas l'application de  $S$  et  $S_1$  ;
- ( $\beta$ ) si  $(L)$  les rend superposables mais non pas superposées.

On suppose d'abord que  $F$  et  $F_1$  sont des droites ; étudier :

- a. Le cas ( $\alpha$ ).

On regarde  $F$  et  $F_1$ , comme des lignes de forces de deux champs  $(\Phi)$  et  $(\Phi_1)$ , les forces  $\Phi$  et  $\Phi_1$  étant égales aux points correspondants ; on demande de remplacer la condition  $(\alpha)$  par une autre équivalente que remplissent les travaux des forces dans deux mouvements correspondants sur  $S$  et  $S_1$ .

b. Le cas  $(\beta)$ .

1°  $C$  et  $C_1$  étant deux courbes homologues quelconques, qui passent respectivement par  $M$  et  $M_1$ , que peut-on dire des points où les axes des cercles osculateurs de  $C$  en  $M$  et de  $C_1$  en  $M_1$ , coupent respectivement les plans tangents à  $S$  et à  $S_1$  ? (Il s'agit d'une propriété générale pour tout couple de surfaces applicables.)

2°  $C$  étant une trajectoire orthogonale des génératrices  $G$ , montrer qu'il existe deux développables formées respectivement de normales à  $C$  et à  $C_1$ , et qui coupent  $S$  et  $S_1$  sous le même angle aux points  $M$  et  $M_1$  correspondants.

IV. On suppose  $F$  et  $F_1$  planes, mais courbes.

a. Pour le type  $(\alpha)$ , l'énoncé III, a, reste valable.

b. Montrer l'impossibilité de la correspondance  $(\beta)$ .

[Il sera commode, ayant choisi des axes  $M\xi\eta\zeta$  (1) liés à la courbe  $F$  en chacune de ses positions, d'utiliser les projections, sur ces axes, du déplacement élémentaire d'un point mobile de  $S$  et en particulier de faire figurer les composantes  $\delta p$ ,  $\delta q$ ,  $\delta r$  de la rotation instantanée du trièdre  $M\xi\eta\zeta$  sur ses trois arêtes. Même observation au sujet de  $F_1$  et de  $S_1$ .]

---

(1) Lire  $l\xi\eta\zeta$  conformément aux notations du § V, a.

V. On suppose  $F$  et  $F_1$  gauches.

a. Montrer que dans les deux cas ( $\alpha$ ) et ( $\beta$ ) les tangentes à une même courbe  $F$  font partie d'un complexe linéaire.

Les déplacements élémentaires de deux trièdres  $I\xi\eta\zeta$ ,  $I_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ , identiquement liés à  $F$  et à  $F_1$ , ne diffèrent que par un mouvement hélicoïdal ayant le même axe que le complexe. En déduire le choix le plus simple des trièdres  $(I, I_1)$  relativement à  $S$  et  $S_1$  simultanément.

b. La correspondance est du type ( $\beta$ ).

1° Relativement au trièdre  $I\xi\eta\zeta$ , les courbes  $F$  engendrent une surface  $\Sigma$ . Montrer que ces courbes ne peuvent constituer une famille d'asymptotiques de  $\Sigma$ .

2° Posant  $\xi = r \cos \omega$ ,  $\eta = r \sin \omega$  (1), on prend pour paramètres de  $\Sigma$ ,  $\omega$  et  $t$ ,  $t$  étant constant sur  $F$ .

Montrer que, si  $v = \text{tang} \omega$ ,  $\Sigma$  est surface intégrale de l'équation

$$\frac{d\xi}{dt} = \sqrt{\frac{d\xi^2}{dv}} [x + \beta v - \zeta(\gamma + \delta v)] \quad (2).$$

$x, \beta, \gamma, \delta$  étant des fonctions de  $t$  seul.

(1) Lire  $\eta = r \sin \omega$  ou, mieux encore, pour éviter toute confusion avec les notations  $\delta p, \delta q, \delta r$  du § IV, b, lire

$$\xi = \rho \cos \omega, \quad \eta = \rho \sin \omega,$$

( $\xi, \eta, \zeta$ ) désignent les coordonnées polaires du point  $M$  par rapport au trièdre  $I\xi\eta\zeta$ ; ( $\rho, \omega, \zeta$ ) sont les coordonnées semi-polaires du même point.

(2) Remplacer la lettre  $v$  par la lettre  $\nu$  ( $\nu = \text{tang} \omega$ ). Conformément aux notations de Poincaré, le  $d$  droit est utilisé dans cette équation pour désigner des dérivées partielles; dans la solution, j'ai rétabli le  $d$  de ronde.

*Montrer l'existence d'intégrales complètes correspondant aux droites du complexe auquel F appartient.*

SOLUTION PAR M. BERTRAND GAMBIER,

Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

*Remarque préliminaire.* — Je commencerai par rendre hommage à l'élégance intrinsèque du sujet; je me permettrai une remarque relative, non pas au fond, mais exclusivement à la forme.

Le n° III comporte la phrase :

( $\beta$ ) si (L) les rend superposables, mais non pas superposées.

Je préférerais une rédaction analogue à celle-ci :

( $\beta$ ) si (L) les rend applicables, en écartant le cas banal où  $S_1$  est égale à S ou à une symétrique de S.

L'énoncé officiel donne au mot *superposables* le sens réservé d'habitude au mot *applicables*. Il me paraît difficile de ne pas admettre que les surfaces représentées par les formules respectives

$$(S) \quad x = f(u, v), \quad y = \varphi(u, v), \quad z = \psi(u, v),$$

$$(S_1) \quad x_1 = f(u, v) + a, \quad y_1 = \varphi(u, v) + b, \quad z_1 = \psi(u, v) + c$$

( $u, v$  paramètres variables;  $a, b, c$  constantes numériques non nulles ensemble) sont *superposables, mais non superposées*. Si même on consent à laisser au mot *superposables* le sens que l'énoncé officiel lui attribue, on arrive à cette conclusion qu'une surface S, dépourvue de plan ou centre de symétrie, et la symétrique  $S_1$  de S par rapport à l'origine sont *superposables, mais non superposées* (toujours au sens de l'énoncé officiel);

or on doit évidemment exclure une telle solution, et c'est bien l'esprit, sinon la lettre, de l'énoncé.

I. Sur  $S$  on trace un système arbitraire de coordonnées curvilignes  $(u, v)$ ; sur  $S_1$  on trace les courbes homologues et l'on exprime les coordonnées des points homologues  $M$  et  $M_1$  en fonction de  $u$  et  $v$ . Avec les notations usuelles, les éléments linéaires sont

$$\begin{aligned} ds^2 &= E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \\ ds_1^2 &= E_1 du^2 + 2F_1 du dv + G_1 dv^2. \end{aligned}$$

Les courbes pour lesquelles les arcs homologues ont la même longueur constituent *en général* deux familles à un paramètre définies par l'équation différentielle du premier ordre

$$(E - E_1) du^2 + 2(F - F_1) du dv + (G - G_1) dv^2 = 0.$$

Il y a trois cas à distinguer :

1° Le cas, *normal* si  $S$  et  $S_1$  sont quelconques ainsi que la loi (L), où l'expression

$$\Delta \equiv (E - E_1)(G - G_1) - (F - F_1)^2$$

n'est pas nulle; les deux familles sont distinctes; suivant le signe de  $\Delta$  elles sont, au voisinage d'un point réel, soit réelles soit imaginaires conjuguées. L'énoncé exclut définitivement pour la suite ce premier cas.

2° Le cas, *exceptionnel* au sens déjà employé, où les deux familles se confondent en une seule; cette famille est réelle; on peut supposer que c'est la famille  $u = \text{const.}$ ; on aura

$$F = F_1, \quad G = G_1, \quad E \neq E_1.$$

Je désigne ce cas par la lettre (A); l'énoncé donne plus bas le sous-cas ( $\alpha$ ) de (A), où les courbes

homologues sont de plus *égales chacune à chacune*.

3° Le cas, encore plus exceptionnel, où il y a *une infinité de familles dont les arcs se conservent* ; on a

$$E = E_1, \quad F = F_1, \quad G = G_1.$$

Une courbe *quelconque* et son homologue ont même longueur ; les deux surfaces sont *applicables*. Je désigne ce cas par la lettre (B) ; l'énoncé donne plus bas le sous-cas ( $\beta$ ) de (B), où il existe *une famille à un paramètre* dont les courbes homologues sont *égales chacune à chacune*. (B) peut être considéré comme un cas particulier de (A).

II. On peut écrire

$$(1) \quad ds^2 = \frac{1}{G} [(G dv + F du)^2 + (EG - F^2) du^2].$$

L'équation différentielle

$$(2) \quad G dv + F du = 0$$

définit les trajectoires orthogonales des courbes  $u = \text{const.}$  Dans les cas (A) ou (B) ces trajectoires se conservent.

*Réciproquement*, si la loi (L) :

1° conserve la longueur des courbes  $u = \text{const.}$  ;

2° conserve les trajectoires orthogonales de ces mêmes courbes,

on a d'après 1°, puis 2°, successivement

$$G = G_1, \quad \frac{F}{F_1} = \frac{G}{G_1},$$

d'où finalement

$$G = G_1, \quad F = F_1$$

et la loi (L) est une loi (A) ou (B).

III. Restons d'abord dans l'hypothèse (A), plus large que l'hypothèse ( $\alpha$ ). La tangente à la courbe  $u = \text{const.}$ , orientée dans le sens des  $v$  croissants, a pour cosinus directeurs

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial z}{\partial v},$$

où  $\sqrt{G}$  est pris positivement ; sur cette tangente ainsi orientée appliquons en M une force d'intensité  $\Phi(u, v)$ . Nous avons ainsi défini un champ ( $\Phi$ ) dans toute l'étendue de S. Le travail élémentaire de  $\Phi$  pour un déplacement élémentaire *quelconque* de M sur S est

$$(3) \quad \frac{\Phi}{\sqrt{G}} \left[ dx \frac{\partial x}{\partial v} + dy \frac{\partial y}{\partial v} + dz \frac{\partial z}{\partial v} \right] = \frac{\Phi}{\sqrt{G}} (F du + G dv).$$

Sur  $S_1$  définissons le champ analogue ( $\Phi_1$ ), les forces  $\Phi$  et  $\Phi_1$  étant égales aux points correspondants. On voit immédiatement que la condition (A) peut être remplacée par l'égalité des travaux élémentaires correspondants et réciproquement : *a fortiori* si (A) est remplacé par le sous-cas ( $\alpha$ ) et encore plus *a fortiori* si (§ III, a) on suppose que F et  $F_1$  sont des droites. Nous avons aussi vérifié que l'énoncé actuel est valable pour IV, a.

Imaginons maintenant réalisée l'hypothèse (B), plus large que l'hypothèse ( $\beta$ ). Une courbe C de S, issue de M, a R pour rayon de courbure en M ; le plan osculateur à C en M fait l'angle  $\theta$  avec la normale en M à S ; on sait que l'expression  $\frac{\sin \theta}{R}$ , ou *courbure géodésique*, est un invariant dans l'applicabilité de deux surfaces ; d'ailleurs  $\frac{R}{\sin \theta}$  est la distance, au point M, du point où l'axe du cercle osculateur perce le plan tangent en M à S : *donc cette distance se conserve*. Il sera intéressant de démontrer rapidement

et directement cette propriété dans le cas particulier de (B) où les courbes  $F$  et  $F_1$  sont rectilignes : ceci va être fait à l'instant de façon à traiter du même coup III, 2°.

Plaçons-nous donc dans les conditions III, 2°. La normale  $N$  à la surface  $S$  au point  $M$  fait avec la normale principale de la courbe  $C$  l'angle  $\theta$  déjà défini ; la normale  $N'$  à  $C$  engendre une surface développable et fait avec la normale principale de  $C$  un angle  $V$  défini par la formule bien connue (facile d'ailleurs à retrouver par la méthode ci-dessous)

$$v = \int \frac{ds}{T},$$

où  $T$  est le rayon de torsion de  $C$  ; l'angle  $(N, N')$  est donc égal à  $|V - \theta|$  ; la développable lieu de  $N'$  coupe la surface  $S$  sous l'angle complémentaire de  $(N, N')$ . La différentielle de  $V - \theta$  est

$$\frac{ds}{T} - d\theta.$$

On retombe ainsi sur la *torsion géodésique* de la courbe  $C$  considérée comme tracée sur  $S$ . Je cite, pour mémoire, la formule, que les spécialistes eux-mêmes sont contents de retrouver dans les ouvrages spéciaux,

$$(4) \quad \frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} = \frac{\begin{vmatrix} D du + D' dv & D' du + D'' dv \\ E du + F dv & F du + G dv \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2} (E du^2 + 2F du dv + G dv^2)}.$$

Ici,  $S$  est réglée, les courbes  $u = \text{const.}$  sont rectilignes, donc  $D'' = 0$ .

La courbe  $C$  est l'une des trajectoires orthogonales des génératrices, de sorte que  $F du + G dv$  reste nulle

tout le long de C ; on a donc le long de C

$$(5) \quad \frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} = \frac{-D' du (E du + F dv)}{\sqrt{EG - F^2} (E du^2 + 2F du dv + G dv^2)}.$$

Or, tenant compte de la relation  $F du + G dv = 0$ , la formule (5) prend la forme plus simple

$$(5') \quad \frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} = \frac{-D'}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{-R_1 R_2}}$$

où  $R_1, R_2$  sont les rayons principaux de S au point  $uv$ ; cela résulte de ce que l'expression invariante  $DD'' - D'^2$  se réduit à  $-D'^2$ , de sorte que  $D'$  conserve la même valeur absolue (remarquons en passant qu'une symétrie plane change le signe de  $D, D'$ ). Cela suffit à montrer que

$$\frac{d}{ds} |V - \theta| = \frac{d}{ds} |V_1 - \theta_1|.$$

En remplaçant une normale de C par une autre, on augmente tous les angles  $V$  d'une même constante : on peut donc associer une à une les normales de C et  $C_1$  de sorte qu'elles coupent respectivement S et  $S_1$  sous le même angle le long de C ou  $C_1$ .

Démontrons maintenant directement, pour le cas spécial de deux surfaces réglées applicables, que l'expression  $\frac{\sin \theta}{R}$  est un invariant *pour une courbe quelconque* et que l'expression  $\frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds}$  est un invariant *pour une trajectoire orthogonale des génératrices*.

Soit une courbe (C) dont les coordonnées d'un point variable  $x_0, y_0, z_0$  sont exprimées au moyen de l'arc  $s$  de cette courbe ;  $a, b, c$  désigneront les cosinus directeurs de la tangente ;  $a', b', c'$  ceux de la normale principale ;  $a'', b'', c''$  ceux de la binormale. Nous supposons que (C) soit directrice d'une surface réglée ;

les paramètres directeurs (principaux ou non) de la génératrice sont de nouvelles fonctions  $l, m, n$  de l'arc  $s$ ; les équations paramétriques de la surface réglée sont

$$(6) \quad x = x_0 + lv, \quad y = y_0 + mv, \quad z = z_0 + nv,$$

et l'on trouve aisément pour l'élément linéaire  $dS^2$  de la surface réglée ( $l', m', n'$  désignant  $\frac{dl}{ds}, \frac{dm}{ds}, \frac{dn}{ds}$ )

$$(7) \quad dS^2 = A v^2 + 2 B v + C) ds^2 + 2(P v + Q) ds dv + G dv^2$$

où l'on a (1)

$$(8) \quad \begin{cases} A = l'^2 + m'^2 + n'^2, & P = ll' + mm' + nn', \\ B = al' + bm' + cn', & Q = al + bm + cn, \\ C = 1, & G = l^2 + m^2 + n^2. \end{cases}$$

Faisons apparaître l'angle  $\theta$  déjà défini : les cosinus directeurs de la normale  $N$  à la surface sont évidemment

$$a' \cos \theta + a'' \sin \theta, \quad b' \cos \theta + b'' \sin \theta, \quad c' \cos \theta + c'' \sin \theta.$$

Le vecteur  $l, m, n$  peut évidemment être défini comme la résultante d'un vecteur unité porté sur celle des normales à la courbe (C) qui est normale à  $N$  et d'un vecteur  $\lambda$  porté par la tangente à (C); on a alors

$$l = a\lambda - a' \sin \theta + a'' \cos \theta, \quad m = b\lambda - b' \sin \theta + b'' \cos \theta, \\ n = c\lambda - c' \sin \theta + c'' \cos \theta.$$

puis, par les formules de Serret-Frenet,

$$l' = a \left( \frac{\sin \theta}{R} + \frac{d\lambda}{ds} \right) + a' \left[ \cos \theta \left( \frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} \right) + \frac{\lambda}{R} \right] \\ + a'' \sin \theta \left( \frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} \right),$$

---

(1) Il n'y aura pas confusion entre la courbe (C) et le coefficient C qui figure dans  $dS^2$ .

d'où l'on déduit

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \left( \frac{\sin \theta}{R} + \frac{d\lambda}{ds} \right)^2 + \left( \frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} \right)^2 \\ \quad + \frac{2\lambda}{R} \cos \theta \left( \frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} \right) + \frac{\lambda^2}{R^2}, \\ B = \frac{\sin \theta}{R} + \frac{d\lambda}{ds}, \quad C = 1, \\ P = \lambda \frac{d\lambda}{ds}, \quad Q = \lambda, \quad G = \lambda^2 + 1. \end{array} \right.$$

Si donc la surface réglée  $S$  se déforme (au sens de Gauss) de sorte que les génératrices restent rectilignes, nous appellerons  $(C_1)$  la courbe homologue de  $(C)$  de sorte qu'aux points homologues les valeurs de  $s$  sur les deux surfaces  $S$  et  $S_1$  soient les mêmes; mais alors la fonction  $|\lambda|$ , qui représente la cotangente de l'angle de  $C$  avec la génératrice, se conserve en passant de  $S$  à  $S_1$ : en changeant simultanément, si c'est nécessaire, le signe de  $\lambda$  et  $\nu$  sur  $S$  mais non sur  $S_1$ , on peut supposer que c'est  $\lambda$  lui-même qui se conserve; mais alors la fonction  $\nu$  doit prendre aussi la même valeur aux points homologues, puisque  $\nu\sqrt{\lambda^2 + 1}$  représente le segment porté sur la génératrice à partir de  $C$  <sup>(1)</sup>. Alors la comparaison des  $dS^2$  prouve que les deux expressions

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin \theta}{R}, \\ \left( \frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} \right)^2 + \frac{2\lambda}{R} \cos \theta \left( \frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} \right) + \frac{\lambda^2}{R^2} \end{array} \right.$$

---

(1) Le raisonnement du texte laisserait à la rigueur admettre l'hypothèse  $\nu_1 = -\nu$  plutôt que  $\nu_1 = \nu$ . Mais les égalités  $A\nu^2 + 2B\nu = A_1\nu_1^2 + 2B_1\nu_1$  et  $\left(\nu \frac{d\lambda}{ds} + 1\right) d\nu = \left(\nu_1 \frac{d\lambda}{ds} + 1\right) d\nu_1$  qui doivent avoir lieu, *quel que soit s*, ne permettent que  $\nu_1 = \nu$ .

se conservent en passant de  $S$  à  $S_1$  : ces deux expressions ne font intervenir que la courbe  $C$  et l'angle de  $C$  avec la génératrice.

La courbure géodésique se conserve donc pour une courbe quelconque ; si maintenant  $C$  est trajectoire orthogonale des génératrices, on a  $\lambda = 0$  et le carré de la torsion géodésique se conserve. Ce sont les résultats que nous voulions établir directement pour les surfaces réglées, en nous plaçant au point de vue du candidat qui n'a pas de formulaire à sa disposition et ne peut se rappeler une formule relativement compliquée ; pour le chercheur, il y a souvent avantage à se servir aussi de la formule (4) indiquée précédemment pour mémoire.

Ajoutons un mot : en retranchant du second élément indiqué plus haut comme invariant, la quantité elle-même invariante  $\lambda^2 \cdot \frac{\sin^2 \theta}{R^2}$ , on obtient l'invariant plus simple

$$(11) \quad \left| \left( \frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds} \right) + \lambda \frac{\cos \theta}{R} \right|;$$

on vérifie aisément que l'expression (11) reproduit encore le second membre de (5'), même si  $\lambda \neq c$ .

IV. La question IV, *a*, a été résolue comme cas très particulier de l'hypothèse (A).

La question IV, *b*, se résout immédiatement en remarquant que si deux surfaces applicables  $S$  et  $S_1$ , quelconques, possèdent une seule courbe plane,  $C$  sur  $S$  et  $C_1$  sur  $S_1$ , telles que  $C$  et  $C_1$  soient égales (les points homologues de  $C$  et  $C_1$  dans leur superposition se correspondant aussi dans l'applicabilité), les deux surfaces  $S$  et  $S_1$  sont, ou égales, ou l'une égale à une symétrique de l'autre. En effet, portons  $C$  sur  $C_1$  de façon à réaliser leur superposition ; aux

points homologues,  $\frac{\sin \theta}{R}$  a la même valeur, d'après la théorie de l'applicabilité des surfaces ; d'autre part  $R = R_1$ , donc  $\sin \theta = \sin \theta_1$  ; si  $\theta = \theta_1$ , les deux surfaces  $S$  et  $S_1$  coïncident comme admettant même développable circonscrite le long de  $C$  ; si  $\theta + \theta_1 = \pi$ , les deux surfaces  $S$  et  $S_1$  sont symétriques par rapport au plan de  $C$ . On a donc obtenu la solution banale que l'esprit de l'énoncé demande d'écarter.

Si  $C$  est rectiligne, le raisonnement est en défaut. Si  $C$  est gauche, on n'a pas  $\theta = \theta_1$ , mais  $\theta + \theta_1 = \pi$  et cette seconde solution  $\theta + \theta_1 = \pi$  permet justement d'obtenir ce que demande la question V.

V. Soient donc la surface  $S$  et les courbes  $F, F', F'', \dots$  tracées sur  $S$ , qui, dans la déformation de  $S$ , ne subissent aucune déformation, mais ont simplement leurs positions relatives changées. Traçons sur  $S$  une courbe quelconque  $\Phi$  rencontrant  $F, F', F'', \dots$  aux points  $M, M', M'' \dots$  et soit  $t$  un paramètre permettant d'individualiser  $M, M', M'', \dots$  sur  $\Phi$ .

Traçons maintenant une courbe  $\bar{\Phi}$  *quelconque* et établissons une correspondance ponctuelle bien déterminée entre  $\Phi$  et  $\bar{\Phi}$  : autrement dit les coordonnées  $\bar{M}_i$  du point homologue de  $M_i$  sont *trois* fonctions complètement arbitraires de  $t_i$ . Transportons la courbe  $F^{(i)}$  de façon que le point  $M_i$  vienne en  $\bar{M}_i$  ; *trois* nouvelles fonctions de  $t_i$ , complètement arbitraires aussi, permettent d'orienter la courbe transportée  $F^{(i)}$  autour de  $\bar{M}_i$  ; cela posé, la surface  $S$  a été transformée en une surface  $\Sigma$  dépendant des *six fonctions arbitraires d'une variable* définies à l'instant : les courbes  $F^{(i)}$  sont restées inaltérées, leur disposition relative a seule varié

Sur la surface  $\Sigma$  que nous rapporterons à un trièdre  $I\xi\eta\zeta$  on peut prendre pour lignes de coordonnées  $t = \text{const.}$  les courbes  $F^{(t)}$  transportées de sorte que les équations paramétriques de  $\Sigma$  sont

$$(12) \quad X = \xi(t, \nu), \quad Y = \eta(t, \nu), \quad Z = \zeta(t, \nu),$$

$\nu$  désignant un paramètre dont la variation, pour  $t$  constant égal à  $t_i$ , donne la courbe  $F^{(t)}$  transportée. Les équations paramétriques de la surface  $S$  sont donc

$$(13) \quad \begin{cases} x = x_0 + \alpha\xi + \alpha'\eta + \alpha''\zeta, \\ y = y_0 + \beta\xi + \beta'\eta + \beta''\zeta, \\ z = z_0 + \gamma\xi + \gamma'\eta + \gamma''\zeta, \end{cases}$$

où  $x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta, \gamma, \dots, \gamma''$  sont 12 fonctions de  $t$  seul; l'interprétation de ces 12 fonctions est aisée. Imaginons le trièdre  $I\xi\eta\zeta$  lié à  $\Sigma$ : considérons le paramètre  $t$  comme représentant le temps et déplaçons  $I\xi\eta\zeta$  par rapport à un trièdre fixe  $Oxyz$  de façon qu'à l'instant  $t$ , les coordonnées  $x_0, y_0, z_0$  dans le système  $Oxyz$  soient celles de  $I$  et que  $\alpha, \beta, \gamma$  soient les cosinus directeurs de  $I\xi$  par rapport à  $Ox, Oy, Oz$ ;  $\alpha', \beta', \gamma'$  ceux de  $I\eta$ ,  $\alpha'', \beta'', \gamma''$  ceux de  $I\zeta$ : le mouvement du trièdre  $I\xi\eta\zeta$  dépend donc du seul paramètre  $t$ ; à l'instant  $t_i$  nous ne prenons de  $\Sigma$  que la courbe  $t_i$  et alors la surface  $S$  est le lieu de cette courbe: la courbe  $t = \text{const.}$  se déplace et se déforme donc par rapport au trièdre  $I\xi\eta\zeta$  de façon à engendrer  $\Sigma$  dans ce trièdre mobile et, en composant ces déplacements et déformations relatifs avec le mouvement d'entraînement de  $I\xi\eta\zeta$ , la courbe engendre au contraire  $S$ . Le trièdre mobile  $I\xi\eta\zeta$  admet à l'époque  $t$  une rotation instantanée que nous projetons sur  $I\xi, I\eta, I\zeta$  et nous appelons  $p, q, r$  suivant l'usage les composantes en question; le point  $I$

possède à l'instant  $t$  une vitesse dont les composantes suivant  $I \xi \eta \zeta$  seront représentées par  $\lambda, \mu, \nu$ .

Les relations

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} dx &= \left( \frac{dx_0}{dt} + \frac{dx}{dt} \xi + \frac{dx'}{dt} \eta + \frac{dx''}{dt} \zeta \right. \\ &\quad \left. + \alpha \frac{\partial \xi}{\partial t} + \alpha' \frac{\partial \eta}{\partial t} + \alpha'' \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) dt \\ &\quad + \left( \alpha \frac{\partial \xi}{\partial v} + \alpha' \frac{\partial \eta}{\partial v} + \alpha'' \frac{\partial \zeta}{\partial v} \right) dv, \\ dy &= \dots\dots\dots \\ dz &= \dots\dots\dots \end{aligned} \right.$$

donnent immédiatement les formules bien connues

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha dx + \beta dy + \gamma dz &= \left( \lambda + q\zeta - r\eta + \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) dt + \frac{\partial \xi}{\partial v} dv, \\ \alpha' dx + \beta dy + \gamma' dz &= \left( \mu + r\xi - p\zeta + \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) dt + \frac{\partial \eta}{\partial v} dv, \\ \alpha'' dx + \beta'' dy + \gamma'' dz &= \left( \nu + p\eta - q\xi + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) dt + \frac{\partial \zeta}{\partial v} dv, \end{aligned} \right.$$

et par suite l'élément linéaire de  $S$  est

$$(16) \quad ds^2 = F dt^2 + 2F dt dv + G dv^2$$

avec, en employant le symbole sommatoire  $S$  de Lamé,

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} E &= S \left( \lambda + q\zeta - r\eta + \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2, \\ F &= S \frac{\partial \xi}{\partial v} \left( \lambda + q\zeta - r\eta + \frac{\partial \xi}{\partial t} \right), \\ G &= S \left( \frac{\partial \xi}{\partial v} \right)^2. \end{aligned} \right.$$

Pour la surface  $S_1$  le mouvement du trièdre  $I \xi \eta \zeta$  sera défini par d'autres fonctions de  $t, \lambda_1, \mu_1, \nu_1, p_1, q_1, r_1$ . (Nous rappelons que la donnée de  $\lambda, \mu, \nu, p, q, r$  permet d'obtenir le mouvement par l'intégration d'une équation de Riccati et trois quadratures, et que le mouvement obtenu est *unique*.) En comparant les

éléments linéaires de  $S$  et  $S_1$  on a, comme de juste,  $G = G_1$ ; il n'y a donc qu'à écrire la relation  $F = F_1$  si nous traitons d'abord la question  $V, a$  :

$$(18) \quad S(\lambda - \lambda_1) \frac{\partial \xi}{\partial v} + S(p - p_1) \left( \tau_1 \frac{\partial \zeta}{\partial v} - \zeta \frac{\partial \eta_1}{\partial v} \right) = 0$$

Si nous fixons  $t$ , ceci est l'équation d'un complexe linéaire contenant les tangentes de la courbe  $t$  considérée. Les droites du complexe sont les droites de moment nul par rapport au système de vecteurs dont les éléments de réduction en  $I$  sont :

*résultante générale de translation* :  $p - p_1, q - q_1, r - r_1,$   
*moment résultant en I* :  $\lambda - \lambda_1, \mu - \mu_1, \nu - \nu_1.$

Considérons donc la courbe  $t$  sur  $S$  et l'axe du complexe <sup>(1)</sup>; nous avons laissé jusqu'ici indéterminé le déplacement que l'on inflige à chaque courbe  $t$  de  $S$  pour obtenir  $\Sigma$ ; il est loisible de transporter cette courbe  $t$  de façon que l'axe du complexe correspondant soit précisément  $I\xi$ ; on aura donc

$$(19) \quad p = p_1, \quad q = q_1, \quad \lambda = \lambda_1, \quad \mu = \mu_1.$$

L'équation  $F = F_1$  s'écrit

$$(20) \quad (\nu - \nu_1) \frac{\partial \zeta}{\partial v} + (r - r_1) \left( \xi \frac{\partial \eta_1}{\partial v} - \tau_1 \frac{\partial \xi}{\partial v} \right) = 0.$$

(1) Le système de vecteurs n'est pas réductible à un couple; sinon on aurait  $p = p_1, q = q_1, r = r_1$  et la courbe  $F$  serait dans un plan perpendiculaire à l'axe du couple (cas écarté d'une famille de courbes planes, et même d'une seule). Le système de vecteurs n'est pas réductible à une force unique, sinon la courbe  $F$  serait encore plane, dans un plan passant par la force. Naturellement le cas où  $F$  est rectiligne est spécial, mais a été traité directement. Il peut d'ailleurs être traité comme cas particulier de  $V$  en réduisant la surface  $\Sigma$  à l'axe  $I\xi$ , on prend alors  $p = p_1, q = q_1, \lambda = \lambda_1, \mu = \mu_1, \nu = \nu_1, \xi = \tau_1 = 0, \zeta = \nu.$

Nous devons remarquer que nous n'avons pas épuisé complètement les six fonctions arbitraires que nous avons à notre disposition pour fabriquer la surface  $\Sigma$ ; nous pouvons en effet, sans que la courbe  $F$  transportée cesse d'appartenir au complexe correspondant, faire tourner d'un angle arbitraire  $\theta(t)$  cette courbe autour de  $Oz$ , la faire glisser d'une quantité arbitraire  $Z(t)$ , le long de  $Oz$ : ces opérations remplacent la surface  $\Sigma$  par une surface  $\Sigma'$  *différente*, laissent inaltérées  $p, q, \lambda, \mu$  mais remplacent  $r, r_1, \nu, \nu_1$  par

$$\begin{aligned} r' &= r + \frac{d\theta}{dt}, & r'_1 &= r_1 + \frac{d\theta}{dt}, \\ \nu' &= \nu + \frac{dZ}{dt}, & \nu'_1 &= \nu_1 + \frac{dZ}{dt}, \end{aligned}$$

la considération de l'équation  $E = E_1$  montre qu'il y a intérêt à déterminer  $\theta$  et  $Z$  par les quadratures

$$(21) \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{2}(r + r_1), \quad \frac{dZ}{dt} = -\frac{1}{2}(\nu + \nu_1)$$

de façon que  $r' + r'_1 = 0, \nu' + \nu'_1 = 0$ . C'est le meilleur choix que l'on puisse faire de la surface auxiliaire  $\Sigma'$ , de sorte qu'en supprimant les accents on pourra supposer, aussi bien pour  $(\alpha)$  que pour  $(\beta)$ ,

$$(22) \quad \begin{cases} p = p_1, & q = q_1, & r = -r_1, \\ \lambda = \lambda_1, & \mu = \mu_1, & \nu = -\nu_1. \end{cases}$$

Augmenter  $\theta$  d'une constante est indifférent, cela ne fait que faire tourner  $\Sigma$  autour de  $I\xi$ ; de même pour  $Z$ ; simple translation. Ce choix optimum a été obtenu par la remarque simple que les deux trièdres  $I\xi\eta\zeta$  ou  $I_1\xi_1\eta_1\zeta_1$  ont des mouvements élémentaires différent d'un simple mouvement hélicoïdal  $p - p_1, q - q_1, r - r_1; \lambda - \lambda_1, \mu - \mu_1, \nu - \nu_1$  de même axe que le

complexe. Je n'insisterai pas davantage sur le cas ( $\alpha$ ) qui est ainsi virtuellement épuisé.

Passons au type ( $\beta$ ). Les équations à résoudre sont

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} (r - r_1) \left( \xi \frac{\partial \eta}{\partial v} - \eta \frac{\partial \xi}{\partial v} \right) + (v - v_1) \frac{\partial \zeta}{\partial v} = 0, \\ (r^2 - r_1^2) (\xi^2 + \eta^2) + (v^2 - v_1^2) \\ + 2(r - r_1) \left[ \mu \xi - \lambda \eta - (p \xi + q \eta) \zeta + \xi \frac{\partial \eta}{\partial t} - \eta \frac{\partial \xi}{\partial t} \right] \\ + 2(v - v_1) \left( p \eta - q \xi + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) = 0 \end{array} \right.$$

quand on suppose simplement  $p = p_1$ ,  $q = q_1$ ,  $\lambda = \lambda_1$ ,  $\mu = \mu_1$ ; c'est la forme de cette dernière équation qui montre l'avantage des conditions  $r + r_1 = 0$ ,  $v + v_1 = 0$  de façon à n'avoir que le système réduit

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} r \left( \xi \frac{\partial \eta}{\partial v} - \eta \frac{\partial \xi}{\partial v} \right) + v \frac{\partial \zeta}{\partial v} = 0. \\ r \left[ \mu \xi - \lambda \eta - (p \xi + q \eta) \zeta + \xi \frac{\partial \eta}{\partial t} - \eta \frac{\partial \xi}{\partial t} \right] \\ + v \left( p \eta - q \xi + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Nous voyons que la détermination de tous les couples de surfaces  $S, S_1$  applicables possédant une famille de courbes homologues *égales* revient à la détermination des fonctions  $\lambda, \mu, \nu, p, q, r$  de la seule variable  $t$  et des fonctions  $\xi(t, v), \eta(t, v), \zeta(t, v)$  liées par les équations (24); il faut ensuite intégrer les deux équations de Riccati et effectuer les six quadratures correspondant aux mouvements de caractéristiques  $(p, q, r, \lambda, \mu, \nu)$  et  $(p, q, -r, \lambda, \mu, -\nu)$ . On peut alléger ces opérations en se donnant les douze fonctions  $x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$  qui figurent dans les relations (14) de façon à n'avoir plus que l'équation de Riccati et les trois quadratures

concernant le mouvement  $(p, q, -r, \lambda, \mu, -\nu)$ . En tout cas on remarquera que dans les équations (24) ne figurent que les rapports mutuels de  $p, q, r, \lambda, \mu, \nu$  : multiplier ces fonctions par une même fonction de  $t$  n'altère pas les trajectoires *géométriques*, mais revient à changer la loi des vitesses, chose indifférente au point de vue des couples  $S, S_1$ . Maintenant il est clair, puisque les courbes  $F$  ne sont pas planes, que l'on peut passer des coordonnées  $\xi, \eta, \zeta$  aux coordonnées semi-polaires  $\rho, \omega, \zeta$  par les formules

$$(25) \quad \xi = \rho(t, \omega) \cos \omega, \quad \eta = \rho(t, \omega) \sin \omega \quad \zeta = \zeta(t, \omega)$$

et prendre comme variables indépendantes  $t, \omega$  ;  $\omega$  joue donc le rôle de la variable  $\nu$  restée jusqu'ici sans être précisée. L'emploi de ces coordonnées semi-polaires s'impose d'autre part par la remarque faite déjà, qu'augmenter tous les  $\zeta$  d'une constante ou tous les  $\omega$  d'une constante est indifférent pour  $\Sigma$  et le couple  $S, S_1$ . La première équation (24) est remplacée par

$$(26) \quad \rho^2 = -\frac{\nu}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \omega},$$

de sorte que tout est ramené au calcul de  $\zeta$ . On va constater qu'il est commode de faire un changement de variable indépendante sur  $\omega$  seul et de poser

$$(27) \quad \nu = \text{tang } \omega, \quad \frac{d\omega}{d\nu} = \cos^2 \omega,$$

on a

$$(28) \quad \xi = \rho \cos \omega = \sqrt{-\frac{\nu}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \nu}}, \quad \eta = \rho \sin \omega = \nu \sqrt{\frac{-\nu}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \nu}}$$

et la seconde équation (24) devient, en se rappelant

que  $\omega$  et  $t$  sont variables indépendantes,

$$(E) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \sqrt{\frac{\partial \zeta}{\partial v}} [\alpha + \beta v - \zeta(\gamma + \delta v)]$$

avec

$$(29) \quad \begin{cases} \alpha = \left(q - \frac{r}{v} \mu\right) \sqrt{\frac{-v}{r}}, & \gamma = -\frac{pr}{v} \sqrt{\frac{-v}{r}}, \\ \beta = \left(\frac{r}{v} \lambda - p\right) \sqrt{\frac{-v}{r}}, & \delta = -\frac{qr}{v} \sqrt{\frac{-v}{r}}, \end{cases}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sont quatre fonctions de  $t$  seul : elles sont réelles toutes ou toutes imaginaires pures. Il est facile de voir que l'équation (E) admet une intégrale complète de la forme

$$(30) \quad \zeta = \frac{a + bv}{c + dv},$$

où  $a, b, c, d$  sont quatre fonctions de  $t$  seul ; les rapports mutuels de  $a, b, c, d$  intervenant seuls, nous pouvons supposer  $bc - ad = 1$ , de sorte que  $a, b, c, d$  soient réelles ou toutes imaginaires pures. On a en effet

$$(30) \quad \begin{cases} \frac{\partial \zeta}{\partial v} = \frac{1}{(c + dv)^2}, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{ca' - ac' + v(da' + cb' - b\delta' - ad') + v^2(db' - bd')}{(c + dv)^2} \end{cases}$$

et l'on est ramené à évaluer deux trinomes du second degré en  $v$ , d'où

$$(E_1) \quad \begin{cases} ca' - ac' = ac - a\gamma, \\ da' + cb' - bc' - ad' = \alpha d + \beta c - a\delta - b\gamma, \\ db' - bd' = \beta d - b\delta, \\ bc - ad = 1. \end{cases}$$

Les trois premières équations (E<sub>1</sub>) s'écrivent

$$(31) \quad \frac{a' - \alpha}{a} = \frac{c' - \gamma}{c} = \frac{b' - \beta}{b} = \frac{d' - \delta}{d}.$$

La valeur commune de ces rapports s'obtient immédiatement en dérivant la dernière équation (E<sub>1</sub>) et remplaçant ensuite  $a', b', c', d'$  par  $\alpha + Ka, \beta + Kb, \gamma + Kc, \delta + Kd$ . On a ainsi finalement à intégrer le système différentiel ordinaire à quatre fonctions inconnues  $a, b, c, d$  de  $t$

$$(E_2) \quad \begin{cases} a' = \alpha + \frac{a}{2}(a\delta + \alpha d - b\gamma - \beta c), \\ b' = \beta + \frac{b}{2}(a\delta + \alpha d - b\gamma - \beta c), \\ c' = \gamma + \frac{c}{2}(a\delta + \alpha d - b\gamma - \beta c), \\ d' = \delta + \frac{d}{2}(a\delta + \alpha d - b\gamma - \beta c), \end{cases}$$

dont on ne prend que les solutions à *trois* paramètres satisfaisant à  $bc - ad = 1$ . Donnant à l'un des paramètres une valeur numérique, on a l'intégrale complète de (E) qui permet l'intégration finale définitive par les méthodes classiques. L'intégrale complète ainsi obtenue donne une surface réglée  $\Sigma$  : car

$$\rho^2 = -\frac{v}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \omega} = -\frac{v}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial v} \frac{1}{\cos^2 \omega},$$

d'où

$$(32) \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{\frac{-v}{r}} \frac{1}{c \cos \omega + d \sin \omega}, \\ \zeta = \frac{a \cos \omega + b \sin \omega}{c \cos \omega + d \sin \omega}, \end{cases}$$

équations que l'on peut remplacer évidemment par

$$(33) \quad \begin{cases} \zeta = \sqrt{\frac{-r}{v}} (a\xi + b\eta), \\ c\xi + d\eta = \sqrt{\frac{-v}{r}}, \end{cases}$$

La courbe  $t = \text{const.}$  sur  $\Sigma$  est donc une droite

(appartenant au complexe correspondant) : l'intégrale complète en question donne donc trois surfaces particulières associées  $S$ ,  $S_1$  et  $\Sigma$  qui sont réglées.

Il reste maintenant à démontrer que la surface  $\Sigma$  intégrale de (E) ne peut admettre les courbes  $F$ , supposées gauches, pour asymptotiques. L'équation

$$\xi \frac{\partial \eta}{\partial \omega} - \eta \frac{\partial \xi}{\partial \omega} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \omega} = 0$$

jointe à sa dérivée par rapport à  $\omega$

$$\xi \frac{\partial^2 \eta}{\partial \omega^2} - \eta \frac{\partial^2 \xi}{\partial \omega^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \omega^2} = 0$$

exprime que le plan des deux vecteurs de direction distincte

$$\left( \frac{\partial \xi}{\partial \omega}, \frac{\partial \eta}{\partial \omega}, \frac{\partial \zeta}{\partial \omega} \right) \quad \text{et} \quad \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial \omega^2}, \frac{\partial^2 \eta}{\partial \omega^2}, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \omega^2} \right)$$

admet pour normale la droite de paramètre  $\left( -\eta, \xi, \frac{\nu}{r} \right)$ . Ce plan est le plan osculateur de la courbe gauche  $F$ , nous n'avons fait que retrouver cette proposition classique que le plan osculateur de la courbe du complexe linéaire est en même temps plan focal du point d'osculation. Si  $F$  est asymptotique, ce plan, étant tangent à  $\Sigma$ , contient aussi l'autre tangente  $\left( \frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial \eta}{\partial t}, \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)$  de sorte que

$$\xi \frac{\partial \eta}{\partial t} - \eta \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0,$$

et comme on a déjà remarqué que

$$\xi \frac{\partial \eta}{\partial t} - \eta \frac{\partial \xi}{\partial t} = \rho^2 \frac{\partial \omega}{\partial t} \equiv 0,$$

on a simplement  $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$ , donc  $\zeta$  ne dépend que de  $\omega$ , la

surface  $\Sigma$  est donc un conoïde droit d'axe  $I\xi$  et les courbes  $F$  doivent donc être les asymptotiques autres que les génératrices horizontales de  $\Sigma$ ; l'équation (E), que nous avons étudiée, devrait donc admettre une intégrale satisfaisant à  $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$  et puisque  $\frac{\partial \zeta}{\partial v}$  ne saurait être nulle en même temps (sinon  $\Sigma$  serait plane, les courbes  $F$  et  $F_1$  planes aussi, ce qui a été vu impossible), il faut que  $\zeta = \frac{\alpha + \beta v}{\gamma + \delta v}$ , cette dernière fraction étant indépendante de  $t$ , ce qui exige que les rapports mutuels de  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  soient indépendants de  $t$ ; remplaçons donc  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  par les constantes proportionnelles  $A, B, C, D$  et  $v$  par  $\frac{\eta}{\xi}$ : l'équation de la surface devient

$$\zeta = \frac{A\xi + B\eta}{C\xi + D\eta}.$$

C'est celle d'un paraboloidé équilatère, mais alors  $F$  serait encore rectiligne. Il y a donc contradiction. Ceci conduit aussi à étudier spécialement le cas où  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sont proportionnels à des constantes (donc constants en faisant un changement de variable sur  $t$ ), mais ceci nous entraînerait trop loin.

## CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1<sup>o</sup> Intégrer le système d'équations différentielles :

$$\frac{dy}{dt} - 4x + 4a \cos 2t = 0,$$

$$\frac{dx}{dt} + 4y - 4a \sin 2t = 0.$$

2° Trouver le système de solution tel que

$$x = a, \quad y = 0 \quad (\text{pour } t = 0).$$

3° Cette solution représente les équations paramétriques d'une courbe; former l'équation de sa tangente.

4° Conditions pour que deux tangentes soient perpendiculaires. Montrer qu'il y a trois tangentes perpendiculaires à une tangente donnée.

5° Lieu des points d'intersection de deux tangentes perpendiculaires. Montrer qu'il est formé de deux courbes distinctes.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION :

$$1^{\circ} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + 16x = 24a \cos 2t.$$

$$x = C \cos 4t + C' \sin 4t + 2a \cos 2t,$$

$$y = a \sin 2t - \frac{1}{4} \frac{dx}{dt} = C \sin 4t - C' \cos 4t + 2a \sin 2t.$$

$$2^{\circ} \quad C = -a, \quad C' = 0.$$

$$x = a(2 \cos 2t - \cos 4t) = a + 2a(1 - \cos 2t) \cos 2t,$$

$$y = a(2 \sin 2t - \sin 4t) = 2a(1 - \cos 2t) \sin 2t.$$

Si l'on transporte l'origine au point  $(a, 0)$ , on a, en coordonnées polaires :

$$\theta = 2t, \quad \rho = 2a(1 - \cos \theta);$$

cardioïde, conchoïde du cercle

$$\rho = -2a \cos \theta.$$

$$3^{\circ} \quad x' = 4a(\sin 4t - \sin 2t) = 8a \sin t \cos 3t,$$

$$y' = 4a(\cos 2t - \cos 4t) = 8a \sin t \sin 3t;$$

tangente :

$$X \sin 3t - Y \cos 3t = x \sin 3t - y \cos 3t = 3a \sin t.$$

4° Deux tangentes sont perpendiculaires si

$$\text{tang } 3t \text{ tang } 3t' = -1, \quad \cos 3(t' - t) = 0,$$

$$t' - t = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}.$$

Mais  $t$  et  $t + \pi$  donnent le même point  $(x, y)$ . Trois solutions distinctes :

$$t' = t \pm \frac{\pi}{6}, \quad t' = t + \frac{\pi}{2}.$$

5° Intersection de deux tangentes :

$$x \sin 3(t' - t) = 3a \sin(t' - t) [1 + 4 \sin t \sin t' \cos(t' + t)],$$

$$y \sin 3(t' - t) = 12a \sin(t' - t) \sin t \sin t' \sin(t' + t).$$

$$\text{Si } t' = t + \frac{\pi}{2},$$

$$x = -3a + 6a \sin^2 2t = -3a \cos 4t,$$

$$y = 6a \sin 2t \cos 2t = 3a \sin 4t$$

(cercle).

$$\text{Si } t' = t \pm \frac{\pi}{6}, \text{ soit } t' + t = \theta,$$

$$x = \frac{3}{2} a (1 + \sqrt{3} \cos \theta - 2 \cos^2 \theta),$$

$$y = \frac{3}{2} a (\sqrt{3} - 2 \cos \theta) \sin \theta.$$

Si l'on transporte l'origine au point  $(\frac{3}{2}a, 0)$ , on a, en coordonnées polaires,

$$\rho = \frac{3}{2} a [\sqrt{3} - 2 \cos \theta].$$

Limaçon de Pascal, conchoïde du cercle

$$\rho = -3a \cos \theta.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$y' \cos x + 3y \sin x = 4 \sin x + 2 \sin^3 x.$$

1° *Montrer que toutes les courbes intégrales passent par des points fixes, et ont, en ces points, leur centre de courbure fixe.*

2° *Trouver l'intégrale particulière qui prend la valeur  $y = 1$ , pour  $x = \pi$ . Construire la courbe représentative.*

3° *Calculer l'abscisse positive du premier point de rencontre de cette courbe avec  $Ox$ .*

INDICATIONS SUR LA SOLUTION :

$$y = 2 \sin^2 x + C \cos^3 x.$$

1° Cette courbe passe par les points (indépendants de C) :

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad y = 2, \quad y' = 0, \quad y'' = -4;$$

centre de courbure :

$$X = x - y' \frac{1+y'^2}{y''} = x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

$$Y = y + \frac{1+y'^2}{y''} = \frac{7}{4}.$$

$$2^\circ \quad C = -1, \quad y = 2 - 2 \cos^2 x - \cos^3 x, \\ y' = \sin x \cos x (4 + 3 \cos x).$$

Les droites  $x = k\pi$  sont des axes de symétrie. Aux points(0, -1),  $(\frac{\pi}{2}, 2)$ ,  $(\pi, 1)$ , la tangente est parallèle à O.x.

$$3^\circ \quad \cos x = X; \quad f(X) = X^3 + 2X^2 - 2 = 0.$$

X a une seule valeur réelle, positive, entre 0 et 1 :

$$f'(X) = 3X^2 + 4X, \quad f''(X) = 6X + 4.$$

La méthode de Newton donne :

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = 7, \quad f''(1) = 10;$$

$$-h = \frac{f}{f'} = \frac{1}{7} = 0,142, \quad \frac{h^2}{2} \frac{f''}{f'} = 0,014;$$

$$X = 1 - 0,14 = 0,86 \quad (\text{approximation } 0,01);$$

$$f(0,85) = 0,059125, \quad f'(0,85) = 5,5675,$$

$$f''(0,85) = 9,1;$$

$$-h = \frac{f}{f'} = 0,01062, \quad \frac{h^2}{2} \frac{f''}{f'} = 0,000092;$$

$$X = \cos x = 0,85 - 0,0107 = 0,8393;$$

$$x = 32^\circ 56' = 0,575.$$

(Marseille, juin 1924.)

[E1]

## SUR LA FONCTION EULÉRIENNE ;

PAR J. HAAG.

La fonction eulérienne de seconde espèce est une des transcendantes qui ont suscité le plus de travaux. Ses élégantes propriétés sont devenues classiques et nous n'avons nullement la prétention d'en découvrir de nouvelles. L'article qui va suivre a seulement pour but de rassembler les plus connues, en les développant suivant une méthode que nous croyons originale et particulièrement simple. Cette méthode fait d'ailleurs appel aux théories les plus diverses de l'Analyse et paraît devoir constituer, à ce titre, un excellent exercice pour la plupart des lecteurs de ce journal.

1. Prenons comme définition la formule bien connue (1)

$$(1) \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (x > 0).$$

Nous allons démontrer la formule suivante (2), qui sera notre *formule fondamentale* :

$$(2) \quad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -C + \int_0^1 \frac{1-t^{x-1}}{1-t} dt,$$

C désignant la *constante d'Euler*.

(1) Cf. GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, t. I, p. 206.

(2) Cette formule est également connue. (Cf. N. NIELSEN, *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, Leipzig, 1906, p. 170). Toutefois, elle est généralement peu utilisée. En outre, on ne l'établit pas dans  
*Ann. de Mathémat.*, 5<sup>e</sup> série, t. III. (Janvier 1925.)

La dérivée qu'il s'agit de calculer peut être considérée comme étant la limite, pour  $y = 0$ , de l'expression

$$(3) \quad \frac{\Gamma(x+y) - \Gamma(x)}{y \Gamma(x+y)} = \frac{1}{y} - \frac{B(x, y)}{y \Gamma(y)} \\ = \frac{1}{y} - B(x, y) + B(x, y) \left[ 1 - \frac{1}{y \Gamma(y)} \right],$$

en introduisant la fonction eulérienne de première espèce (1)

$$(4) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

Or, on a

$$\frac{1}{y} = \int_0^1 (1-t)^{y-1} dt;$$

d'où

$$\frac{1}{y} - B(x, y) = \int_0^1 \frac{1 - t^{x-1}}{(1-t)^{1-y}} dt$$

dont la limite, pour  $y = 0$ , est précisément l'intégrale (2) de la formule (2).

Quant au troisième terme de (3), il peut s'écrire, en utilisant de nouveau la formule (4),

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+y)} \frac{y \Gamma(y) - 1}{y}.$$

Le premier facteur tend vers 1. Le second est égal à  $\frac{\Gamma(1+y) - \Gamma(1)}{y}$ . Il tend donc vers la dérivée  $\Gamma'(1)$ ,

blit pas directement, mais comme conséquence de la formule (7) qui va suivre.

(1) Cf. GOURSAT, *loc. cit.*, p. 315.

(2) La fonction sous le signe  $f$  est discontinue par rapport à  $y$  pour  $t = 1$ ,  $y = 0$ , car, pour  $t = 1$ , sa valeur est  $x - 1$ , si  $y = 0$  et zéro, si  $y > 0$ . L'intégrale est néanmoins continue, parce que la fonction est uniformément bornée dans le voisinage des valeurs considérées. Elle est, en effet, majorée par la fonction  $\frac{|1 - t^{x-1}|}{1-t}$ , qui reste finie pour  $t = 1$ .

c'est-à-dire vers (1)

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \log t \, dt = -C. \quad (2)$$

Finalement, la formule (2) est démontrée.

Nous allons maintenant en tirer les conséquences.

## 2. Nous avons d'abord

$$(6) \quad \frac{1-t^{x-1}}{1-t} = \sum_{n=0}^{p-1} (t^n - t^{n+x-1}) + \frac{t^p(1-t^{x-1})}{1-t}.$$

Si l'on intègre entre 0 et 1, l'intégrale du dernier terme est inférieure à  $\frac{M}{p}$ ,  $M$  désignant une limite supérieure de la fonction  $\frac{t-t^x}{1-t}$ , qui est finie pour toutes les valeurs de l'intervalle d'intégration. Lorsque  $p$  augmente indéfiniment, cette intégrale tend vers zéro. On a donc

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} &= -C + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x} \right) \\ &= -C + (x-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+x)}, \end{aligned}$$

ce qui est une formule bien connue (3).

(1) D'une manière générale, on a

$$(5) \quad \Gamma'(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} \log t \, dt.$$

La différentiation sous le signe  $\int$  est permise, parce que l'intégrale (5) est uniformément convergente par rapport à ses deux bornes. La fonction sous le signe  $\int$  est, en effet, comprise, pour  $a < x < b$  et, quel que soit  $t$ , entre les fonctions  $e^{-t} t^{a-1} \log t$  et  $e^{-t} t^{b-1} \log t$ , lesquelles font converger l'intégrale.

(2) Cf. HERMITE, *Cours autographié de la Faculté des Sciences de Paris*, p. 93. Cette formule peut servir de définition à la constante d'Euler.

(3) Cf. HERMITE, *loc. cit.*

En changeant  $x$  en  $x + 1$  et intégrant de 0 à  $x$ , après avoir remarqué que la série du troisième membre est majorée par la série de terme général  $\frac{1}{(n+1)^2}$ , on obtient (1)

$$(8) \quad \log \frac{1}{\Gamma(x+1)} = Cx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \log \left( 1 + \frac{x}{n} \right) - \frac{x}{n} \right];$$

d'où

$$(9) \quad \frac{1}{\Gamma(x+1)} = e^{Cx} \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{x}{n} \right) e^{-\frac{x}{n}}.$$

Si l'on fait  $x = 1$  dans la formule (8), en se souvenant que  $\Gamma(2) = 1$ , il vient

$$C = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n} - \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n} - \log(n+1) + \log n \right]$$

ou

$$C = \lim_{n=\infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right);$$

on retrouve la définition bien connue de la constante d'Euler. Portant cette valeur dans (9), il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(x+1)} &= \lim_{n=\infty} \frac{(1+x) \left( 1 + \frac{x}{2} \right) \dots \left( 1 + \frac{x}{n} \right)}{n^x} \\ &= \lim_{n=\infty} \frac{(1+x)(2+x)\dots(n+x)}{n! n^x}. \end{aligned}$$

En changeant  $x$  en  $x - 1$ ,  $n$  en  $n + 1$  et remarquant que  $\frac{n^x}{(n+1)^x}$  tend vers 1, on retrouve la formule de

(1) Cf. HERMITE, *loc. cit.*, p. 93.

Gauss (1) :

$$(10) \quad \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}.$$

3. Nous allons maintenant établir la formule (2)

$$(11) \quad \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad (0 < x < 1).$$

Cherchons à évaluer la dérivée logarithmique du premier membre, soit

$$X = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{\Gamma'(1-x)}{\Gamma(1-x)}.$$

D'après la formule (2), on a

$$X = \int_0^1 \frac{t^{-x} - t^{x-1}}{1-t} dt.$$

Posons

$$t = e^{-2z}, \quad 2x - 1 = u;$$

il vient

$$\begin{aligned} X &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{uz} - e^{-uz}}{e^z - e^{-z}} dz \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{\text{sh } uz}{\text{sh } z} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sh } uz}{\text{sh } z} dz. \end{aligned}$$

Pour calculer cette dernière intégrale, nous allons appliquer la méthode des résidus. Les pôles de la fonction sous le signe  $\int$  sont  $z = ik\pi$ ,  $k$  étant un entier non nul. Intégrons le long du rectangle ABCD, dont les côtés sont définis par

$$AB : z = ai; \quad DC : z = bi; \quad BC : x = R; \quad AD : x = -R.$$

(1) Cf. HERMITE, *loc. cit.*, p. 91. Voir aussi BOREL, *Leçons sur la théorie de la croissance*, p. 91.

(2) Cf. GOURSAT, *loc. cit.*, p. 315.

Le long de BC et le long de DA, on a

$$\left| \frac{\operatorname{sh} uz}{\operatorname{sh} z} \right| < \frac{e^{uR} + e^{-uR}}{e^R - e^{-R}}.$$

La somme des deux intégrales correspondantes est donc inférieure, en module, à

$$2(b-a) \frac{e^{uR} + e^{-uR}}{e^R - e^{-R}}.$$

Comme  $-1 < u < 1$ , cette quantité tend vers zéro quand R croît indéfiniment. Il en est donc de même des intégrales le long de BC et de DA. Il s'ensuit que, si l'on pose

$$\begin{aligned} f(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} u(t+iy)}{\operatorname{sh}(t+iy)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} ut \cos uy + i \operatorname{ch} ut \sin uy}{\operatorname{sh} t \cos y + i \operatorname{ch} t \sin y} dt, \end{aligned}$$

on a, en supposant  $a < b$ ,

$$f(a) - f(b) = 2\pi i \Sigma R,$$

$\Sigma R$  désignant la somme des résidus relatifs aux pôles compris entre les deux droites  $z = ai$ ,  $z = bi$ .

Prenons d'abord  $a = 0$ ,  $b = \frac{\pi}{2}$ ; nous avons

$$(12) \quad X = f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Prenons maintenant  $a = \frac{\pi}{2}$ ,  $b = \frac{3\pi}{2}$ ; il vient

$$(13) \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2\pi i \frac{\operatorname{sh} iu\pi}{\operatorname{ch} i\pi} = 2\pi \sin \pi u.$$

Or

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} ut \cos u \frac{\pi}{2} + i \operatorname{ch} ut \sin u \frac{\pi}{2}}{i \operatorname{ch} t} dt \\
 &= \sin u \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} ut}{\operatorname{ch} t} dt, \\
 f\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= -\sin \frac{3u\pi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} ut}{\operatorname{ch} t} dt = -f\left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{\sin \frac{3u\pi}{2}}{\sin \frac{u\pi}{2}}.
 \end{aligned}$$

En portant dans (13), on obtient, par un calcul simple,

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi \operatorname{tang} \frac{u\pi}{2};$$

d'où (1)

$$(14) \quad X = \pi \operatorname{tang} \frac{u\pi}{2} = -\pi \cot \pi x.$$

Intégrons :

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{A}{\sin \pi x}.$$

Pour avoir la constante A, cherchons la limite de  $x\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \Gamma(1+x)\Gamma(1-x)$ , lorsque  $x$  tend vers zéro. Cette limite est, d'une part,  $\Gamma(1)\Gamma(1) = 1$ ; d'autre part,  $\frac{A}{\pi}$ . Donc,  $A = \pi$  et nous retrouvons bien la formule (11).

*Remarque.* — On peut aussi calculer X au moyen

(1) Cette formule peut être obtenue comme cas particulier d'une formule plus générale établie par Hermite (*loc. cit.*, p. 115), par une méthode qui revient, au fond, à celle que nous venons de suivre.

de la formule (7) :

$$\begin{aligned} X &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n+1-x} - \frac{1}{n+x} \right) \\ &= -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right) = -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2-x^2}. \end{aligned}$$

En comparant avec (14), on retrouve le développement bien connu de  $\pi \cot \pi x$  (1).

4. Démontrons encore la formule (2)

$$(15) \quad \frac{\Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(x + \frac{2}{n}\right) \dots \Gamma\left(x + \frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(nx)} \\ = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}-x}.$$

Si nous appelons  $X$  le premier membre, nous avons

$$\frac{X'}{X} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{\Gamma'\left(x + \frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(x + \frac{1}{n}\right)} + \dots + \frac{\Gamma'\left(x + \frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma\left(x + \frac{n-1}{n}\right)} - n \frac{\Gamma'(nx)}{\Gamma(nx)},$$

ou, en appliquant la formule (2),

$$\begin{aligned} \frac{X'}{X} &= \int_0^1 \frac{n t^{nx-1} - t^{x-1} \left( 1 + t^{\frac{1}{n}} + t^{\frac{2}{n}} + \dots + t^{\frac{n-1}{n}} \right)}{1-t} dt \\ &= \int_0^1 \left( \frac{n t^{nx-1}}{1-t} - \frac{t^{x-1}}{1-t^{\frac{1}{n}}} \right) dt. \end{aligned}$$

Faisons le changement de variables

$$t = e^{-2nz}, \quad 1 - 2nx = y;$$

(1) Cf. GOURSAT, *loc. cit.*, t. II, p. 174.

(2) Cf. HERMITE, *loc. cit.*, p. 97.

il vient

$$(16) \quad Y = \frac{X'}{X} = n \int_0^{+\infty} \left( \frac{n e^{nyz}}{\operatorname{sh} nz} - \frac{e^{yz}}{\operatorname{sh} z} \right) dz.$$

Dérivons par rapport à  $y$  :

$$(17) \quad Y' = n \int_0^{+\infty} \left( \frac{n^2 z e^{nyz}}{\operatorname{sh} nz} - \frac{z e^{yz}}{\operatorname{sh} z} \right) dz.$$

Cette dérivation est permise, car l'intégrale (17) est uniformément convergente pour  $y < a < 1$  (1). En effet, la fonction sous le signe  $\int$  est majorée par  $\frac{n^2 z e^{naz}}{\operatorname{sh} nz} + \frac{z e^{az}}{\operatorname{sh} z}$ , dont l'intégrale est convergente.

La formule (17) peut maintenant s'écrire

$$\frac{Y'}{n} = \int_0^{+\infty} \frac{n^2 z e^{nyz}}{\operatorname{sh} nz} dz - \int_0^{+\infty} \frac{z e^{yz}}{\operatorname{sh} z} dz.$$

La première intégrale égale la seconde, comme on s'en rend compte en faisant le changement de variable :  $nz = t$ . Donc,

$$Y' = 0, \quad Y = \text{const.}$$

Pour déterminer cette constante, faisons  $y = 0$  dans (16) ; il vient

$$\frac{Y}{n} = \int_0^{+\infty} \left( \frac{n}{\operatorname{sh} nz} - \frac{1}{\operatorname{sh} z} \right) dz = - \lim_{z=0} \left( \log \frac{\operatorname{th} \frac{nz}{2}}{\operatorname{th} \frac{z}{2}} \right) = - \log n.$$

Nous avons donc

$$\frac{X'}{X} = -n \log n;$$

d'où, en intégrant,

$$(18) \quad X = A n^{-nx}.$$

(1) Cette inégalité résulte de ce que  $x$  doit toujours être supposé positif.

Pour déterminer la constante A, supposons que  $x$  tende vers zéro. Nous avons, en remarquant que

$$\lim \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(nx)} = n \lim \frac{x \Gamma(x)}{nx \Gamma(nx)} = n \lim \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(nx+1)} = n,$$

$$A = n \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

Renversons l'ordre des facteurs et multiplions membre à membre ; il vient, en utilisant la formule (11),

$$A^2 = \frac{n^2 \pi^{n-1}}{\sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{n}}.$$

Le produit du dénominateur se calcule aisément, en considérant le produit des racines de l'équation qui donne  $\sin \frac{a}{2n}$ , connaissant  $\cos a = 1$ . On trouve finalement

$$A = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}}.$$

En portant dans (18), on obtient bien la formule (15).

§. Nous allons maintenant établir la *formule asymptotique* donnant  $\Gamma(x)$  pour les grandes valeurs de  $x$ .

Nous partons toujours de la formule (2), que nous écrivons, en faisant le changement de variable  $t = e^{-z}$ ,

$$(19) \quad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -C + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-z} - e^{-zx}}{1 - e^{-z}} dz.$$

Développons  $\frac{z}{1 - e^{-z}}$  suivant les puissances croissantes de  $z$ . On pourrait employer, à cet effet, la formule de Mac Laurin, sous sa forme élémentaire classique. Mais, pour avoir une limite supérieure du reste, il est

plus avantageux d'utiliser la méthode bien connue de l'intégrale de Cauchy. Considérons l'intégrale

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{z dz}{(1 - e^{-z})(z - x)},$$

prise le long du rectangle ABCD, dont les côtés sont définis par

$$BC : z = a; \quad AD : z = -a; \quad DC : z = ib; \quad AB : z = -ib;$$

$a$  et  $b$  étant deux nombres positifs, dont le premier est plus grand que  $x$  et le second plus petit que  $2\pi$ . La fonction sous le signe  $\int$  n'admet que le pôle  $z = x$  dans ce rectangle. Donc

$$I = \frac{x}{1 - e^{-x}}.$$

D'autre part, on peut écrire

$$(20) \quad I = \sum_{p=0}^m \frac{x^p}{2\pi i} \int \frac{dz}{(1 - e^{-z})z^p} + \frac{x^{m+1}}{2\pi i} \int \frac{dz}{(1 - e^{-z})z^m(z - x)}.$$

Le coefficient de  $x^p$  peut être calculé en remplaçant le chemin d'intégration par une circonférence infiniment petite de centre O. C'est donc le coefficient de  $x^p$  dans le développement de  $I$  en série entière. Ce développement, valable pour  $|x| < 2\pi$ , s'exprime au moyen des nombres de Bernoulli <sup>(1)</sup>; de sorte qu'en prenant  $m = 2n + 1$ , nous pouvons écrire (20) sous la forme

$$(21) \quad \frac{x}{1 - e^{-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{p=1}^n (-1)^{p-1} B_p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + R_n,$$

(<sup>1</sup>) Cf. HERMITE, *loc. cit.*, p. 98.

en posant

$$(22) \quad R_n = \frac{x^{2n+2}}{2\pi i} \int \frac{dz}{(1-e^{-z}) z^{2n+1} (z-x)} = x^{2n+2} I_n.$$

Il serait aisé de déduire directement de cette formule une limite supérieure de  $|I_n|$ . Mais, il est plus avantageux d'évaluer cette intégrale par la méthode des résidus. Si l'on intègre le long d'un autre rectangle  $A'B'C'D'$ , correspondant à des valeurs plus grandes de  $a$  et de  $b$ , on obtient une nouvelle intégrale telle que  $I'_n - I_n$  égale la somme des résidus relatifs aux pôles compris entre les deux rectangles. Ces pôles sont  $2k\pi i$ ,  $k$  représentant l'un quelconque des nombres entiers non nuls compris entre  $-\frac{b'}{2\pi}$  et  $\frac{b'}{2\pi}$ .

D'autre part, le module de la fonction  $\psi$  sous le signe  $\int$  est bornée supérieurement, sur  $B'C'$ , par  $\frac{1}{(1-e^{-a'}) a'^{2n+1} (a'-x)}$ . L'intégrale le long de  $B'C'$  a donc un module inférieur à  $\frac{2b'}{(1-e^{-a'}) a'^{2n+1} (a'-x)}$ . Il s'ensuit qu'elle tend vers zéro quand  $a'$  augmente indéfiniment. Il en est de même de l'intégrale le long de  $D'A'$ . On peut donc remplacer le rectangle  $A'B'C'D'$  par les deux droites indéfinies  $A'B'$  et  $C'D'$ .

Prenons maintenant  $b'$  tel que  $\frac{b'}{\pi}$  soit un nombre entier impair. Pour  $z = \pm ib' + t$ , on a

$$|\psi| = \frac{1}{(1+e^{-t})(t^2+b'^2)^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{b'^2+(t-x)^2}}$$

$$< \frac{1}{b'(t^2+b'^2)^{n+\frac{1}{2}}}$$

Les intégrales le long de  $A'B'$  et de  $C'D'$  ont donc

des modules inférieurs à

$$\frac{2}{b'} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2 + b'^2)^{n + \frac{1}{2}}} = \frac{2}{b'^{2n+1}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{(u^2 + 1)^{n + \frac{1}{2}}}.$$

Elles tendent vers zéro quand  $b'$  croît indéfiniment.

En définitive,  $-I_n$  est égal à la somme de la série formée par les résidus  $A_k$  des pôles  $2k\pi i$ . Or, on a

$$A_k = \frac{1}{(2k\pi i)^{2n+1}(2k\pi i - x)},$$

$$A_k + A_{-k} = (-1)^n \frac{-2}{(2k\pi)^{2n}(4k^2\pi^2 + x^2)}.$$

Donc,

$$(23) \quad I_n = 2(-1)^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k\pi)^{2n}(4k^2\pi^2 + x^2)}.$$

Lorsque  $x$  croît de 0 à  $+\infty$ ,  $I_n$  varie toujours dans le même sens.

Pour  $x = 0$ , la formule (22) montre que (1)

$$I_n = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{(2n+2)!}.$$

Pour  $x = +\infty$ , on a  $I_n = 0$ . Donc, si  $x$  a une valeur positive quelconque, on a (2)

$$(24) \quad R_n = (-1)^n \frac{\theta B_{n+1}}{(2n+2)!} x^{2n+2},$$

$\theta$  désignant un nombre compris entre 0 et 1.

(1) En comparant avec ce que donne la formule (23), on obtient la formule bien connue

$$(25) \quad S_{2n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{2^{2n-1} \pi^{2n}}{(2n)!} B_n.$$

(2) L'analyse qui précède ne diffère pas essentiellement de celle d'Hermite (*loc. cit.*, p. 105).

La limite supérieure  $\frac{B_{n+1}}{(2n+2)!}$ , que nous venons d'obtenir pour  $|I_n|$ , est certainement la plus avantageuse qui soit indépendante de  $x$ , puisqu'elle est effectivement atteinte lorsque  $x$  tend vers zéro.

6. Portons maintenant (21) dans (19); il vient

$$(26) \quad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -C + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-z} - e^{-zx}}{z} dz + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-z}}{z} \left( \frac{z}{1-e^{-z}} - 1 \right) dz \\ - \int_0^{+\infty} e^{-zx} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^n (-1)^{p-1} B_p \frac{z^{2p-1}}{(2p)!} + \frac{1}{z} R_n(z) \right] dz.$$

Pour calculer la première intégrale, prenons sa dérivée par rapport à  $x$ ; cette dérivée est (1)

$$\int_0^{+\infty} e^{-zx} dz = \frac{1}{x}.$$

Donc l'intégrale en question est égale à  $\log x$ , puisque, d'autre part, elle est nulle pour  $x = 1$ .

La deuxième intégrale est indépendante de  $x$ . Désignons-la par  $A + C$ .

Nous avons, en faisant le changement de variable  $zx = t$  dans la troisième intégrale,

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = A + \log x - \int_0^{+\infty} e^{-t} \left[ \frac{1}{2x} + \sum_{p=1}^n (-1)^{p-1} \frac{B_p}{(2p)!} \frac{t^{2p-1}}{x^{2p}} + \frac{1}{t} R_n\left(\frac{t}{x}\right) \right] dt,$$

$$(27) \quad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = A + \log x - \frac{1}{2x} - \sum_{p=1}^n (-1)^{p-1} \frac{B_p}{2p x^{2p}} - \rho_n(x),$$

---

(1) L'intégrale obtenue est uniformément convergente, car  $e^{-zx}$  est majorée par  $e^{-\alpha}$ , si  $x < \alpha$ .

en posant (1)

$$(28) \quad \rho_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} R_n\left(\frac{t}{x}\right)}{t} dt = (-1)^n \theta \frac{B_{n+1}}{(2n+2)x^{2n+2}}$$

(0 <  $\theta$  < 1).

Posons

$$\Phi(x) = \log \Gamma(x) + \left(\frac{1}{2} - x\right) \log x + x.$$

Nous avons, en intégrant (27),

$$(29) \quad \Phi(x) = Ax + \sum_{p=1}^n (-1)^{p-1} \frac{B_p}{2p(2p-1)x^{2p-1}} + r_n(x) + K,$$

avec (2)

$$(30) \quad r_n(x) = - \int_{+\infty}^x \rho_n(x) dx = (-1)^n \theta \frac{B_{n+1}}{(2n+2)(2n+1)x^{2n+1}}$$

et  $K = \text{const.}$

Supposons maintenant que  $x$  augmente indéfiniment.

Les termes en  $\frac{1}{x}$  tendent vers zéro, ainsi que  $r_n(x)$ , d'après (30). Quant au premier membre, on sait qu'il tend vers  $\log \sqrt{2\pi}$ . Il s'ensuit que  $A$  est nécessairement nul (3) et que  $K = \log \sqrt{2\pi}$ . On a donc la formule

(1) On a appliqué la formule de la moyenne au facteur  $\theta$  de la formule (24), dont le coefficient reste positif dans tout l'intervalle d'intégration.

(2) On a appliqué la formule de la moyenne au facteur  $\theta$  de la formule (28).

(3) On en déduit que l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-z}}{z} \left( \frac{z}{1-e^{-z}} - 1 \right) dz$$

est égale à la constante d'Euler. C'est ce qu'il est aisé de vérifier

asymptotique (1)

$$(31) \quad \log \Gamma(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \log x - x + \log \sqrt{2\pi} \\ + \sum_{\rho=1}^n (-1)^{\rho-1} \frac{B_{\rho}}{2\rho(2\rho-1)x^{2\rho-1}} + r_n(x).$$

Si l'on s'arrête à un terme quelconque, l'erreur commise a le signe du premier terme négligé et lui est inférieure en valeur absolue. Cette erreur tend vers zéro quand  $x$  croît indéfiniment. Mais, pour une valeur donnée de  $x$ , la série obtenue en poursuivant indéfiniment le développement est divergente, car son terme général est supérieur en valeur absolue à (2)

$$\frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n} 2n(2n-1)x^{2n-1}} = \frac{2(2n-2)!}{(2\pi)^{2n} x^{2n-1}},$$

ce qui augmente indéfiniment avec  $n$ .

directement. On a

$$1 = \lim_{\varepsilon=0} \left[ \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-z} dz}{1-e^{-z}} - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-z}}{z} dz \right] \\ = \lim_{\varepsilon=0} \left[ -\log(1-e^{-\varepsilon}) - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-z}}{z} dz \right], \\ 1 = \lim_{\varepsilon=0} \left( -\log \varepsilon - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-z}}{z} dz \right).$$

D'autre part, on a (n° 1)

$$C = - \int_0^{+\infty} e^{-t} \log t dt = \lim_{\varepsilon=0} \int_{\varepsilon}^{\infty} -e^{-t} \log t dt.$$

Or, en intégrant par parties, la seconde intégrale devient (cf. HERMITE, p. 94) :

$$-e^{-\varepsilon} \log \varepsilon - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt,$$

qui a même limite que l'expression ci-dessus.

(1) Cf. HERMITE, p. 98 et 105.

(2) Cf. inégalité (42).

7. Nous avons admis tout à l'heure que la limite de  $\Phi(x)$  pour  $x = \infty$  était  $\log \sqrt{2\pi}$ . Bien que cette propriété soit classique, nous allons encore la démontrer, par une méthode qui nous paraît nouvelle et instructive.

On a

$$\varphi(x) = e^{\Phi(x)} = \Gamma(x) x^{\frac{1}{2}-x} e^x = \int_0^{+\infty} e^{-z} z^{x-1} x^{\frac{1}{2}-x} e^x dz,$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{x-z} \left(\frac{z}{x}\right)^{x-1} dz.$$

Faisons le changement de variable  $\frac{z}{x} = t$ ; il vient

$$\varphi(x) = \sqrt{x} \int_0^{+\infty} e^{x(1-t)} t^{x-1} dt = \sqrt{x} \int_0^{+\infty} e^{x(1-t) + (x-1) \log t} dt,$$

dont il faut chercher la limite pour  $x = +\infty$ .

Soit  $a$  un nombre positif, aussi petit qu'on veut. Je dis que

$$\varphi_1(x) = \sqrt{x} \int_{1+a}^{+\infty} \quad \text{et} \quad \varphi_2(x) = \sqrt{x} \int_0^{1-a}$$

tendent vers zéro quand  $x$  croît indéfiniment.

Pour  $\varphi_1$ , la quantité sous le signe  $\int$  est inférieure à  $e^{x(1-t+\log t)}$ . Je dis que l'on peut trouver un nombre positif  $k$  tel que l'on ait, pour  $t \geq 1+a$ ,

$$(32) \quad (1-k)(1-t) + \log t < 0.$$

En effet, la dérivée du premier membre par rapport à  $t$  est

$$k-1 + \frac{1}{t} \leq k-1 + \frac{1}{a+1}.$$

Elle est négative, si nous supposons  $k < \frac{a}{a+1}$ . Donc, le maximum de la fonction est obtenu pour  $t = 1+a$ ,

soit

$$(33) \quad -(1-k)a + \log(1+a).$$

Or, pour  $k = 0$ , ceci se réduit à  $-a + \log(1+a)$ , quantité négative. Donc, on peut choisir  $k$  assez petit pour que l'expression (33) soit aussi négative, ce qui entraînera l'inégalité (32).

Nous avons alors

$$1-t + \log t < k(1-t);$$

d'où

$$\varphi_1(x) < \sqrt{x} \int_{1+a}^{+\infty} e^{-xk(t-1)} dt = \frac{1}{k\sqrt{x}} e^{-akx}.$$

Le dernier membre tend vers zéro pour  $x = +\infty$ ; donc, il en est de même de  $\varphi_1(x)$ .

Pour  $\varphi_2$ , déterminons  $k$  positif et plus petit que  $a$  tel que l'on ait, pour  $0 < t < 1-a$ ,

$$(34) \quad 1-t + (1-k) \log t < 0.$$

La dérivée de cette expression par rapport à  $t$  est

$$-1 + \frac{1-k}{t} > -1 + \frac{1-k}{1-a} = \frac{a-k}{1-a} > 0.$$

Donc, le maximum est obtenu pour  $t = 1-a$ , soit

$$(35) \quad a + (1-k) \log(1-a).$$

Or, pour  $k = 0$ , cette dernière quantité se réduit à  $a + \log(1-a)$ , ce qui est négatif. On peut donc choisir  $k$  assez petit pour que (35) ait aussi ce signe et cela entraîne (34).

Nous avons alors

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &< \sqrt{x} \int_0^{1-a} e^{(kx-1) \log t} dt \\ &= \sqrt{x} \int_0^{1-a} t^{kx-1} dt = \frac{(1-a)^{kx}}{k\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Le dernier membre tend vers zéro pour  $x = +\infty$ ; il en est donc de même de  $\varphi_2(x)$ .

Finalement, nous sommes ramenés à chercher la limite de

$$\begin{aligned}\varphi_3(x) &= \sqrt{x} \int_{1-a}^{1+a} e^{x(1-t)+(x-1)\log t} dt \\ &= \sqrt{x} \int_{-a}^{+a} e^{-xt+(x-1)\log(1+t)} dt,\end{aligned}$$

le nombre positif  $a$  pouvant être supposé aussi petit qu'on veut.

Si  $-a < t < a$ , on a

$$t - \frac{t^2}{2}(1+\alpha) < \log(1+t) < t - \frac{t^2}{2}(1-\alpha),$$

$\alpha$  étant un nombre constant, qui tend vers zéro en même temps que  $a$ .

On en déduit, en supposant  $x > 1$ ,

$$\begin{aligned}\sqrt{x} e^{-a} \int_{-a}^{+a} e^{-(x-1)(1+\alpha)\frac{t^2}{2}} dt &< \varphi_3(x) \\ &< \sqrt{x} e^a \int_{-a}^{+a} e^{-(x-1)(1-\alpha)\frac{t^2}{2}} dt.\end{aligned}$$

Pour trouver la limite de la première intégrale, faisons le changement de variable

$$(x-1)(1+\alpha)\frac{t^2}{2} = u.$$

L'intégrale devient

$$\sqrt{\frac{2x}{(x-1)(1+\alpha)}} e^{-a} \int_0^{(x-1)(1+\alpha)\frac{a^2}{2}} e^{-u} u^{-\frac{1}{2}} du.$$

Quand  $x$  croît indéfiniment, sa limite est

$$\sqrt{\frac{2}{1+\alpha}} e^{-a} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2\pi} e^{-a}}{\sqrt{1+\alpha}}.$$

On verrait de même que la deuxième intégrale a pour limite  $\frac{\sqrt{2\pi} e^a}{\sqrt{1-2}}$ .

La limite de  $\varphi_3(x)$  est comprise entre ces deux limites. Comme on peut supposer  $a$  arbitrairement petit, elle est égale à  $\sqrt{2\pi}$ .

Finalement,  $\varphi(x)$  a pour limite  $\sqrt{2\pi}$ ; donc,  $\Phi(x)$  a pour limite  $\log \sqrt{2\pi}$ .

8. Nous venons de retrouver les propriétés les plus connues de la fonction  $\Gamma$ . En voici d'autres, qui le sont moins.

Changeons  $x$  en  $x + 1$  dans (2) :

$$\frac{d \log \Gamma(x+1)}{dx} = -C + \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t} dt.$$

On a, quel que soit  $x$ ,

$$(36) \quad \frac{1-t^x}{1-t} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{(\log t)^n}{1-t}.$$

La série du second membre est uniformément convergente dans l'intervalle  $(\epsilon, 1)$ , si petit que soit  $\epsilon$ . En effet, la fonction  $\frac{(\log t)^n}{1-t}$  est finie et continue pour toutes les valeurs de cet intervalle; son module admet donc une borne supérieure  $M$  et la série (36) est majorée par la série convergente de terme général  $M \frac{|x|^n}{n!}$ . D'autre part, si  $-1 < x < 0$ , elle est à termes positifs. En outre, l'intégrale  $\int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t} dt$  est finie, ainsi que chacune des intégrales  $\int_0^1 \frac{x^n (\log t)^n}{n! (1-t)} dt$ . On en conclut qu'on peut intégrer terme à terme (1).

---

(1) Cf. J. HAAG, *Sur l'intégration des séries* (Bulletin des Sciences mathématiques, avril 1924).

Si  $x$  est positif, la série est alternée. Mais, la série des valeurs absolues s'obtient en changeant  $x$  en  $-x$ . Elle a pour somme  $\frac{1-t^{-x}}{1-t}$ , dont l'intégrale est finie si  $x < 1$ . Nous avons donc encore le droit d'intégrer terme à terme dans cette hypothèse.

En définitive, si l'on pose

$$(37) \quad S_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 \frac{(-\log t)^{n-1}}{1-t} dt \\ = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{e^z-1} dz,$$

on a

$$(38) \quad \frac{d \log \Gamma(x+1)}{dx} = -C + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} S_{n+1} x^n.$$

Cette formule, *valable pour*  $-1 < x < 1$ , ne l'est certainement pas pour  $x \geq 1$ . En effet, on a, d'après (37),

$$(39) \quad S_{n+1} > \frac{\Gamma(n+1)}{n!} = 1.$$

Donc, le terme général de la série (38) est supérieur, en valeur absolue, à  $x^n$  et ne saurait tendre vers zéro pour  $x \geq 1$ .

On peut aussi remarquer que, d'après (7), le premier membre de (38) admet le pôle  $x = -1$  comme pôle le plus rapproché de l'origine. Donc son développement en série entière a un rayon de convergence égal à 1.

En comparant (38) avec la formule de Mac-Laurin, on voit que la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de  $\log \Gamma(x)$  est égale, pour  $x = 1$ , à  $(-1)^n S_n (n-1)!$ .

On peut obtenir aussi cette dérivée au moyen de la

formule (7), qui donne (1), pour  $n \geq 2$ ,

$$(40) \quad \frac{d^n \log \Gamma(x)}{dx^n} = (-1)^n (n-1)! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^n}.$$

On en conclut que

$$(41) \quad S_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots + \frac{1}{k^n} + \dots$$

La formule (37) nous donne la somme de cette série sous forme d'intégrale définie. En la rapprochant de la formule (25), on obtient

$$B_n = \frac{4n}{(2\pi)^{2n}} \int_0^{+\infty} \frac{z^{2n-1}}{e^z - 1} dz.$$

Comme l'intégrale du second membre est supérieure à  $\Gamma(2n) = (2n-1)!$ , on en déduit l'inégalité

$$(42) \quad B_n > \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}}.$$

L'intégrale (37) peut se transformer de diverses manières. C'est ainsi qu'une intégration par parties conduit à

$$S_n = \frac{2^{n-1}}{n!} \int_0^{+\infty} \frac{z^n dz}{\text{sh}^2 z} = \frac{2^{2n-2}}{n!(2^{n-1}-1)} \int_0^{+\infty} \frac{z^n dz}{\text{ch}^2 z}.$$

On a encore

$$S_n = \frac{2^{n-1}}{(n-1)!(2^n-1)} \int_0^{+\infty} \frac{z^{n-1} dz}{\text{sh} z}.$$

Dans le cas où  $n$  est pair, on peut intégrer entre  $-\infty$

(1) On a le droit de dériver indéfiniment la formule (7), car la série (40) est majorée, pour  $x > a > 0$ , par la série convergente de terme général  $\frac{1}{(k+a)^n}$ .

et  $+\infty$  et appliquer la méthode des résidus, comme nous l'avons fait au n° 3. On aboutit ainsi à des formules de récurrence entre les nombres de Bernoulli. Mais, nous ne reproduisons pas ces calculs, qui n'ont d'intérêt que comme exercices.

9. Prenons les termes de degré impair du développement (38). Ils s'écrivent

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_{2n} x^{2n-1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} - \pi \cot \pi x \right),$$

en appliquant une formule connue, qui peut d'ailleurs être obtenue en remplaçant  $x$  par  $2i\pi x$  dans la formule (21).

On a donc

$$(43) \quad \frac{d \log \Gamma(x+1)}{dx} = -C + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} - \pi \cot \pi x \right) - \sum_{n=1}^{\infty} S_{2n+1} x^{2n}.$$

En intégrant et se rappelant que  $\Gamma(1) = 1$ , il vient

$$\log \Gamma(x+1) = \frac{1}{2} \log \frac{\pi x}{\sin \pi x} - Cx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1}.$$

En changeant  $x$  en  $-x$  et ajoutant les deux développements, il vient

$$\log [\Gamma(1+x) \Gamma(1-x)] = \log \frac{\pi x}{\sin \pi x};$$

d'où

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

On retrouve la formule (11).

Si nous supposons  $0 < x < 1$ , nous avons le droit de changer  $x$  en  $x-1$  dans (43). En retranchant membre

à membre et se souvenant que  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ , on obtient l'identité

$$\frac{1}{2x} - \frac{1}{2(1-x)} = \sum_{n=1}^{\infty} S_{2n+1} [(1-x)^{2n} - x^{2n}].$$

Autrement dit, si  $x$  et  $y$  sont deux nombres positifs de somme 1, on a

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} S_{2n+1} (y^{2n} - x^{2n}).$$

Posons

$$x = \frac{1-z}{2}, \quad y = \frac{1+z}{2};$$

il vient

$$(44) \quad \frac{z}{1-z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n+1} [(1+z)^{2n} - (1-z)^{2n}],$$

en appelant  $A_p$  la série formée par la somme des inverses des puissances  $p^{\text{ièmes}}$  des nombres pairs consécutifs.

Cette formule est valable pour  $-1 < z < 1$ . A l'intérieur de cet intervalle, le premier membre peut être développé en série entière. Il en est donc de même du second. En égalant de part et d'autre les coefficients de  $z^{2p-1}$ , nous obtenons l'identité (1)

$$(45) \quad \frac{1}{2} = \sum_{n=p}^{\infty} C_{2n}^{2p-1} A_{2n+1}.$$

(1) On peut la démontrer directement de la manière suivante. Considérons la série double de terme général

$$u_{nk} = C_{2n}^{2p-1} \left( \frac{1}{2k} \right)^{2n+1}$$

( $k = 1, 2, 3, \dots; n = p, p+1, p+2, \dots$ ).

Si on la somme d'abord par rapport à  $k$ , puis par rapport à  $n$ , on

La formule (44) est évidemment valable pour toutes les valeurs imaginaires de  $z$  dont le module est plus petit que 1. Posons, par exemple,  $z = i \operatorname{tang} \varphi$ . Nous obtenons l'identité

$$\frac{1}{4} \sin 2\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n+1} \frac{\sin 2n\varphi}{(\cos \varphi)^{2n}}, \quad \bullet$$

qui est valable pour  $-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}$ .

obtient évidemment la série (45). Tout revient donc à prouver que cette série double est convergente et a pour somme  $\frac{1}{2}$ .

Sommons par rapport à  $n$ ; nous obtenons

$$v_k = \left(\frac{1}{2k}\right)^{2p} \sum_{n=p}^{\infty} C_{2n}^{2p-1} \left(\frac{1}{2k}\right)^{2n-2p+1} = \frac{\omega_k}{(2k)^{2p}}.$$

Or,  $\omega_k$  est le coefficient de  $x^{2p-1}$  dans le développement de la fonction

$$\sum_{n=p}^{\infty} (x+y)^{2n} = \frac{(x+y)^{2p}}{1-(x+y)^2},$$

où l'on a posé, pour simplifier l'écriture,  $y = \frac{1}{2k}$  et où l'on suppose la variable  $x$  positive et inférieure à  $1-y$ . Cette fonction, décomposée en éléments simples, devient

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-y-x} + \frac{1}{1+y+x} \right) + E,$$

la partie entière  $E$  étant de degré  $2p-2$  et ne fournissant, par conséquent, aucun terme en  $x^{2p-1}$ . On a, dès lors,

$$\begin{aligned} \omega_k &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(1-y)^{2p}} - \frac{1}{(1+y)^{2p}} \right] \\ &= \frac{1}{2} (2k)^{2p} \left[ \frac{1}{(2k-1)^{2p}} - \frac{1}{(2k+1)^{2p}} \right]; \\ v_k &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(2k-1)^{2p}} - \frac{1}{(2k+1)^{2p}} \right]. \end{aligned}$$

Il est maintenant évident que

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k = \frac{1}{2}.$$

10. Pour terminer, nous donnerons une dernière application de la formule (2). Si  $x = n + 1$ ,  $n$  étant un entier positif, elle devient

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma'(n+1)}{n!} &= -C + \int_0^1 (1+t+t^2+\dots+t^{n-1}) dt \\ &= -C + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

D'autre part, la formule (5) donne, en changeant  $x$  en  $n + 1$ ,

$$\Gamma'(n+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^n \log t dt.$$

On a donc la formule

$$C = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) - \int_0^\infty e^{-t} \frac{t^n}{n!} \log t dt.$$

On en conclut que la différence

$$\int_0^\infty e^{-t} \frac{t^n}{n!} \log t dt - \log n$$

tend vers zéro quand  $n$  croît indéfiniment.

## SUR LES LIEUX ALGÈBRIQUES DÉCOMPOSABLES ;

PAR CH. BIOCHE.

On sait qu'un lieu algébrique, d'ordre  $m$ , se décompose s'il a

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2} + 1$$

points doubles. Mais la décomposition peut se produire

sans que le nombre des points doubles ait la valeur susdite; je voudrais, pour préciser, énoncer quelques remarques simples.

1° Le nombre des points doubles d'un lieu d'ordre  $m$ , qui se décompose en  $n$  lignes, distinctes et unicursales, est

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2} + n - 1.$$

2° Si les lignes composantes ne sont pas unicursales, le nombre précédent doit être diminué de la somme des genres de ces lignes.

3° Le nombre minimum des points doubles d'un lieu décomposable est  $m - 1$ . Le lieu se décompose alors en une droite et une courbe sans point double.

4° Le nombre maximum de points doubles est

$$\frac{m(m-1)}{2}.$$

Le lieu est alors décomposé en  $m$  droites.

## SUR UNE PROPRIÉTÉ DE LA DÉVELOPPANTE DU CERCLE ET DE L'HÉLICOÏDE DÉVELOPPABLE;

PAR P. VINCENSINI.

I. Dans un article sur la géométrie de la formule de Stokes, M. A. Buhl a établi (*N. A.*, octobre 1923) qu'une cloison  $S$  appartenant à l'hélicoïde

$$z = h\theta + F(r)$$

engendre un volume d'axe  $Oz$  égal à  $2\pi h S'$ ,  $S'$  étant l'aire de la projection de  $S$  sur  $xOy$ , On déduit immédiatement de là une propriété intéressante de l'hélicoïde développable. Pour un tel hélicoïde on a

$$\frac{S'}{S} = K = \frac{R}{\sqrt{h^2 + R^2}}$$

( $h$  étant le pas réduit des hélices de l'hélicoïde,  $R$  le rayon du cylindre qui porte l'hélice de rebroussement) et

$$V = \frac{2\pi h R}{\sqrt{h^2 + R^2}} S,$$

$V$  ne dépend que de  $S$ .

*Toutes les cloisons de même surface prises sur l'hélicoïde engendrent par rotation autour de  $Oz$  des volumes tournants égaux.*

II. Il paraît intéressant de démontrer que cette propriété curieuse de l'hélicoïde développable se rattache à une propriété analogue de la développante du cercle. Cela fera ressortir le caractère géométrique du théorème précédent.

Rappelons tout d'abord que  $O$  étant un point fixe d'un plan,  $ds$  un élément d'arc d'une courbe du plan et  $\alpha$  l'angle du rayon vecteur  $OM$  qui va à l'élément, avec la tangente à cet élément, l'aire  $dA$  engendrée par la rotation de  $ds$  autour de  $O$  a pour expression

$$(1) \quad dA = 2\pi r \cos \alpha ds.$$

L'aire engendrée par un arc fini a pour expression

$$A = 2\pi \int_{s_1}^{s_2} r \cos \alpha ds.$$

La formule (1) permet de rechercher les courbes pour lesquelles il existe une relation donnée entre  $A$  et  $s$ . Examinons le cas simple où l'on veut que  $A$  soit proportionnelle à  $s$ .

Dans ce cas  $2\pi r \cos \alpha = K$  (constante)

$$r \cos \alpha = \frac{K}{2\pi}.$$

Si l'on abaisse les perpendiculaires  $OH$  et  $OI$  sur la tangente et sur la normale à la courbe cherchée on voit que  $r \cos \alpha$  ne représente autre chose que  $MH$  ou  $OI$ .  $OI$  étant constant, la normale à la courbe cherchée, enveloppe un cercle de centre  $O$ , et la courbe est une développante du cercle  $O$ . On peut donc dire :

*Sur une développante de cercle tous les arcs de même longueur engendrent des aires égales en tournant autour du centre du cercle.*

La façon dont l'hélicoïde développable peut être engendré au moyen de développantes de cercles, conduit assez naturellement à se demander s'il n'existe pas, entre les aires de cloisons appartenant à un tel hélicoïde et les volumes engendrés par la rotation de ces cloisons autour de l'axe de l'hélicoïde, une relation analogue à celle qui vient d'être établie pour les développantes de cercle.

Soit  $S$  une cloison de contour  $C$ , tracée sur l'hélicoïde lieu des tangentes à l'hélice circulaire d'équations

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta, \quad z = h\theta.$$

Le volume engendré par  $S$  en tournant autour de l'axe  $Oz$  de l'hélicoïde a pour expression

$$V = \int_{z_1}^{z_2} A \, dz,$$

$A$  désignant l'aire engendrée par l'arc de développante du plan de cote  $z$ , compris à l'intérieur de  $S$ , dans sa rotation autour de  $Oz$ ,  $z_1$  et  $z_2$  les cotes du point le plus bas et le plus haut du contour  $C$ .  $A$  a pour expression :  $A = 2\pi R l$  ( $l$  longueur de l'arc de développante). On a donc

$$V = 2\pi R \int_S l dz \quad (\text{intégrale attachée à } S).$$

Soient  $S'$  la projection de  $S$  sur  $xOy$ ,  $C'$  le contour de  $S'$ ; l'arc de développante de cote  $z$  envisagé plus haut se projette suivant un arc égal de longueur  $l$  compris dans  $S'$  [fig. (1)]. Transformons l'intégrale attachée à  $S$  en une intégrale attachée à  $S'$ .

On a

$$dz = h d\theta.$$

D'autre part, si  $m$  et  $n$  sont les points où les projections des développantes de cotes  $z$  et  $z + dz$  rencontrent la

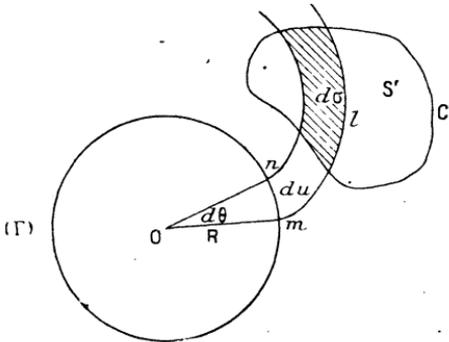


Fig. 1.

circconférence  $\Gamma$  du plan  $xOy$  de centre  $O$  et de rayon  $R$ , et si l'on désigne par  $du$  la longueur de l'arc  $mn$  de  $\Gamma$ , longueur qui représente la distance des

deux développantes projections, on pourra écrire

$$l dz = lh d\theta = lh \frac{du}{R}.$$

Dans ces conditions,

$$\int_S l dz = \frac{h}{R} \int_{S'} l du = \frac{h}{R} \int_{S'} d\sigma$$

( $d\sigma$  étant l'aire limitée dans  $S'$  par les deux développantes).

On peut donc écrire

$$V = 2\pi h \int_{S'} d\sigma = 2\pi h S'.$$

Mais on sait que

$$S' = KS, \quad \left( K = \frac{R}{\sqrt{h^2 + R^2}} \right).$$

On a donc

$$V = \frac{2\pi h RS}{\sqrt{h^2 + R^2}}.$$

Cette formule montre que  $V$  ne dépend que de  $S$ , et pas du tout du contour de  $S$  sur l'hélicoïde.

*Toutes les cloisons de même surface, tracées sur un hélicoïde développable, engendrent des volumes égaux en tournant autour de l'axe de l'hélicoïde.*

Ce résultat est tout à fait analogue à celui trouvé pour les développantes de cercle.

III. Indiquons avant de terminer quelques applications très simples de la formule (1) du n° II.

Proposons-nous de déterminer une courbe plane (C) telle qu'un arc quelconque de cette courbe tournant de deux points O et O' du plan engendre des aires qui soient dans un rapport constant.

Si M est un point quelconque de (C) MT la tangente à (C) en M, et si H et H' sont les projections

de  $O$  et  $O'$  sur la normale en  $M$ , la relation

$$r' \cos \alpha' = Kr \cos \alpha$$

montre que  $\frac{O'H'}{OH} = K$ .

La normale à  $C$  rencontre  $OO'$  en un point  $\omega$  tel que  $\frac{\omega O'}{\omega O} = K$ . Il y a deux points répondant à la question ( $\omega, \omega_1$ ). Les courbes cherchées se partagent en deux séries; celles de l'une des séries ont leurs normales passant par  $\omega$ , ce sont des circonférences de centre  $\omega$ ; celles de l'autre série sont des circonférences de centre  $\omega_1$ .

Réciproquement, on peut dire qu'étant donnée une circonférence  $\Gamma$  de centre  $\omega$  et deux points  $O, O'$  en ligne droite avec  $\omega$ , le rapport des surfaces engendrées par un arc quelconque de  $\Gamma$  en tournant autour de  $O$  et  $O'$  est égal à  $\frac{\omega O}{\omega O'}$ .

Ce résultat, qui s'établit d'ailleurs très simplement par la géométrie (3<sup>e</sup> livre), donne l'idée de comparer les volumes engendrés par une cloison portée par une surface de révolution, tournant autour de deux axes parallèles à l'axe de la surface et situés dans un même plan avec cet axe.

Soient  $S$  une cloison située sur une surface de révolution d'axe  $\Omega$ ;  $D$  et  $\Delta$  les deux axes de rotation  $\omega$ ;  $O, O'$  les points d'intersection de  $\Omega D \Delta$  avec un plan  $P$  perpendiculaire à  $\Omega$  (fig. 2).

Soit  $\Pi$  un plan parallèle à  $P$  coupant  $\Omega, D, \Delta$  en  $\omega_1, O_1, O'_1$  et  $S$  suivant l'arc de cercle  $l$ . Les aires engendrées par ( $l$ ) en tournant autour de  $D$  et  $\Delta$  sont dans le rapport  $\frac{\omega_1 O_1}{\omega_1 O'_1} = \frac{\omega O}{\omega O'}$ .

Les volumes engendrés par  $S$  en tournant autour de  $D$  et  $\Delta$  sont dès lors dans ce même rapport comme le montre une intégration immédiate.

Si la surface de révolution, qui porte la cloison  $S$ , est une sphère quelconque de centre  $O$ , on peut dire

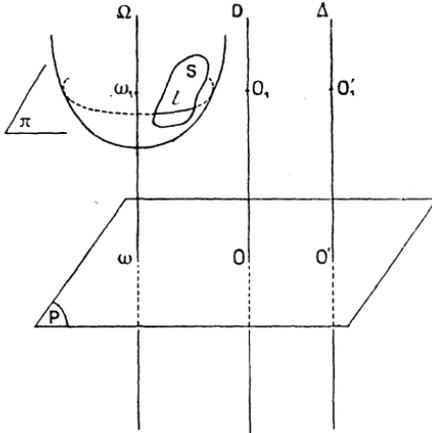


Fig. 2.

que le rapport des volumes engendrés par la rotation de  $S$  autour de deux axes parallèles quelconques, situés dans un plan passant par  $O$ , est indépendant de la cloison  $S$ , et est égal au rapport des distances de  $O$  aux deux axes de rotation.

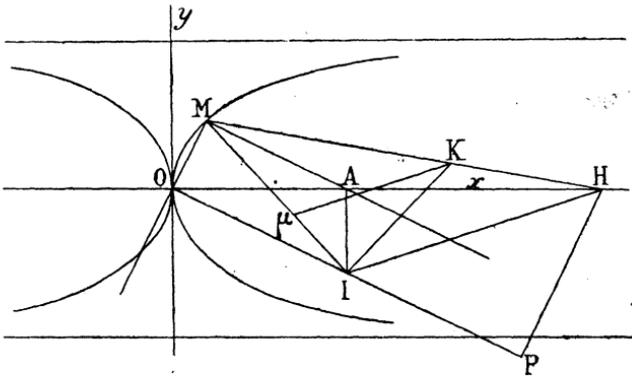
Ces deux résultats ont été établis par M. A. Buhl (*N. A.*, juin 1924). Je signale cette démonstration parce qu'elle ne nécessite que la connaissance de propriétés tout à fait élémentaires.

### SUR LA QUARTIQUE CIRCULAIRE DITE « CAPPA »;

PAR M. D'OCAGNE.

L'objet de cette courte Note est de faire connaître un exemple particulièrement simple d'application de la

double notion de cercle des inflexions des trajectoires et de cercle des rebroussements des enveloppes de droites à une détermination de centre de courbure. Il s'agit de la quartique circulaire qui, en raison de sa forme, a reçu le nom de *cappa*, et qui est le lieu du sommet M d'un angle droit dont un côté passe constamment par un point fixe O tandis qu'un point A



marqué sur l'autre côté ( $MA = a$ ) parcourt une droite fixe passant par O. Si l'on prend cette droite pour axe  $Ox$ , avec O pour origine, et  $Oy$  perpendiculaire à  $Ox$ , on voit immédiatement que cette courbe a pour équation

$$y^2(x^2 + y^2) = a^2x^2.$$

Symétrique par rapport aux axes, elle a en O à la fois un foyer singulier et un point tacnodal, où la tangente est  $Oy$  et le rayon de courbure  $\frac{a}{2}$ , et elle possède comme asymptotes, outre les droites isotropes issues de O, les droites  $y = \pm a$ , chacune d'elles étant double, car la courbe est de sixième classe; elle est d'ailleurs unicursale.

• La perpendiculaire élevée en O à OM (normale à

l'enveloppe de ce côté) et la perpendiculaire élevée en A à OA (normale au lieu du point A) se coupant en I, centre instantané de rotation de l'angle droit mobile, la normale en M au cappa est MI. Le centre de courbure est dès lors le point  $\mu$  où MI touche son enveloppe.

Or, le rayon de courbure de l'enveloppe de OM, réduite au point O, est nul; le point O appartient donc au cercle des rebroussements des enveloppes de droites, et, par suite, son symétrique P par rapport à I au cercle des inflexions des trajectoires (1). Mais la seconde extrémité H du diamètre issu de I, dans ce cercle des inflexions, se trouve sur Ox (tous les points de Ox étant d'inflexion puisque cette trajectoire de A est rectiligne); il en résulte que le point H est à la rencontre de Ox et de la perpendiculaire élevée en P à OP. Une fois H obtenu, la construction que nous avons établie d'une façon purement géométrique pour le cas le plus général (2) montre que, si MH coupe en K la perpendiculaire élevée en I à MI, la parallèle menée par K à IH passe par le centre de courbure  $\mu$ ,

### CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° Vérifier que la fonction  $y = e^x$  est solution de l'équation différentielle

$$(1) \quad \frac{d^3 y}{dx^3} - 3 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

(1) Voir notre *Cours de Géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique*, t. I. p. 277.

(2) *Ibid.*, p. 274, et fascicule complémentaire, p. 18.

et déterminer la solution générale de cette équation.

2° Intégrer l'équation différentielle

$$(2) \quad \frac{d^3 y}{dx^3} - 3 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} - 2y = 6 e^x \cos 3x$$

et déterminer la solution particulière  $y_1$  qui est un infiniment petit d'ordre 3 par rapport à  $x$ .

3° Figurer la courbe représentative de la fonction  $y_1$  de  $x$  et calculer l'aire comprise entre  $Ox$  et l'arc de la courbe obtenu pour  $x$  variant de 0 à  $\pi$ .

II. On considère l'ellipse (E) définie, en coordonnées rectangulaires, par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (a > b).$$

Soient : M un point variable de cette ellipse; T et T' les points d'intersection de la tangente en M avec  $Ox$  et  $Oy$ ; N et N' les points d'intersection de la normale en M avec  $Ox$  et  $Oy$ ; P le milieu de TT' et Q le milieu de NN'.

Former l'équation du lieu géométrique de P, celle du lieu de Q, et déterminer le point de contact de la droite PQ avec son enveloppe.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION par M. A. SADE. — I. En posant  $y = z e^x$ , les équations (1) et (2) deviennent respectivement

$$z''' + z' = 0, \quad z''' + z' = 6 \cos 3x,$$

et l'intégration est immédiate. L'intégrale générale de (2) sera

$$y = e^x \left[ A + B \cos x + C \sin x - \frac{\sin 3x}{4} \right]$$

et l'intégrale particulière demandée est

$$y_1 = e^x \left( \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4} \right) = e^x \sin^3 x.$$

L'aire demandée vaut

$$\frac{3}{10} (1 + e^\pi).$$

II.  $x, y$  étant les coordonnées du point M, les coordonnées du point P sont

$$X = \frac{a^2}{2x}, \quad Y = \frac{b^2}{2y},$$

d'où, en tenant compte de l'équation de l'ellipse, le lieu, facile à construire,

$$a^2 Y^2 + b^2 X^2 = 4 X^2 Y^2.$$

Le lieu du point Q est l'ellipse

$$(E') \quad \frac{X^2}{\left(\frac{a^2 - b^2}{2a}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\frac{a^2 - b^2}{2b}\right)^2} = 1.$$

La droite PQ a pour équation .

$$Xx - Yy = \frac{a^2 - b^2}{2}$$

et touche son enveloppe au point Q; l'enveloppe est l'ellipse (E').

ÉPREUVE PRATIQUE. — Des trois séries de termes généraux

$$u_n = \operatorname{tang} \left( \frac{n+1}{n+2} \pi \right), \quad v_n = \frac{1}{(\operatorname{ch} n)^2},$$

$$w_n = \frac{\log(n^2+1) - \log n^2}{n^3},$$

reconnaître celles qui sont convergentes et calculer leur somme avec une erreur inférieure à 0,001.

*Nota.* —  $\operatorname{Ch} x$  désigne le cosinus hyperbolique de  $x$ ;  $\log x$  désigne le logarithme décimal de  $x$ .

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — 1°  $u_n$  a pour partie principale  $\frac{\pi}{n}$ , la série correspondante est donc divergente.

2° La seconde série se comporte comme la série de terme général  $e^{-2n}$  et est donc convergente. On vérifie aisément que le rapport  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  est toujours inférieur à  $\frac{1}{2}$ . L'erreur commise

en s'arrêtant à un terme de la série est donc toujours inférieure au dernier terme non négligé. La somme de la série est 0,502.

3° On a

$$w_n = \log e \frac{L\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{n^3} < \frac{\log e}{n^5};$$

la série converge. Elle a pour somme 0,315.

(Caen, juin 1924.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Développer l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - ex^p}},$$

suivant les puissances croissantes de  $e$ . Calculer le rayon de convergence de la série obtenue. Donner une vérification directe du développement trouvé, dans les cas particuliers  $p = 2, 1$  et  $\frac{1}{2}$ .

II. Chercher les normales abaissées d'un point quelconque de  $Oz$  sur la courbe

$$x = 5t, \quad y = 2t^2\sqrt{2}, \quad z = t^3,$$

Discuter leur réalité.

III. Un point  $M$ , de masse 2, est attiré par deux points fixes  $A$  et  $B$  suivant une force égale à la distance. On le lance, à partir d'une position quelconque  $M_0$  prise sur  $AB$ , avec la vitesse  $M_0V_0$  perpendiculaire à  $Ox$ . Déterminer le mouvement qui prend naissance. On considère toutes les trajectoires  $T$  obtenues en faisant varier  $M_0V_0$  de telle manière que  $V_0$  décrive un cercle de diamètre  $AB$ . On demande l'enveloppe de ces trajectoires, ainsi que leurs trajectoires orthogonales.

INDICATIONS SUR LA SOLUTION, par M. A. SADE. — I. On trouve

la série

$$1 + \sum_1^{\infty} \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.5 \dots 2n} \frac{e^n}{1+np}$$

dont le rayon de convergence est égal à  $un$ .

II. Les normales issues du point  $(0, 0, Z)$  seront déterminées par l'équation

$$x'x + y'y + z'z - z'Z = 0$$

qui s'écrit (en écartant la solution  $t = 0$ )

$$3t^2 + 16t + \frac{25}{t} = 3Z;$$

en étudiant les variations du premier membre, on constate qu'il y a 2 ou 0 solutions suivant que  $Z$  est extérieur ou non à l'intervalle  $-\frac{44}{3}, +\frac{44}{3}$ .

III. Tout se passe comme si le point  $M$  était attiré par le milieu de  $AB$  (origine des coordonnées) suivant une force égale au double de la distance. La détermination du mouvement est donc immédiate.

En se bornant ici, pour être bref, au cas où les points  $A$  et  $B$  sont sur  $Ox$ , on constatera que les trajectoires  $T$  ont pour enveloppe le losange formé par les quatre droites

$$\pm x \pm y\sqrt{2} = r \quad (r = \text{rayon du cercle}).$$

Les trajectoires orthogonales dépendent de l'intégration de l'équation différentielle

$$(x + yy'_x)(xy'_x + 2y) = r^2 y'_x$$

qui, en prenant pour variable  $X = x^2$ ,  $Y = y^2$ , se ramène à une équation de Lagrange.

EPREUVE PRATIQUE. — *Un cylindre de révolution de rayon  $r$  est limité à deux sections droites dont la distance est  $h$ ; il est formé d'une substance homogène et sa masse est  $m$ . Une demi-sphère de rayon  $r$  est limitée par un plan dia-*

métral et sa section par ce plan coïncide avec l'une des bases du cylindre; elle est formée d'une substance homogène et sa masse est  $M$ . On fait osciller le solide ainsi constitué autour d'un diamètre  $AB$  de celles des bases du cylindre sur laquelle n'est pas fixée la demi-sphère; cet axe  $AB$  est fixé horizontalement.

Trouver la longueur du pendule simple synchrone.  
Application numérique :

$$r = 3^{\text{cm}}; \quad h = 50^{\text{cm}}; \quad m = 852^{\text{g}}, 32; \quad M = 641^{\text{g}}, 66.$$

SOLUTION. — On trouve

$$l = 2 \frac{M \left( h^2 + \frac{3hr}{4} + \frac{r^2}{5} \right) + m \left( \frac{h^2}{3} + \frac{r^2}{4} \right)}{M \left( h + \frac{3r}{4} \right) + (M + m)h} = 43^{\text{cm}}, 9.$$

( Clermont, juin 1924. )

### ERRATUM.

Dans le numéro de décembre 1924, page 97, ligne 4, de la note <sup>(1)</sup>, il faut lire « ordinaires », au lieu de « polaires ».

La Rédaction des *N. A.* tient à indiquer que l'Auteur de l'article n'est en rien responsable de cette erreur de transcription, que nos lecteurs auront déjà rectifiée.

---



---

**SUR LES POLYNOMES HYPERGÉOMÉTRIQUES ;**

PAR A. ANGELESCO,

Professeur à l'Université de Cluj (Roumanie).

---

Les polynomes  $h$  <sup>(1)</sup> sont les polynomes déduits de la fonction de Gauss

$$(1) \quad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots,$$

en donnant à  $\alpha$  des valeurs entières et négatives. Une suite de polynomes  $h$  sera donc une suite de polynomes  $F_n$  de la forme

$$F_n = F(-n, \beta_n, \gamma_n, x)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$  et où  $\beta_n$  et  $\gamma_n$  désignent des fonctions de  $n$ .

Nous ne savons pas si en dehors des polynomes  $F(-n, \beta + n, \gamma, x)$  de Jacobi <sup>(2)</sup> on a déjà étudié d'autres suites de polynomes  $h$ . Dans le présent travail, nous nous proposons d'étudier trois autres suites remarquables de polynomes  $h$ .

---

<sup>(1)</sup> Nous désignerons par la lettre  $h$  le mot *hypergéométrique*.

<sup>(2)</sup> Voir, pour la bibliographie complète des travaux sur les polynomes de Jacobi, l'article *Généralisations diverses des fonctions sphériques*, par MM. P. APPELL et A. LAMBERT, de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, édition française, t. II, vol. V<sup>o</sup> fasc. 2.

1. Considérons le développement de l'expression  $(1 + \alpha)^\lambda (1 + \alpha x)^\mu$  suivant les puissances de  $\alpha$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  étant deux paramètres réels, et posons

$$(2) \quad (1 + \alpha)^\lambda (1 + \alpha x)^\mu = \Sigma \alpha^n P_n(x, \lambda, \mu).$$

On voit immédiatement que

$$(3) \quad P_n(x, \lambda, \mu) = \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)}{n!} \\ + \frac{\mu}{1} \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+2)}{(n-1)!} x + \dots \\ + \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)}{n!} x^n,$$

ou bien, à l'aide de la fonction (1),

$$(4) \quad P_n(x, \lambda, \mu) \\ = \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)}{n!} F(-n, -\mu, \lambda-n+1, x).$$

Les polynomes  $P_n$  (1) sont donc des polynomes  $h$ . D'après une formule de Jacobi, que nous retrouverons dans la suite, on a aussi

$$(5) \quad P_n = \frac{1}{n!} x^{n-\lambda} (1-x)^{\lambda+\mu+1} \frac{d^n}{dx^n} [x^\lambda (1-x)^n \lambda^{-\mu-1}].$$

De la formule (4) il résulte que le polynome  $P_n$  satisfait à l'équation différentielle de Gauss

$$(6) \quad x(1-x)y'' + [\lambda+1-n+(n+\mu-1)x]y' - n\mu y = 0.$$

2. Du développement (2) on peut facilement déduire

(1) Nous désignerons, le plus souvent, le polynome  $P_n(x, \lambda, \mu)$  par  $P_n$ .

un grand nombre de relations. Voici quelques-unes :

$$(7) \quad \frac{dP_{n+1}}{dx} = \mu P_n - x \frac{dP_n}{dx} = \mu P_n(x, \lambda, \mu - 1),$$

$$(8) \quad (n+2)P_{n+2} + [n+1-\lambda + (n+1-\mu)x]P_{n+1} + x(n-\lambda-\mu)P_n = 0,$$

$$(9) \quad \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)}{n!} x^n = \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^i \frac{\lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+i-1)}{i!} P_{n-i},$$

$$(10) \quad \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)}{n!} = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \frac{\mu(\mu+1)\dots(\mu+i-1)}{i!} x^i P_{n-i},$$

$$(11) \quad P_n(x, \lambda + l, \mu + m) = \sum_{i=0}^{i=n} P_{n-i}(x, \lambda, \mu) P_i(x, l, m).$$

Remarquons, en passant, que de chacune des relations (8), (9) et (10), on peut déduire des expressions du polynôme  $P_n$  sous forme de déterminants.

3. Pour mettre le polynôme  $P_n$  sous forme d'intégrale, partons de l'égalité

$$(12) \quad (1+\alpha)^\lambda = \frac{1}{\Gamma(-\lambda)} \int_0^\infty e^{-r(1+\alpha)} r^{-\lambda-1} dr,$$

$\lambda < 0$  et  $|\alpha| < 1$ , égalité qui se vérifie en changeant  $r$  en  $\frac{y}{1+\alpha}$ . On déduit de là

$$(13) \quad (1+\alpha)^\lambda (1+\alpha x)^\mu = \frac{1}{\Gamma(-\lambda)\Gamma(-\mu)} \int \int e^{-r-s-\alpha(r+sx)} r^{-\lambda-1} s^{-\mu-1} dr ds,$$

$\lambda < 0$ ,  $\mu < 0$ ,  $|\alpha x| < 1$  et  $|\alpha| < 1$ , le domaine d'intégration étant  $r \geq 0$ ,  $s \geq 0$ . Faisons, dans cette intégrale

double, le changement

$$r = u(1 - v) \quad \text{et} \quad s = uv.$$

Le nouveau domaine sera

$$u \geq 0, \quad 0 \leq v \leq 1 \quad \text{et} \quad \left| \frac{D(r, s)}{D(u, v)} \right| = u,$$

de sorte que l'égalité précédente (13) deviendra

$$(1 + \alpha)^\lambda (1 + \alpha x)^\mu = \frac{1}{\Gamma(-\lambda) \Gamma(-\mu)} \int_0^\infty e^{-u} u^{-\lambda-\mu-1} du \\ \times \int_0^1 e^{-\alpha u(1-v+vx)} (1-v)^{-\lambda-1} v^{-\mu-1} dv.$$

En remplaçant le premier membre par son développement (2) et dans le second membre  $e^{-\alpha u(1-v+vx)}$  par son développement, on obtient

$$(14) \quad P_n = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(n - \lambda - \mu)}{\Gamma(-\lambda) \Gamma(-\mu)} \\ \times \int_0^1 (vx + 1 - v)^n (1 - v)^{-\lambda-1} v^{-\mu-1} dv,$$

formule qui se vérifie sans difficulté.

En multipliant les deux membres de (14) par  $\alpha^n$  et en ajoutant ensuite les égalités obtenues en faisant  $n = 0, 1, 2, \dots$ , on arrive à la formule

$$(15) \quad (1 + \alpha)^\lambda (1 + \alpha x)^\mu \\ = A \int_0^1 [1 + \alpha(vx + 1 - v)]^{\lambda+\mu} (1 - v)^{-\lambda-1} v^{-\mu-1} dv,$$

où l'on suppose  $|x| < 1$ ,  $|\alpha x| < 1$  et où l'on a posé

$$A = \frac{\Gamma(-\lambda - \mu)}{\Gamma(-\lambda) \Gamma(-\mu)}.$$

Faisons quelques applications des formules (14) et (15).

a. Si dans la formule (14) nous remplaçons  $x$  par  $(ux + 1 - u)$ , en remarquant que

$$v(ux + 1 - u) + 1 - v = u(vx + 1 - v) + 1 - u,$$

on est conduit à l'égalité

$$\begin{aligned} P_n(ux + 1 - u, \lambda, \mu) \\ = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{(\lambda + \mu - i)(\lambda + \mu - i - 1) \dots (\lambda + \mu - n)}{(n - i)!} u^i (1 - u)^{n-i} P_i. \end{aligned}$$

b. De la représentation par intégrale (14) on peut, déduire, sous forme d'intégrale définie, un grand nombre de fonctions génératrices pour les polynomes  $P_n$ . Par exemple

$$\begin{aligned} A \int_0^1 \frac{(1 - v)^{-\lambda-1} v^{-\mu-1} dv}{1 - \alpha(vx + 1 - v)} \\ = \sum \frac{n!}{(\lambda + \mu)(\lambda + \mu - 1) \dots (\lambda + \mu - n + 1)} \alpha^n P_n, \end{aligned}$$

où  $|\alpha| < 1$  et  $|\alpha x| < 1$ ;

$$\begin{aligned} (16) \quad A \int_0^1 e^{\alpha(vx + 1 - v)} (1 - v)^{-\lambda-1} v^{-\mu-1} dv \\ = \sum \frac{\alpha^n P_n}{(\lambda + \mu)(\lambda + \mu - 1) \dots (\lambda + \mu - n + 1)}, \end{aligned}$$

égalité valable quels que soient  $\alpha$  et  $x$ .

c. En multipliant les deux membres de (15) par  $(1 + \alpha)^k$  et en développant sous le signe d'intégration l'expression

$$(1 + \alpha)^k [1 + \alpha(vx + 1 - v)]^{\lambda + \mu}$$

par la formule (2), on arrive à l'égalité

$$P_n(x, \lambda + k, \mu) = A \int_0^1 P_n(vx + 1 - v, k, \lambda + \mu) (1 - v)^{-\lambda-1} v^{-\mu} dv$$

qui généralise la formule (14), qu'on retrouve en faisant  $k = 0$ .

*d.* Changeons dans l'égalité (15)  $\alpha$  en  $-\alpha$  et puis multiplions ses deux membres par  $\alpha^a(1-\alpha)^b$ . En intégrant ensuite de 0 à 1, par rapport à  $\alpha$ , et en tenant compte de l'égalité

$$\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}(1-xu)^{-c} du = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} F(c, a, a+b, x),$$

qui se vérifie immédiatement, on arrive à la relation

$$\begin{aligned} & F(\mu, a, a+b+\lambda, x) \\ &= \frac{\Lambda \Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^1 F(\lambda+\mu, a, a+b, vx+1-v) \\ & \quad \times (1-v)^{-\lambda-1} v^{-\mu-1} dv, \end{aligned}$$

où l'on suppose  $\lambda < 0$ ,  $\mu < 0$ ,  $\lambda + \mu > -1$ ,  $b > -\lambda$ ,  $a > 0$ .

*e.* Transformons l'égalité (15) de manière à pouvoir déduire une autre représentation par intégrale des polynomes  $P_n$ . Remarquons d'abord que l'on a

$$1 + \alpha(vx + 1 - v) = (1 + \alpha x)v + (1 - v)(1 + \alpha),$$

de sorte que l'égalité (15) peut s'écrire

$$\alpha^\lambda b^\mu = \Lambda \int_0^1 [bv + (1-v)\alpha]^\lambda [b'v + (1-v)\alpha]^\mu (1-v)^{-\lambda-1} v^{-\mu-1} dv,$$

égalité qui est valable, en supposant  $a$  et  $b$  réels, pour  $0 < a < 2$  et  $0 < b < 2$ . En remplaçant dans cette égalité  $a$  par  $1+t$ , et  $b$  par  $\frac{1}{x} + t$ , nous obtiendrons

$$\begin{aligned} & (1+t)^\lambda (1+tx)^\mu \\ &= \Lambda x^{-\lambda} \int_0^1 [tx + v + (1-v)x]^\lambda [t + vx]^\mu (1-v)^{-\lambda-1} v^{-\mu-1} dv, \end{aligned}$$

égalité qui est valable, en particulier, pour  $0 < t < 1$  et  $x > 1$ . Écrivons, sous le signe d'intégration, à la place de

$$[tx + v + (1-v)x]^{\lambda+\mu}$$

l'expression équivalente

$$[v + (1-v)x]^{\lambda+\mu} \left[ 1 + \frac{tx}{v + (1-v)x} \right]^{\lambda+\mu}$$

où le second facteur sera remplacé par son développement suivant les puissances de  $\frac{tx}{v + (1-v)x}$ , quantité qui reste, en valeur absolue, inférieure à l'unité pour  $v$  compris dans l'intervalle  $(0, 1)$  si  $x > 1$  et  $tx < 1$ . Nous sommes ainsi conduit à une autre représentation par intégrale

$$P_n = \frac{(-1)^n \Gamma(n-\lambda-\mu)}{n! \Gamma(-\lambda) \Gamma(-\mu)} x^{n-\lambda} \int_0^1 [v + (1-v)x]^{\lambda+\mu-n} v^{-\mu-1} dv.$$

Cette égalité, que nous avons obtenue dans l'hypothèse  $x > 1$ , est valable pour toute valeur positive de  $x$ .

4. Si dans le développement (2) nous faisons les changements

$$\alpha = \beta(y + \sqrt{y^2-1}), \quad x = \frac{y - \sqrt{y^2-1}}{y + \sqrt{y^2-1}},$$

on obtient le développement

$$(17) \quad [1 + \beta(y + \sqrt{y^2-1})]^\lambda [1 + \beta(y - \sqrt{y^2-1})]^\mu = \Sigma \beta_n U_n$$

où

$$(18) \quad U_n = (y + \sqrt{y^2-1})^n P_n \left( \frac{y - \sqrt{y^2-1}}{y + \sqrt{y^2-1}}, \lambda, \mu \right).$$

En faisant dans la formule (14) le changement de variable  $v = \frac{u+1}{2}$  et en tenant compte de (18), on voit

que

$$U_n = \frac{(-1)^n 2^{\lambda+\mu+1} \Gamma(n-\lambda-\mu)}{n! \Gamma(-\lambda) \Gamma(-\mu)} \times \int_{-1}^{+1} (y-u\sqrt{y^2-1})^n (1-u)^{-\lambda-1} (1+u)^{-\mu-1} du.$$

Cette formule nous permet de séparer, dans  $U_n$ , la partie rationnelle et la partie irrationnelle.

En supposant  $\lambda = \mu$ , le premier membre de (17) devient  $(1+2\beta y + \beta^2)^\lambda$ , de sorte que les fonctions  $U_n$  se réduisent aux polynômes de Gegenbauer.

Passons à une autre suite de polynômes  $h$ .

5. Dans le développement (2) changeons  $\alpha$  en  $\alpha x$  et  $x$  en  $1 - \frac{1}{x}$ ; nous obtenons ainsi le développement

$$(19) \quad (1 + \alpha x)^\lambda [1 + \alpha(x-1)]^\mu = \Sigma \alpha^n Q_n(x, \lambda, \mu),$$

où

$$(20) \quad Q_n(x, \lambda, \mu) = x^n P_n\left(1 - \frac{1}{x}, \lambda, \mu\right).$$

Des relations obtenues pour les polynômes  $P_n$  on peut, à l'aide de la formule (20), déduire des relations en  $Q_n$ . En particulier de (8) et de (14) on déduit, en écrivant  $Q_n$  pour  $Q_n(x, \lambda, \mu)$ ,

$$(21) \quad (n+2)Q_{n+2} + [(n+1-\mu)(x-1) + (n+1-\lambda)x]Q_{n+1} + x(x-1)(n-\lambda-\mu)Q_n = 0,$$

$$Q_n = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(n-\lambda-\mu)}{\Gamma(-\lambda)\Gamma(-\mu)} \int_0^1 (x-v)^n (1-v)^{-\lambda-1} v^{-\mu-1} dv.$$

De cette dernière relation il résulte que

$$\frac{dQ_{n+1}}{dx} = (\lambda + \mu - n)Q_n,$$

ce qui nous montre que les polynômes  $Q_n$  forment une suite de M. Appell. Donc, à l'aide de la formule de

réurrence (21), on trouve l'équation différentielle

$$(22) \quad x(1-x)y'' + [\mu - n + 1 - (\lambda + \mu - 2n + 2)x]y' \\ + n(\lambda + \mu - n + 1)y = 0$$

à laquelle satisfait le polynome  $Q_n$ . Cette équation étant une équation de Gauss, le polynome  $Q_n$  sera un polynome  $h$  et l'on voit que

$$(23) \quad Q_n = (-1)^n \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)}{n!} \\ \times F(-n, \lambda + \mu + 1 - n, \mu + 1 - n, x).$$

6. Mettons, sans utiliser la formule de Jacobi, le polynome  $Q_n$  sous une forme analogue à (5). Partons pour cela du développement suivant les puissances de  $\alpha$ , de l'expression  $(1-x-\alpha)^\lambda(x+\alpha)^\mu$ , par la formule de Taylor, donc du développement

$$(24) \quad x^\mu(1-x)^\lambda \left[1 + \frac{\alpha}{x-1}\right]^\lambda \left[1 + \frac{\alpha}{x}\right]^\mu \\ = \sum \frac{\alpha^n}{n!} \left[ \frac{d^n}{d\alpha^n} [(1-x-\alpha)^\lambda(x+\alpha)^\mu] \right]_{\alpha=0}.$$

En remarquant que

$$\left[ \frac{d^n}{d\alpha^n} [(1-x-\alpha)^\lambda(x+\alpha)^\mu] \right]_{\alpha=0} = \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^\lambda x^\mu]$$

et en changeant dans le développement (24)  $\alpha$  en  $\alpha x(x-1)$  nous déduisons que

$$(25) \quad Q_n = \frac{(-1)^n}{n!} x^{n-\mu} (1-x)^{n-\lambda} \frac{d^n}{dx^n} [x^\mu(1-x)^\lambda].$$

En comparant les formules (23) et (25) on a la formule de Jacobi

$$F(-n, \lambda + \mu + 1 - n, \mu + 1 - n, x) \\ = \frac{x^{n-\mu}(1-x)^{n-\lambda}}{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)} \frac{d^n}{dx^n} [x^\mu(1-x)^\lambda],$$

formule que nous avons utilisée précédemment.

7. Les polynomes  $Q_n$  se relient d'une autre manière simple aux polynomes  $P_n$ . En effet, changeons dans la formule (23)  $\lambda$  et  $\mu$  respectivement en  $n - \lambda - \mu - 1$  et  $\lambda$ ; nous voyons alors, en tenant compte de (4), que

$$P_n(x, \lambda, \mu) = (-1)^n Q_n(x, n - \lambda - \mu - 1, \lambda).$$

Par suite, les deux relations

$$P_n(x, \lambda, \mu) = (-x)^n P_n\left(1 - \frac{1}{x}, n - \lambda - \mu - 1, \lambda\right),$$

$$Q_n(x, \lambda, \mu) = (-x)^n Q_n\left(1 - \frac{1}{x}, n - \lambda - \mu - 1, \lambda\right).$$

Les polynomes  $P_n$  et  $Q_n$  satisfont donc à une même équation fonctionnelle.

8. Nous avons vu que les polynomes  $Q_n$  forment une suite de M. Appell. Du développement (16) on déduit

$$\begin{aligned} & A e^{\alpha x} \int_0^1 e^{-\alpha \nu (1 - \nu)^{-\lambda - 1} \nu^{-\mu - 1}} d\nu \\ &= \sum \frac{x^n Q_n(x, \lambda, \mu)}{(\lambda + \mu)(\lambda + \mu - 1) \dots (\lambda + \mu - n + 1)}. \end{aligned}$$

La fonction génératrice, au sens de M. Appell, est

$$A \int_0^1 e^{-\alpha \nu (1 - \nu)^{-\lambda - 1} \nu^{-\mu - 1}} d\nu,$$

donc la fonction de Kummer

$$(27) \quad \sum \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\mu(\mu - 1) \dots (\mu - n + 1)}{(\lambda + \mu)(\lambda + \mu - 1) \dots (\lambda + \mu - n + 1)} \alpha^n.$$

9. Les seuls polynomes  $h_n$  formant une suite de M. Appell, sont les polynomes  $Q_n$ . En effet, les polynomes  $V_n$ , étant des polynomes  $h_n$ , ils doivent satisfaire

à l'équation différentielle

$$(28) \quad x(1-x)y'' + [\gamma_n - (\beta_n - n + 1)x]y' + n\beta_n y = 0,$$

$\beta_n$  et  $\gamma_n$  étant des fonctions de  $n$ . Ces polynômes formant une suite de M. Appell,  $V_{n-1}$  est égal, à un facteur constant près, à  $V'_n$ . En dérivant l'équation (28) par rapport à  $x$ , on voit que l'on doit avoir

$$\beta_n = \beta_{n-1} - 1 \quad \text{et} \quad \gamma_n = \gamma_{n-1} - 1.$$

Donc

$$\beta_n = \beta_0 - n \quad \text{et} \quad \gamma_n = \gamma_0 - n.$$

Desorteque, en prenant  $\beta_0 = \lambda + \mu + 1$  et  $\gamma_0 = \mu + 1$ , l'équation (28) devient identique à l'équation différentielle (22) des  $Q_n$ .

Nous allons considérer une dernière suite de polynômes  $h$ .

10. Nous déduirons cette nouvelle suite du développement (2) en changeant  $x$  en  $(1-x)$ . Posons

$$(1+\alpha)^\lambda [1+\alpha(1-x)]^\mu = \sum \alpha^n R_n(x, \lambda, \mu),$$

donc

$$R_n(x, \lambda, \mu) = P_n(1-x, \lambda, \mu).$$

De l'équation (6) on déduit l'équation différentielle

$$x(1-x)y'' - [\lambda + \mu - (n + \mu - 1)x]y' - n\mu y = 0$$

à laquelle satisfait le polynôme  $R_n(x, \lambda, \mu)$ . Donc

$$R_n(x, \lambda, \mu) = \frac{(\lambda + \mu)(\lambda + \mu - 1) \dots (\lambda + \mu - n + 1)}{n!} \\ \times F(-n, -\mu, -\lambda - \mu, x).$$

En appliquant la formule (26) de Jacobi, nous voyons que

$$R_n = \frac{(-1)^n}{n!} x^{\lambda+\mu+1} (1-x)^{n-\lambda} \frac{d^n}{dx^n} [x^{n-\lambda-\mu-1} (1-x)^\lambda].$$

Nous voyons, comme précédemment, que

$$\begin{aligned} P_n(x, \lambda, \mu) &= (-1)^n R_n(x, -\mu - \lambda + n - 1, \mu), \\ R_n(x, \lambda, \mu) &= (-1)^n R_n(1-x, -\mu - \lambda + n - 1, \mu), \\ P_n(x, \lambda, \mu) &= (-1)^n P_n(1-x, -\mu - \lambda + n - 1, \mu). \end{aligned}$$

Indiquons, enfin, la formule

$$\begin{aligned} R_n(x, \lambda, \mu) &= \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\Gamma(n - \lambda - \mu)}{\Gamma(-\lambda) \Gamma(-\mu)} \\ &\quad \times \int_0^1 (1 - \nu x)^n (1 - \nu)^{-\lambda-1} \nu^{-\mu-1} d\nu \end{aligned}$$

qui nous montre que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! R_n\left(\frac{x}{n}, \lambda, \mu\right)}{(\lambda + \mu)(\lambda + \mu - 1) \dots (\lambda + \mu - n + 1)} \\ = A \int_0^1 e^{-\nu x} (1 - \nu)^{-\lambda-1} \nu^{-\mu-1} d\nu. \end{aligned}$$

L'intégrale du second membre a pour expression la fonction (27). Les polynomes  $R_n$  se réduisent donc, dans un cas limite, aux fonctions de Kummer.

Nous allons considérer à présent d'autres suites de polynomes, qui ne sont plus des polynomes  $h$ , mais qui se relieut d'une manière très simple aux polynomes  $P_n$ ,  $Q_n$  et  $R_n$ .

11. Changeons, dans le développement (2),  $x$  en  $\frac{x}{\mu}$  et faisons ensuite croître  $\mu$  indéfiniment. Nous sommes conduit au développement

$$(29) \quad (1+x)^\lambda e^{xx} = \Sigma x^n A_n(x, \lambda),$$

où

$$A_n(x, \lambda) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} P_n\left(\frac{x}{\mu}, \lambda, \mu\right),$$

donc, d'après la formule (3),

$$A_n(x, \lambda) = \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)}{n!} + \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+2)}{(n-1)!} \frac{x}{1} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

De la relation (5) il résulte que

$$(30) \quad A_n(x, y) = \frac{1}{n!} x^{n-\lambda} e^{-x} \frac{d^n x^\lambda e^x}{dx^n};$$

et de l'équation (6) on obtient l'équation différentielle

$$xy'' + (\lambda + 1 - n + x)y' - ny = 0$$

à laquelle satisfait le polynome  $A_n$ .

De la formule (14) on peut déduire la représentation par intégrale du polynome  $A_n$ . Il est plus simple de partir de l'égalité (12), qui peut s'écrire, après avoir multiplié ses deux membres par  $e^{\alpha x}$ ,

$$(1 + \alpha)^\lambda e^{\alpha x} = \frac{1}{\Gamma(-\lambda)} \int_0^\infty e^{-u} e^{\alpha(x-u)} u^{-\lambda-1} du,$$

de sorte que, en développant les deux membres d'après les puissances de  $\alpha$ , on obtient la formule

$$(31) \quad A_n(x, \lambda) = \frac{1}{n! \Gamma(-\lambda)} \int_0^\infty e^{-u} u^{-\lambda-1} (x-u)^n du,$$

$|\alpha| < 1$ , formule que l'on peut vérifier facilement et sur laquelle on voit que les polynomes  $A_n(x, \lambda)$  forment une suite de M. Appell.

12. Si dans le développement (2) nous changeons  $\alpha$  en  $\frac{\alpha}{\lambda}$  et  $x$  en  $\lambda x$  et nous faisons ensuite croître  $\lambda$  indéfiniment, nous avons le développement

$$(32) \quad e^{\alpha(1+\alpha x)^\mu} = \sum \alpha^n B_n(x, \mu),$$

où

$$B_n(x, \mu) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{P_n(\lambda x, \lambda, \mu)}{\lambda^n}.$$

Donc, d'après (3),

$$B_n(x, \mu) = \frac{1}{n!} + \frac{\mu}{(n-1)!} \frac{x}{1} + \frac{\mu(\mu-1)}{(n-2)!} \frac{x^2}{2!} + \dots \\ + \mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1) \frac{x^n}{n!}.$$

De la formule (5) écrite sous la forme

$$P_n = \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+\mu+1} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\lambda+\mu+1} \\ \times \frac{d^n}{dx^n} \left[ x^{n-\mu-1} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{n-\lambda-\mu-1} \right]$$

on déduit

$$(33) \quad B_n(x, \mu) = \frac{(-1)^n}{n!} x^{n+\mu-1} e^{-\frac{1}{x}} \frac{d^n x^{n-\mu-1} e^{\frac{1}{x}}}{dx^n}.$$

En faisant  $\mu = 0$ , dans cette formule, on retrouve une formule d'Halphen.

De l'équation (5) on obtient l'équation différentielle

$$x^2 y'' - [1 + (n + \mu - 1)x] y' + n\mu y = 0$$

à laquelle satisfait le polynome  $B_n$ .

Entre les polynomes précédents  $A_n$  et les polynomes  $B_n$  il y a la relation simple

$$B_n(x, \lambda) = x^n A_n\left(\frac{1}{x}, \lambda\right),$$

de sorte que de la formule (31) on déduit

$$(34) \quad B_n(x, \lambda) = \frac{1}{n! \Gamma(-\lambda)} \int_0^\infty e^{-u} u^{-\lambda-1} (1-xu)^n du;$$

d'où il résulte l'égalité limite

$$\lim_{n=\infty} n! B_n \left( \frac{x}{n}, \lambda \right) = \frac{1}{\Gamma(-\lambda)} \int_0^\infty e^{-u(1+x)} u^{-\lambda-1} du;$$

donc, en tenant compte de (12),

$$\lim_{n=\infty} n! B_n \left( \frac{x}{n}, \lambda \right) = (1+x)^\lambda.$$

pour  $|x| < 1$ .

13. Écrivons le développement (2) sous la forme

$$(1+\alpha)^\gamma \left[ 1 + \frac{\alpha x}{\mu(1+\alpha)} \right]^\mu = \Sigma \alpha^n P_n \left( 1 + \frac{x}{\mu}, \gamma - \mu, \mu \right)$$

et faisons ensuite croître  $\mu$  indéfiniment. Nous sommes conduit au développement

$$(1+x)^\gamma e^{\frac{\alpha x}{1+\alpha}} = \Sigma \alpha^n C_n(x, \gamma).$$

Les polynomes  $C_n(x, \gamma)$  sont les polynomes de Kummer (1) et se relie au polynome  $P_n$  par l'égalité limite

$$C_n(x, \gamma) = \lim_{\mu=\infty} P_n \left( 1 + \frac{x}{\mu}, \gamma - \mu, \mu \right).$$

De la formule (5) on déduit la relation connue

$$C_n(x, \gamma) = (-1)^n \frac{x^{1+\gamma} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n-\gamma-1} e^{-x}),$$

(1) Voir la *Monographie des polynomes de Kummer*, par M. P. HUMBERT, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, décembre 1922.

laquelle comparée à (30) nous montre que

$$C_n(x, \gamma) = (-1)^n A_n(-x, n - \gamma - 1).$$

Donc, en tenant compte de (31),

$$(35) \quad C_n(x, \gamma) = \frac{1}{n! \Gamma(\gamma - n + 1)} \int_0^\infty e^{-u} u^{\gamma-n} (x+u)^n du,$$

formule qui est peut-être nouvelle.

Nous allons considérer une dernière suite de polynomes que nous déduirons du développement (19).

14. Écrivons le développement (19) sous la forme

$$(1 + \alpha x)^\lambda \left[ 1 - \frac{\alpha}{\mu(1 + \alpha x)} \right]^\mu = \sum \left( \frac{\alpha}{\mu} \right)^n Q_n(\mu x, \lambda - \mu, \mu),$$

et faisons croître  $\mu$  indéfiniment. Nous sommes conduit au développement

$$(1 + \alpha x)^\lambda e^{\frac{-\alpha x}{1 + \alpha x}} = \sum \alpha^n D_n(x, \lambda),$$

où

$$D_n(x, \lambda) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu^n} Q_n(\mu x, \lambda - \mu, \mu).$$

De même que nous avons déduit la formule (33) de (5), on déduit de (25) la formule

$$D_n(x, \lambda) = \frac{e^{-\frac{1}{\alpha} x} x^{2n-\lambda}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left( x^\lambda e^{\frac{1}{\alpha} x} \right).$$

De l'équation différentielle (22) on obtient l'équation

$$x^2 y'' - [1 + (2n - \lambda - 2)x] y' + n(n - \lambda - 1)y = 0$$

à laquelle satisfait le polynome  $D_n(x, \lambda)$ .

Les polynomes  $D_n$  se rattachent aux polynomes  $C_n$

et  $B_n$  par les relations simples

$$D_n(x, \lambda) = x^n C_n \left( -\frac{1}{x}, \lambda \right),$$

$$D_n(x, \lambda) = (-1)^n B_n(x, n - \lambda - 1).$$

A l'aide de ces relations on déduit, soit de (34), soit de (35) la représentation par intégrale

$$D_n(x, \lambda) = \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\lambda - n + 1)} \int_0^\infty e^{-u} u^{\lambda-n} (1 - ux)^n du.$$

15 Pour terminer, remarquons que des suites de polynômes considérées, on peut déduire encore d'autres suites. Partons, par exemple, du développement (2). On a

$$(1 + x)^\lambda [(1 + \alpha x)^\mu - 1] = \Sigma x^n \left[ P_n - \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)}{n!} \right].$$

En divisant les deux membres de cette égalité par  $\mu$  et en faisant ensuite tendre  $\mu$  vers zéro, nous aurons

$$(1 + x)^\lambda \text{Log}(1 + \alpha x) = \Sigma x^n E_n(x, \lambda),$$

où

$$E_n(x, \lambda) = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1}{\mu} \left[ P_n - \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)}{n!} \right].$$

Au polynôme  $P_n$  se rattachent encore les polynômes qui proviennent du développement des expressions

$$(1 + \alpha x)^\mu \text{Log}(1 + x), \quad \text{Log}[1 + x](1 + \alpha x).$$

A tous les autres polynômes considérés se rattachent, de la même manière, d'autres suites de polynômes. Leur étude ne nous paraît pas présenter un intérêt particulier.

Sur le développement des fonctions en séries des polynômes considérés, de même que sur l'extension, au cas de plusieurs variables, de ces polynômes, nous nous proposons de revenir.

**SUR L'ENSEIGNEMENT DES NOTIONS RELATIVES AUX INFINIMENT GRANDS ET AUX INFINIMENT PETITS DANS LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES ;**

PAR PAUL LÉVY.

---

Les examens d'admission à l'École des Mines m'ont donné l'occasion de constater l'extrême difficulté qu'ont la plupart des élèves, même des bons élèves, à résoudre les problèmes les plus simples dans lesquels interviennent les notions de quantités infiniment petites et infiniment grandes. Il y a un singulier contraste entre les résultats très médiocres obtenus en général sur ces questions et les résultats au contraire très satisfaisants obtenus pour d'autres parties du programme. En réfléchissant à cette circonstance, j'ai été conduit à penser qu'il ne fallait pas conclure que la notion d'infini dépassait ce que peuvent en général comprendre les élèves de Mathématiques spéciales, mais qu'on pourrait obtenir des résultats plus satisfaisants en modifiant les méthodes d'enseignement. Je serais heureux si les remarques qui suivent pouvaient décider certains des professeurs qui ne l'ont pas encore fait, à adopter des méthodes nouvelles.

L'idée directrice de ces remarques est qu'il faut toujours s'efforcer de mettre en évidence le véritable caractère des problèmes qui se posent, et, s'ils ne comportent pas de formules les résolvant dans tous les cas comme lorsqu'il s'agit de résoudre une équation du second degré, ne pas remplacer l'exposé de la difficulté par une règle plus ou moins bien adaptée à la solution

de cette difficulté et que l'élève appliquera sans comprendre. Le souci de ne rien dire que de parfaitement précis explique l'apparition et l'abus de ces règles. Mais elles constituent un bâton d'aveugle donné à quelqu'un à qui l'on a mis d'abord un bandeau sur les yeux; sans doute en tâtant le sol avec son bâton évitera-t-il toute chute; mais il n'atteindra le but que par hasard. Qu'on lui apprenne à ouvrir les yeux, à marcher vers le but, à ne pas trop craindre la chute, mais à savoir ensuite se relever, c'est-à-dire remplacer le raisonnement peu précis et parfois à moitié exact seulement dont il se sera d'abord contenté par un raisonnement rigoureux, ne prêtant à aucune objection et qui sera obtenu en général tout naturellement en précisant le raisonnement initial! Je pense d'ailleurs montrer dans la suite que les explications pouvant conduire à ce résultat comportent des règles aussi précises que celles que je voudrais remplacer.

A propos des infiniment petits, après avoir introduit la notion de l'ordre de grandeur relatif et celle de quantités équivalentes, la notion fondamentale, sur laquelle il y a lieu d'insister, est celle de la *valeur principale* d'une quantité infiniment petite ou infiniment grande, fonction d'un infiniment petit ou infiniment grand principal  $x$ . On entend généralement par là une expression de la forme  $cx^\alpha$  équivalente à la fonction étudiée. Dans ce sens les quantités infiniment petites ou infiniment grandes n'ont pas toujours une valeur principale; on peut alors introduire la notion de *valeur principale généralisée*, expression aussi simple que possible équivalente à la fonction étudiée. Ainsi la fonction

$$\log(x + \log x) = \log x + \log \left( 1 + \frac{\log x}{x} \right) = \log x + \varepsilon$$

( $x$  étant infiniment grand, et par suite  $\varepsilon$  infiniment petit) a pour valeur principale  $\log x$ , quantité qui ne peut pas être simplifiée et dont il faut savoir qu'elle croît moins rapidement que n'importe quelle puissance de  $x$ . L'intégrale

$$(1) \quad \int \frac{e^x}{x} dx,$$

pour  $x$  infini (positif ou négatif, à condition dans ce dernier cas que la constante d'intégration soit choisie de manière que l'intégrale s'annule à l'infini), a pour valeur principale  $\frac{e^x}{x}$ , comme on le voit aisément par application de la règle de l'Hospital.

De la notion de valeur principale on passe à celle de développement en série, en écrivant la fonction étudiée sous la forme

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + R_n(x),$$

chaque terme étant la valeur principale de l'erreur commise en prenant la somme des termes précédents comme valeur approchée de  $f(x)$ . Le reste  $R_n(x)$  est alors infiniment petit par rapport à  $u_n(x)$ , et a pour valeur principale  $u_{n+1}(x)$ .

Il arrive souvent que ce développement puisse être poursuivi indéfiniment, et il importe de bien distinguer la notion de développement en série ainsi comprise de la notion de série. Une série de fonctions peut ne pas constituer un développement en série, et un développement en série conserve tout son intérêt, au point de vue qui précède, même s'il donne lieu à une série divergente. Il ne serait peut-être pas inutile d'indiquer un exemple, tel que celui de l'intégrale (1), représentable à l'infini par le développement divergent

$$e^x \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1 \cdot 2}{x^3} + \dots + \frac{n!}{x^{n+1}} + \dots \right),$$

comme on le voit aisément en appliquant la règle de l'Hospital.

Les développements en séries sont souvent des développements suivant les puissances croissantes de l'infiniment petit principal. La formule de Taylor montre qu'un tel développement est possible lorsque la fonction considérée admet des dérivées continues. Les fonctions usuelles vérifient toutes cette condition, sauf en certains points singuliers.

D'après cela, l'emploi de la formule de Taylor semblerait être le moyen naturel de former les développements en séries. On n'aurait qu'à calculer les dérivées successives. Mais en général on n'a à former ces développements en séries que pour des points particuliers, pour lesquels il y a des simplifications, et le meilleur moyen de calculer les premières dérivées est au contraire de former les premiers termes du développement en série. Les candidats devraient s'en souvenir lorsqu'on leur demande la tangente ou le rayon de courbure en un point remarquable d'une courbe.

De même qu'on étudie les principales fonctions usuelles pour apprendre à les dériver, il faut donc les étudier à nouveau au point de vue des développements en séries.

Cette étude est faite d'abord pour les fonctions rationnelles. C'est la théorie de la multiplication et de la division des polynomes. Il faut insister (plus qu'on ne semble le faire généralement) sur la simplicité du résultat lorsqu'on ne veut que la valeur principale de l'expression étudiée. La valeur principale d'un produit ou d'un quotient s'obtient en remplaçant chaque facteur par sa valeur principale. Les élèves savent rarement appliquer ce résultat.

Si l'on veut d'autres termes du développement en

série, il y a avantage à mettre d'abord en facteur la valeur principale; on n'a plus qu'à multiplier ou diviser des expressions dont le terme principal est l'unité. Si l'on se borne à chercher le second terme, on a

$$\frac{(1+ax+\dots)(1+a'x+\dots)}{(1+bx+\dots)(1+b'x+\dots)} = 1 + (a+a'-b-b')x + \dots,$$

formule que l'on devrait savoir appliquer sans hésiter. Si l'on veut un plus grand nombre de termes, on appliquera la théorie générale de la division, ou la formule qui donne  $(1+bx)^{-1}$ , ou plus généralement  $(1+bx)^{-p}$ , s'il y a au dénominateur plusieurs facteurs identiques.

Il faut passer ensuite aux fonctions algébriques exprimables par radicaux. Si l'on n'est pas dans le voisinage d'un point singulier, c'est-à-dire d'un point où la quantité sous le radical est nulle ou infinie, la quantité à étudier se ramène nécessairement, après mise en facteur d'une constante convenable, à la forme  $(1+\varepsilon)^\alpha$ , où  $\varepsilon$  est infiniment petit; on peut la développer. L'on traitera ensuite le cas des points singuliers des mêmes fonctions; on est encore ramené à la forme  $(1+\varepsilon)^\alpha$ , mais cette fois après mise en facteur d'une puissance fractionnaire convenable de l'infiniment petit principal, de sorte que l'on a un développement suivant les puissances fractionnaires de cet infiniment petit; il ne rentre pas dans la formule de Taylor.

Passons à la fonction exponentielle. Le développement de  $e^\varepsilon$ ,  $\varepsilon$  étant infiniment petit, est bien connu. Les élèves commettent souvent l'erreur d'appliquer la même formule à  $e^z$ ,  $z$  étant une fonction de  $x$  qui n'est pas infiniment petite. La formule ainsi écrite

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots,$$

est bien exacte, mais ne constitue pas un développe-

ment suivant les puissances croissantes de l'infiniment petit  $z - z_0 = \varepsilon$ , et par suite de  $x$ . Il faut remplacer  $e^z$  par  $e^{z_0} \times e^\varepsilon$ . Le premier facteur est une constante, et le second se développe sans difficulté. En d'autres termes, c'est la formule de Taylor, et non celle de Maclaurin, qu'il faut appliquer.

Cela ne s'applique pas si l'exposant est infini. L'expression  $e^z$ , pour  $z$  infini, est une quantité d'un type nouveau dont il faut savoir qu'elle devient infinie plus rapidement que n'importe quelle puissance de l'exposant. Les élèves le savent, mais ils n'ont pas bien compris en général que c'est cette remarque qu'il faut utiliser, sans chercher aucun développement en série, lorsque l'exposant est infini, et qu'au contraire la méthode des développements en série s'applique lorsque l'exposant a une limite finie.

L'exposant  $z$  peut d'ailleurs être une fonction quelconque de  $x$ , et cela introduit des infiniment grands de types nouveaux, qu'il faut savoir classer les uns par rapport aux autres et par rapport à ceux déjà connus; ainsi il est évident que  $e^{x^2}$  l'emporte sur  $e^x$  (pour  $x$  infini positif); que  $e^{px}$  l'emporte de même sur  $e^{qx}$  si  $p > q$ ; que  $e^{e^x}$  l'emporte sur les quantités précédentes; au contraire  $e^{1/\log x}$  croît moins rapidement que les quantités précédentes, mais l'emporte sur les puissances de  $x$  (comme on le voit en comparant les logarithmes de ces expressions).

Si  $z$  est de la forme  $P(x) + \varepsilon$ ,  $P(x)$  étant un polynome et  $\varepsilon$  une quantité infiniment petite, l'exponentielle a pour valeur principale  $e^{P(x)}$ , et en développant  $e^\varepsilon$  on obtient un développement en série généralisée; mais il faut éviter de dire qu'on développe  $e^{P(x)}$ ; aucun développement ne peut donner une idée meilleure de la croissance de cette fonction.

Des remarques analogues s'appliquent si  $z$  devient infini pour une valeur finie de  $x$ . Soit par exemple à construire la courbe

$$(2) \quad y = f(x)e^z,$$

où  $f(x)$  et  $z$  sont des fonctions rationnelles de  $x$ , cette dernière devenant infinie et changeant de signe pour  $x = x_0$ . L'infiniment petit principal serait

$$x - x_0 = \varepsilon;$$

mais il n'est pas utile de le mettre en évidence; il suffit de raisonner sur l'infiniment grand  $z$ . Les quantités  $f(x)$  et  $z$  étant des fonctions algébriques de  $x$ , leur valeur principale est une puissance de  $z$ , et l'exponentielle, l'emportant sur cette puissance, détermine la valeur limite non seulement de  $y$ , mais de  $\frac{y'}{x-x_0}$  et plus généralement de  $\frac{y}{(x-x_0)^n}$ . On a donc d'un côté une branche infinie, et de l'autre un point d'arrêt, sur l'axe des  $x$ , avec tangente horizontale. Les élèves savent quelquefois qu'il faut chercher les valeurs de  $x$  qui rendent l'exposant infini; mais ils croient toujours qu'il en résulte seulement une branche infinie. Ils ignorent absolument cette circonstance très générale du point d'arrêt avec tangente horizontale, et la difficulté avec laquelle ils trouvent en général cette tangente prouve qu'on n'insiste pas encore assez sur les applications de cette formule: l'exponentielle l'emporte sur les puissances de l'exposant.

Les constructions de courbes, qui obligent à se débrouiller dans des conditions assez variées, ont une grande valeur pédagogique (sans parler de leur valeur pour l'examineur qui y trouve un grand nombre de questions diverses, et qui peut mettre le candidat aux

prises avec des difficultés qui doivent lui être familières, sans qu'il puisse en avoir la solution par une formule unique, apprise par cœur, et applicable dans tous les cas). Il ne faut pas craindre d'insister sur les constructions de courbes au détriment de parties moins utiles du cours, et il semble qu'un ou deux exemples de courbes du type (2) devraient trouver place dans le cours ou dans les exercices traités en classe.

Passons à la fonction  $\log z$ . Si  $z_0$  est la valeur de  $z$  pour  $x = x_0$ , on pose  $z = z_0 (1 + \eta)$ , et la formule

$$\log z = \log z_0 + \log(1 + \eta)$$

donne le développement cherché. Si  $z$  est nul ou infini au point  $x_0$ , ce point est un point singulier, et l'on ne peut pas avoir un développement ordinaire; mais si  $z$  a une valeur principale de la forme  $a\varepsilon^p$  (en posant toujours  $\varepsilon = x - x_0$ ), on posera  $z = a\varepsilon^p(1 + \eta)$ , et la formule

$$\log z = p \log \varepsilon + \log a + \log(1 + \eta)$$

donne un développement en série généralisé, dans lequel le premier terme constitue un infiniment grand d'un type nouveau, croissant moins rapidement que n'importe quelle puissance de  $\frac{1}{\varepsilon}$ . Des remarques analogues s'appliquent naturellement lorsqu'on a à étudier l'allure de  $\log z$  pour  $x$  infini. Si  $z$  a pour valeur principale  $ax^p$ , on posera  $z = ax^p(1 + \eta)$ .

Tout ce qui vient d'être dit pour les fonctions exponentielles et logarithmiques peut être répété pour les fonctions circulaires directes et inverses. Ainsi les développements de  $\cos z$  et  $\sin z$  sont bien connus si  $z$  est infiniment petit; si  $z$  a une limite  $z_0$ , on posera  $z = z_0 + \varepsilon$ , on utilisera les formules

$$\begin{aligned} \cos(z_0 + \varepsilon) &= \cos z_0 \cos \varepsilon - \sin z_0 \sin \varepsilon, \\ \sin(z_0 + \varepsilon) &= \sin z_0 \cos \varepsilon + \cos z_0 \sin \varepsilon, \end{aligned}$$

et l'on remplacera  $\cos \varepsilon$  et  $\sin \varepsilon$  par leurs développements.

La plupart des expressions que l'on peut donner à étudier aux élèves de Mathématiques spéciales sont des combinaisons des fonctions dont nous venons de parler. Une mention spéciale doit être faite pour l'expression  $u^\nu$ , qui n'est pas de cette forme, mais s'y réduit si l'on écrit  $e^{\nu \log u}$ .

Cela n'est d'ailleurs pas un artifice. La théorie des logarithmes a précisément pour objet de faciliter le calcul des expressions où figurent des objets et des exposants. C'est ne pas l'avoir comprise que d'hésiter à l'utiliser lorsqu'on a une difficulté avec une expression de la forme  $u^\nu$ . Écrire  $y = e^{\nu \log u}$  a l'air d'un artifice, et cela plaît aux élèves. Je préfère, surtout si les calculs à effectuer sont un peu compliqués, que l'on prenne franchement les logarithmes en écrivant

$$\log y = \nu \log u,$$

et, qu'une fois les transformations nécessaires effectuées, on remonte du logarithme au nombre.

L'ignorance des élèves, même des bons élèves, est prodigieuse dès qu'il s'agit d'utiliser les logarithmes comme il vient d'être indiqué. D'abord ils s'imaginent souvent que pour avoir la valeur principale de  $y$  il suffit d'avoir la valeur principale de  $\log y$ . Pourtant il n'est pas difficile de comprendre qu'il s'agit d'arriver à une formule de la forme

$$y = y_1 e^\varepsilon,$$

$y_1$  étant la valeur principale cherchée et  $\varepsilon$  une quantité infiniment petite. La formule précédente s'écrivant

$$\log y = \log y_1 + \varepsilon,$$

on voit qu'il s'agit de calculer  $\log y$  avec une erreur infiniment petite.

Ensuite il s'agit de remonter du logarithme au nombre. Les élèves devraient savoir sans hésiter que

$$\log y = \alpha \log a + \beta \log b - \gamma \log c + \varepsilon$$

donne

$$y = \frac{a^\alpha b^\beta}{c^\gamma} e^\varepsilon.$$

Beaucoup écrivent pour  $y$  une somme au lieu d'un produit. Lorsqu'ils ont évité ou corrigé cette erreur, ils laissent chaque facteur sous la forme  $e^{\alpha \log a}$ ; il n'y a pas un élève sur cent qui ait spontanément l'idée de remplacer cette expression par  $a^\alpha$ . Cela se rattache d'ailleurs à une circonstance assez générale : ils ne savent pas qu'il faut constamment au cours d'un calcul rechercher les simplifications qui se produisent, des expressions très simples se présentant souvent sous une forme très compliquée. Dans la composition de géométrie analytique donnée cette année au concours d'admission de l'École des Mines, la moitié des élèves ont été arrêtés presque au début parce qu'ils n'ont pas remplacé  $\frac{1}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}$  par  $e^{-x}$ , ce qui a remplacé, pour la suite, des calculs très simples par des calculs inextricables. Mais dans le cas indiqué il y a autre chose; ils ne sont pas assez familiarisés avec cette double opération : prendre le logarithme, puis remonter du logarithme au nombre. Ils savent sans doute le faire s'il s'agit de calculs numériques; ils en deviennent incapables dès qu'il s'agit de formules d'analyse.

Ce qui précède m'amène à parler des expressions indéterminées qui se présentent sous la forme  $u^v$ . L'idée naturelle, d'après ce qui précède, qu'il s'agisse d'expressions de la forme  $1^\infty$ ,  $\infty^0$ , ou  $0^0$ , est de prendre

les logarithmes. On est toujours ramené à la forme plus simple  $0 \times \infty$ .

Un artifice dont on abuse, lorsqu'il s'agit de la première de ces formes, consiste à écrire

$$(1+x)^\beta = \left[ (1+x)^{\frac{1}{\alpha}} \right]^{\alpha\beta} \rightarrow e^{\alpha\beta}.$$

A quoi bon? N'arrive-t-on pas tout naturellement au même résultat en prenant les logarithmes, utilisant le fait connu que la valeur principale de  $\log(1+x)$  est  $x$ , puis remontant du logarithme au nombre?

En 1922, les candidats à l'École des Mines ont eu à trouver la valeur principale de l'expression

$$u_n = \left( 1 - \frac{p}{\log n} \right)^{\log^2 n},$$

et en déduire les conditions de convergence de la série de terme général  $u_n$ . Il suffisait, par application des principes qui précèdent, d'écrire

$$\log u_n = \log^2 n \log \left( 1 - \frac{p}{\log n} \right) = -p \log n - \frac{p^2}{2} - \varepsilon,$$

$\varepsilon$  étant infiniment petit pour  $n$  infini, d'où, en remontant du logarithme au nombre

$$(3) \quad u_n = \frac{1}{n^p} e^{-\frac{p^2}{2}} e^{-\varepsilon}.$$

La série est donc convergente si  $p > 1$ .

L'emploi de l'artifice que je combats a tout naturellement conduit les élèves à croire que la valeur principale de  $u_n$  était  $e^{-p \log n}$ , négligeant ainsi le facteur  $e^{-\frac{p^2}{2}}$  (ce qui, heureusement pour eux, ne changeait pas les conditions de convergence). Parmi les 50 élèves (sur 400) qui ont pris les logarithmes,

40 environ sont arrivés finalement au même résultat erroné parce qu'ils ont cru qu'il suffisait de prendre la valeur principale de  $\log u_n$ . Ceux qui n'ont pas commis cette erreur ont échoué en général devant la question de la convergence parce qu'ils n'ont pas su remplacer  $e^{-p \log n}$  par  $\frac{1}{n^p}$ . Si mes souvenirs sont exacts, un seul candidat a écrit correctement le résultat sous la forme (3).

Considérons maintenant les expressions indéterminées qui se présentent sous la forme d'une somme ou d'une différence de plusieurs quantités qui deviennent infinies. Ce qui est à retenir, en vue des applications, est ceci : on compare l'ordre de grandeur des différentes quantités en question ; si l'une d'elles l'emporte sur les autres, l'expression totale devient infinie, le terme en question, qui est le terme principal, donnant son signe. S'il y a plusieurs termes principaux, on regarde d'abord si leurs valeurs principales se détruisent exactement ; sinon, la difficulté est résolue. Si oui, on effectue des développements en série, que l'on poussera jusqu'au moment où l'on trouvera un terme non nul.

Que font les candidats ? Ils cherchent à mettre un terme en facteur, et pas toujours le terme principal.

Sans doute cela est-il utile pour démontrer le théorème sur lequel repose la méthode qui précède. Mais à quoi bon recommencer la démonstration d'un théorème d'analyse chaque fois qu'on a à l'appliquer ? Les candidats ne le font pas lorsqu'il s'agit d'un polynôme ; je ne conçois pas davantage qu'ils hésitent à donner la valeur principale, pour  $x$  infini, d'une expression telle que

$$x - \sqrt{x} - \log x.$$

Sans doute arrive-t-il, dans certaines questions d'analyse, que le résultat ne soit pas simple et que ce soit la méthode de calcul qu'il faille s'efforcer de retenir. Dans le cas indiqué c'est le contraire, et c'est le résultat simple auquel on aboutit que le professeur doit s'efforcer de mettre en évidence.

Il y a environ 20 ans, il y avait certains théorèmes que l'on n'avait pas le droit d'appliquer sans en répéter chaque fois leur démonstration. Je me souviens d'avoir été fort malmené par un répétiteur pour avoir écrit : «  $x^2 = a^2$ , donc  $x = \pm a$  ». J'avais omis d'accomplir un rite sacré et je n'obtins mon pardon qu'en réparant bien vite mon erreur. Le même rite devait s'accomplir chaque fois qu'on appliquait les théorèmes concernant les limites; il fallait mettre en évidence la quantité  $\epsilon$  telle que..., etc. De là les complications invraisemblables que l'on introduisait dans la démonstration si simple du fait que  $(1 + \frac{1}{m})^m$  tende vers  $e$ ; j'ai pu constater cette année aux examens que ces complications étaient encore conservées par certains professeurs, et je n'ai jamais obtenu la démonstration véritablement simple, telle que je la conçois (qui diffère d'ailleurs assez peu de celle qu'on donne maintenant dans la plupart des classes de Spéciales).

J'ai voulu profiter de l'occasion qui se présentait pour combattre l'erreur qui consiste à interdire d'appliquer certains théorèmes sans en répéter la démonstration. Je ne crois pas d'ailleurs qu'il faille rattacher à cette erreur celle que je signalais tout à l'heure concernant la forme indéterminée  $\infty - \infty$ , mais plutôt à un effort insuffisant pour comprendre et expliquer la véritable nature des questions où interviennent des quantités devenant infinies, et mettre en évidence ce

fait essentiel que certaines expressions infinies l'emportent sur d'autres.

(A suivre.)

**SUR LES ÉQUATIONS DE LAGRANGE  
DU MOUVEMENT D'UN SYSTÈME NON HOLONOME :**

PAR ÉT. DELASSUS.

1. Pour ne pas interrompre les raisonnements, nous commencerons par démontrer une petite propriété des formes quadratiques.

Soit  $F(x)$  une forme quadratique homogène des variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , forme dont le discriminant n'est pas nul et qui est supposée définie, son signe constant pouvant être indifféremment *plus* ou *moins*.

Soient  $\alpha_1(x), \dots, \alpha_p(x)$  des fonctions linéaires et homogènes des  $x$ , fonctions en nombre moindre que  $n$  et que nous supposerons distinctes.

Nous considérons la forme bilinéaire

$$R(x, y) = \Sigma y \alpha(x) = \Sigma x \beta(y)$$

et nous nous proposons de montrer que la forme quadratique homogène à  $n + p$  variables  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p$

$$\Phi(xy) = F(x) + R(x, y)$$

est une forme à discriminant non nul.

Comme les hypothèses et la propriété à démontrer se conservent par un changement linéaire quelconque de variables, changement supposé non illusoire et à coefficients réels, on peut toujours, comme cela ré-

sulte de la théorie élémentaire de la décomposition en carrés, supposer que  $F$  a la forme réduite

$$F = \varepsilon(x_1^2 + \dots + x_n^2) \quad (\varepsilon = \pm 1).$$

On pourra alors écrire

$$\Phi(xy) = \sum_1^n \varepsilon \left[ x_i + \frac{\varepsilon}{2} \beta_i(y) \right]^2 - \frac{\varepsilon}{4} \sum_1^n [\beta_i(y)]^2.$$

La première somme est formée de  $n$  carrés indépendants et tout sera démontré si nous prouvons que la seconde, qui est une fonction  $\Psi$  des  $y$ , est réductible à une somme de  $p$  carrés indépendants ou, ce qui revient au même, que son discriminant n'est pas nul.

Si ce discriminant était nul, on pourrait trouver des valeurs des  $y$  non toutes nulles, annulant les  $\frac{\partial \Psi}{\partial y}$ , donc, en vertu de la formule d'Euler, annulant  $\Psi$ , donc aussi, en vertu de la forme de  $\Psi$  comme somme effective de carrés réels, annulant toutes les fonctions  $\beta$ . Pour ces valeurs des  $y$  non toutes nulles on aurait donc

$$\sum x \beta(y) \equiv 0$$

quels que soient les  $x$ , et cette identité écrite sous la forme

$$\sum y \alpha(x) \equiv 0$$

exprimerait que les  $\alpha(x)$  ne sont pas indépendantes, ce qui est contraire à l'hypothèse.

L'hypothèse utilisée que  $F$  a un signe constant est d'ailleurs indispensable, sans elle la propriété de  $\Phi$  n'existerait pas. On le voit immédiatement sur l'exemple simple obtenu en prenant

$$F = x_1 x_2, \quad R = y_1 x_1.$$

2. Le principe de D'Alembert conduit aux équations de Lagrange en montrant que les fonctions  $q(t)$  qui définissent le mouvement du système matériel doivent vérifier les équations de Lagrange qui apparaissent ainsi en quelque sorte comme une condition nécessaire.

Il y a donc une réciproque à démontrer et l'on se borne généralement à la considérer comme évidente parce que les équations de Lagrange sont linéaires par rapport aux  $q''$ , donc déterminent sans ambiguïté les  $q$  quand on se donne les valeurs initiales  $q_0$  et  $q'_0$ . Le raisonnement toutefois n'est rigoureux qu'à condition de montrer que ces équations linéaires aux  $q''$  sont toujours résolubles sans jamais présenter le cas d'impossibilité ou le cas d'indétermination.

Pour un système holonome à paramètres indépendants la démonstration est immédiate;  $T_2$  étant la portion du second degré de la force vive, les  $q''$  figurent dans les équations de Lagrange par les  $\frac{\partial T_2}{\partial q''}$  en entendant par là les dérivées  $\frac{\partial T_2}{\partial q'}$  où l'on a mis les  $q''$  à la place des  $q'$ , le déterminant des inconnues dans nos équations linéaires n'est autre que le discriminant de  $T_2$  et l'on sait qu'il n'est jamais nul.

Nous remarquerons que  $T_2$  possède trois propriétés essentielles :

- 1° Son discriminant n'est jamais nul;
  - 2°  $T_2$  a un signe constant;
  - 3° Ce signe est le signe plus,
- et que la démonstration indiquée ne fait intervenir que la première.

3. Dans le cas des systèmes non holonomes ou dans celui des systèmes holonomes avec des paramètres non

ramenés au nombre minimum, nous avons affaire encore à des équations linéaires, mais avec des inconnues auxiliaires qui sont les multiplicateurs de Lagrange.

En désignant par  $x_1, \dots, x_n$  les  $q''$ , par  $y_1, \dots, y_p$  les multiplicateurs, on a l'identité de Dalembert

$$\sum \left( \frac{\partial T_2}{\partial x} + \dots \right) \omega + \Sigma y \alpha(\omega) \equiv 0,$$

devant être vérifiée quels que soient les  $\omega$ , et les équations du second ordre de la liaison

$$z_1(x) + \dots = 0, \quad \dots, \quad \alpha_p(x) + \dots = 0,$$

$p$  est forcément inférieur à  $n$  et les  $\alpha(x)$  sont distinctes.

Nous avons ainsi  $n + p$  équations linéaires aux  $n + p$  inconnues  $x$  et  $y$  et l'on remarque qu'en posant

$$\Phi = T_2(x) + \Sigma y \alpha(x),$$

ces  $n + p$  équations peuvent s'écrire

$$\begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \dots = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} + \dots = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} + \dots = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_p} + \dots = 0, \end{array}$$

de sorte que le déterminant des  $n + p$  inconnues est précisément le discriminant de la forme quadratique  $\Phi(x, y)$ , discriminant qui n'est pas nul par application de la propriété démontrée au début puisque  $T_2$  possède les propriétés exigées pour la fonction  $F$ .

La propriété est donc démontrée et il est à remarquer le fait curieux que dans le cas où il n'y a pas de multiplicateurs de Lagrange, elle résulte uniquement de la première propriété de  $T_2$ , tandis que dans le cas des multiplicateurs elle résulte des deux premières pro-

priétés de  $T_2$ , la seconde étant indispensable d'après la remarque faite.

## UN THÉORÈME SUR LES PRODUITS INFINIS :

PAR J. HAAG.

Appelons *produit alterné* un produit infini dont les facteurs sont alternativement  $> 1$  et  $< 1$ .

**THÉORÈME.** — *Si, dans un produit alterné P, le produit de deux facteurs consécutifs est toujours compris entre le premier de ces facteurs et l'unité et si le facteur général tend vers un, le produit est convergent.*

En effet, soit  $P_n$  le produit des  $n$  premiers facteurs :

$$P_n = u_1 u_2 \dots u_n.$$

On a

$$\log P_n = S_n = \log u_1 + \log u_2 + \dots + \log u_n.$$

Je dis que la série  $v_n = \log u_n$  est convergente.

D'abord, elle est alternée. Ensuite, ses termes décroissent en valeur absolue : car, si  $u_n > 1$ , on a

$$u_n u_{n+1} > 1, \quad \log u_n > -\log u_{n+1};$$

si  $u_n < 1$ , on a

$$u_n u_{n+1} < 1, \quad -\log u_n > \log u_{n+1}.$$

Enfin,  $v_n$  tend vers zéro, puisque  $u_n$  tend vers un.

La convergence de la série  $(v_n)$  résulte donc du théorème bien connu sur les séries alternées. La convergence du produit P en est une conséquence immédiate.

( 196 )

On sait que le reste  $R_n$  de la série a le signe de  $v_{n+1}$  et lui est inférieur en valeur absolue. Dès lors, si nous appelons *reste du produit* P, le produit infini convergent

$$Q_n = u_{n+1} u_{n+2} \dots,$$

nous avons

$$\log Q_n = R_n$$

et nous pouvons affirmer que  $Q_n$  est compris entre un et le premier facteur négligé.

### SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2352.

(1918, p. 38.)

Soit  $ABA'B'$  une section principale d'un ellipsoïde dont les axes sont  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ . Par le sommet C, on mène la parallèle CD à l'un des axes  $AA'$  de cette section; par le sommet C', la parallèle C'D' à l'autre axe  $BB'$ . Si une droite  $\Delta$  se déplace en rencontrant constamment l'ellipse  $ABA'B'$  et les droites CD et C'D', le volume enfermé dans la portion de surface qu'engendre le segment de  $\Delta$  compris entre les droites CD et C'D' est égal au volume de l'ellipsoïde.

M. D'OCAGNE.

SOLUTION

Par M. PHILBERT DU PLESSIS.

Les équations de la droite  $\Delta$  sont de la forme

$$x = \lambda(z + c), \quad y = \mu(z - c).$$

Écrivant qu'elle rencontre le plan  $z = 0$  en un point de l'ellipse  $ABA'B'$ , on a

$$\frac{\lambda^2 c^2}{a^2} + \frac{\mu^2 c^2}{b^2} = 1.$$

L'élimination de  $\lambda$  et  $\mu$  entre ces trois équations fait con-

naître l'équation de la surface engendrée

$$\frac{c^2 x^2}{a^2(c+x)^2} + \frac{c^2 y^2}{b^2(c-x)^2} = 1,$$

dont toutes les sections par des plans parallèles à  $Oxy$  sont des ellipses. Pour la cote  $z$ , la surface de cette section est

$$\sigma = \frac{\pi ab(c^2 - z^2)}{c^2}.$$

Le volume demandé a donc pour expression

$$V = \frac{\pi ab}{c^2} \int_{-c}^c (c^2 - z^2) dz = \frac{\pi ab}{c^2} \left[ c^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{-c}^c = \frac{4}{3} \pi abc,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Autres solutions de MM. BOUVAIST, FAUCHEUX.

### 2471.

(1923-24, p. 350.)

*On considère des cubiques circulaires  $\Gamma$  formant un faisceau ponctuel linéaire. L'enveloppe de leurs asymptotes réelles est une hypocycloïde à trois rebroussements, dont le cercle tritangent ( $K$ ) est égal, sans lui être identique, au cercle ( $K'$ ) lieu des foyers singuliers des courbes  $\Gamma$ .*

*Si  $O$  est le centre du cercle ( $K'$ ), les directions asymptotiques de  $\Gamma$  issues de  $O$  coupent la courbe en six points à distance finie situés sur une conique ( $S$ ). Les coniques ( $S$ ) forment, lorsque  $\Gamma$  varie, un faisceau ponctuel. Pour que les cercles ( $K$ ) et ( $K'$ ) soient confondus, il faut et il suffit que ce faisceau soit équilatère.*

A. LABROUSSE.

### SOLUTION

Par le Commandant Pierre SICARD.

La cubique circulaire variable  $\Gamma$  peut être représentée par une équation de la forme suivante :

$$(\Gamma) \quad (x^2 + y^2)(ax + by) + Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

les coefficients  $a, b, A, B, C, \dots$  ayant respectivement les valeurs

$$(a_1 + \lambda_1 a_2), (b_1 + \lambda b_2), \\ (A_1 + \lambda A_2), (B_1 + \lambda B_2), (C_1 + \lambda C_2), \dots,$$

fonctions du paramètre  $\lambda$  (variable).

En posant

$$\varphi_2(x, y) = (x^2 + y^2)(ax + by), \quad \varphi_2 = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2, \\ \varphi_1 = 2Dx + 2Ey + F,$$

l'asymptote  $y = cx + d$  de la cubique  $\Gamma$ , d'ordonnée à l'origine  $d$ , et de coefficient angulaire  $c$ , est donnée par l'équation

$$y = cx - \frac{\varphi_2(1, c)}{\varphi_3'(1, c)}.$$

Équation de l'asymptote réelle :

$$(1) \quad y = -\frac{a}{b}x - \frac{(Ab^2 - 2abB + Ca^2)}{b(a^2 + b^2)}.$$

Asymptote imaginaire ( $i$ ) :

$$(2) \quad y = ix - \frac{(A + 2Bi + Ci^2)}{(a + bi)2i}.$$

Asymptote imaginaire ( $-i$ ) :

$$(3) \quad y = -ix - \frac{(A - 2Bi + Ci^2)}{-(a - bi)2i}.$$

*Enveloppe de l'asymptote réelle* (1). -- L'équation de cette asymptote peut s'écrire

$$(4) \quad (a^2 + b^2)ax + (a^2 + b^2)by + (Ab^2 - 2abB + Ca^2) = 0$$

et ses coordonnées tangentielles  $u, v, w$  sont donc données par le système suivant

$$(5) \quad \frac{u}{a(a^2 + b^2)} = \frac{v}{b(a^2 + b^2)} = \frac{w}{Ab^2 - 2abB + Ca^2}$$

dont on déduit

$$(6) \quad \frac{u}{a} = \frac{v}{b} = \frac{w(u^2 + v^2)}{Av^2 - 2uvB + Cu^2}.$$

L'équation tangentielle de l'enveloppe s'obtient par élimination de  $\lambda$  entre les deux équations (6). Cette équation tangentielle est de la forme

$$(7) \quad \alpha u^3 + \beta v^3 + h(u^2 + v^2)w + (pu + qv)uv = 0,$$

les constantes  $\alpha, \beta, h, p, q$  étant données par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha &= C_2 b_1 - C_1 b_2, & \beta &= A_1 a_2 - A_2 a_1, & h &= a_1 b_2 - a_2 b_1, \\ p &= C_1 a_2 - C_2 a_1 + 2(B_1 b_2 - B_2 b_1), \\ q &= A_2 b_1 - A_1 b_2 - 2(B_1 a_2 - B_2 a_1). \end{aligned}$$

L'équation tangentielle (7) représente une courbe de troisième classe, bitangente à la droite de l'infini aux deux points cycliques. Cette courbe est, comme on sait, une hypocycloïde à trois rebroussements.

*Cercle (K) tritangent à l'hypocycloïde.* — Ce cercle (K) est concentrique du cercle ( $\Omega$ ), circonscrit aux trois points de rebroussement de l'hypocycloïde. Le rayon du cercle (K) est le tiers du rayon du cercle ( $\Omega$ ). Or l'équation ponctuelle du cercle ( $\Omega$ ) peut s'obtenir facilement. En cherchant les coordonnées  $(x, y)$  des points de rebroussements de l'hypocycloïde, c'est-à-dire les points  $(x, y)$  de la courbe où les deux tangentes sont confondues, on tombe directement sur l'équation du cercle ( $\Omega$ ) :

$$\begin{aligned} (\Omega) \quad 2h^2(x^2 + y^2) - h(q + 3\alpha)x \\ - h(p + 3\beta)y + q(3\alpha - q) + p(3\beta - p) = 0. \end{aligned}$$

Le rayon  $R_\Omega$  du cercle ( $\Omega$ ) est égal (comme il est facile de le vérifier) à  $\frac{3}{4h} \sqrt{(q - \alpha)^2 + (p - \beta)^2}$ .

Le rayon  $R_K$  du cercle (K) est donné par la formule

$$R_K = \frac{1}{4h} \sqrt{(q - \alpha)^2 + (p - \beta)^2}.$$

*Equation du cercle (K').* (Lieu des foyers singuliers des courbes  $\Gamma$ .) — Le foyer  $x, y$  de la courbe ( $\Gamma$ ) est le point réel, intersection des asymptotes imaginaires conjuguées définies

par les équations (2) et (3). Ses coordonnées  $x, y$  sont définies par le système suivant :

$$(8) \quad 2(by - ax) = (A - C),$$

$$(9) \quad ay + bx = -B.$$

Le lieu de ce foyer, lorsque  $\lambda$  varie, s'obtient par élimination de  $\lambda$  entre (8) et (9). L'équation de ce lieu est

$$\begin{aligned} & 2(a_1 b_2 - b_1 a_2)(x^2 + y^2) \\ & + [b_1(C_2 - A_2) + b_2(A_1 - C_1) + 2(B_2 a_1 - B_1 a_2)]x \\ & + [a_1(C_2 - A_2) + a_2(A_1 - C_1) + 2(B_1 b_2 - B_2 b_1)]y \\ & + B_1(C_2 - A_2) + B_2(A_1 - C_1) = 0. \end{aligned}$$

C'est l'équation du cercle ( $K'$ ). Dès lors il est très facile de vérifier que le cercle ( $K'$ ) a même rayon  $R_k$  que le cercle ( $K$ ).

*Équation de la conique (S).* — L'équation de la conique (S) (de l'énoncé) s'écrit immédiatement

$$\begin{aligned} (S) \quad & (x^2 + y^2)(ax + by) + Ax^2 \\ & + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F \\ & - [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2][a(x - \xi) + b(y - \eta)] = 0, \end{aligned}$$

en désignant par  $\xi, \eta$  les coordonnées du centre de  $K'$ .

Cette conique (S) est *équilatère*, quel que soit le paramètre  $\lambda$ , si les deux équations suivantes sont satisfaites

$$A_1 + C_1 + 4(a_1 \xi + b_1 \eta) = 0,$$

$$A_2 + C_2 + 4(a_2 \xi + b_2 \eta) = 0.$$

On en tire

$$4h\xi = b_1(A_2 + C_2) - b_2(A_1 + C_1),$$

$$4h\eta = a_2(A_1 + C_1) - a_1(A_2 + C_2),$$

et, tenu compte des valeurs de  $\xi$  et  $\eta$ , il reste

$$B_1 a_2 - B_2 a_1 = C_2 b_1 - C_1 b_2, \quad B_1 b_2 - B_2 b_1 = A_2 a_1 - A_1 a_2;$$

il est bien aisé de vérifier que ce sont les conditions pour que les centres des cercles ( $\Omega$ ) et ( $K'$ ) coïncident.

---

---

**SUR L'ENSEIGNEMENT DES NOTIONS RELATIVES AUX INFINIMENT GRANDS ET AUX INFINIMENT PETITS DANS LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES**

( Suite );

PAR PAUL LÉVY.

---

Pour terminer la question des expressions indéterminées, il reste à parler de celles qui se présentent sous la forme d'un produit ou d'un quotient de plusieurs facteurs infiniment grands ou infiniment petits. J'ai déjà dit plus haut qu'il suffit de remplacer chaque facteur par sa valeur principale. C'est la méthode générale, et il est inconcevable qu'on hésite à l'appliquer d'abord. Si les valeurs principales obtenues sont des expressions simples dont la croissance est connue, telles que  $x^x$ ,  $e^x$ ,  $\log x$  (pour  $x$  infini par exemple), la question est résolue immédiatement. On sait lequel de ces facteurs l'emporte.

Il arrive que la solution ne soit pas aussi évidente, lorsque l'ordre de grandeur de certains facteurs se présente sous une forme moins familière. Mais il faut indiquer la véritable nature de la difficulté : mettre en évidence l'ordre de grandeur de chacun des facteurs. Soit par exemple à étudier, pour  $n$  infini, l'expression

$$(4) \quad u_n = n^{\log n} e^{-\sqrt{n}},$$

où les deux facteurs ne sont pas d'un des types simples qui vient d'être indiqué, mais sont formés par des combinaisons simples des fonctions élémentaires con-

nues. La principale difficulté provient du premier facteur, qui se présente sous la forme  $u^v$ ; il est donc naturel de prendre les logarithmes, et d'écrire

$$\log u_n = (\log n)^2 - \sqrt{n},$$

ce qui résout immédiatement la difficulté.

On peut avoir des expressions de types très divers, qu'on ne peut tous prévoir au cours. L'étude des fonctions représentables par des intégrales définies dépasse évidemment le cadre du programme de la classe de mathématiques spéciales; toutefois les élèves pourraient savoir qu'on obtient une limite supérieure de l'intégrale

$$\int_a^b f(x) dx,$$

en remplaçant  $f(x)$  par une valeur constamment plus grande, ou en particulier par une constante, égale au maximum de  $f(x)$  dans cet intervalle.

A propos des formes indéterminées, je ne me contenterai pas d'indiquer les méthodes que je crois bonnes. Je veux combattre une méthode que l'on applique à tout propos à tort et à travers, celle qui repose sur l'emploi de la règle de l'Hospital. C'est en pensant à cette règle que j'ai écrit plus haut qu'on donnait aux élèves un bâton d'aveugle, après leur avoir mis un bandeau sur les yeux. Quelquefois elle réussit, quelquefois elle ne réussit pas; on cherche au hasard dans la nuit. Quelquefois il suffit de multiplier haut et bas par un même facteur pour faire qu'elle réussisse.

Prenons l'exemple d'un cas où elle réussit; soit à étudier le rapport

$$\frac{x - \sin x}{1 - \cos x}, \quad \text{pour } x = 0.$$

En appliquant la règle deux fois, l'indétermination disparaît : Pourquoi? Parce que le dénominateur est un infiniment petit du second ordre et que le numérateur est d'un ordre plus élevé. Pourquoi alors ne pas dire : « Le numérateur, d'après le développement connu de  $\sin x$ , est équivalent à  $\frac{x^3}{6}$ , et le dénominateur à  $\frac{x^2}{2}$ ; le rapport a donc pour valeur principale  $\frac{x}{3}$  »? Ainsi l'on voit ce qu'on fait, et l'on n'a pas l'impression de toucher au but par hasard. Lorsqu'il s'agit de fonctions que l'on connaît, il s'agit d'utiliser les connaissances que l'on a de ces fonctions, et non d'appliquer à tort et à travers la règle de l'Hospital, cette règle qui doit, à mon avis, disparaître de la classe de mathématiques spéciales.

Pourtant il y a un bien joli chapitre d'analyse, se rattachant à cette règle. Quoiqu'il dépasse le programme de cette classe, j'en dirai quelques mots, pour une raison que l'on verra plus loin. Il s'agit des fonctions représentables par des intégrales définies. Soit par exemple l'intégrale

$$\int_x^\infty e^{-x^2} dx.$$

On ne sait pas la calculer; mais on sait calculer l'intégrale

$$\int_x^\infty e^{-x^2} \left( 1 + \frac{1}{2x^2} \right) dx = \frac{e^{-x^2}}{2x},$$

et la règle de l'Hospital montre que ces deux expressions sont équivalentes. Ici l'expression étudiée est définie par une quadrature, et l'idée de déduire ses propriétés de celles de ses dérivées s'impose; l'application de la règle de l'Hospital est dans la nature des choses.

Voici à peu près comment je présenterai la question :

Si  $f(x)$  et  $g(x)$  sont deux fonctions positives, dont le rapport, pour  $x$  infini, tende vers une limite  $k$ , on peut toujours trouver  $X$  tel que  $\bar{x} > X$  entraîne

$$(k - \varepsilon)g(x) < f(x) < (k + \varepsilon)g(x),$$

d'où, si  $a$  et  $b$  sont supérieurs à  $X$ ,

$$(k - \varepsilon) \int_a^b g(x) dx < \int_a^b f(x) dx < (k + \varepsilon) \int_a^b g(x) dx.$$

Deux cas sont possibles; les deux intégrales sont simultanément ou convergentes, ou divergentes. Dans le premier cas, on peut faire  $b$  infini, ce qui donne

$$k \int_a^\infty g(x) dx \sim \int_a^\infty f(x) dx.$$

Dans le second cas, les trois membres de la double inégalité considérée deviennent infinis avec  $b$ ; des constantes ajoutées à ces membres ont une influence négligeable, ce qui permet de remplacer  $a$  par une quantité  $x_0$  indépendante de  $\varepsilon$ . L'inégalité subsiste, à condition de prendre  $b$  assez grand et de remplacer  $\varepsilon$  par  $2\varepsilon$ . Il vient ainsi

$$k \int_{x_0}^x g(x) dx \sim \int_{x_0}^x f(x) dx, \quad [x \rightarrow \infty].$$

Les règles de l'Hospital, relatives aux formes  $\frac{0}{0}$  et  $\frac{\infty}{\infty}$ , sont ainsi établies, avec une différence dans le langage; au lieu de parler d'une fonction  $F(x)$  et de sa dérivée  $f(x)$ , on parle d'une fonction  $f(x)$  et sa primitive  $F(x)$ . La même différence existe entre le théorème des accroissements finis et le théorème de la

moyenne, qui ne sont que deux énoncés d'un même théorème.

On sait la relation entre les séries et les intégrales, mise en évidence par un théorème connu de Cauchy. Le théorème précédent a son analogue dans la théorie des séries. Soient  $u_n$  et  $v_n$  les termes généraux, supposés positifs, de deux séries,  $S_n$  et  $\Sigma_n$  les sommes de rang  $n$ ,  $R_n$  et  $\rho_n$  les restes, si les séries sont convergentes. Le théorème est le suivant : si  $u_n \sim v_n$ , on a  $S_n \sim \Sigma_n$ , si les séries sont divergentes;  $R_n \sim \rho_n$ , si elles sont convergentes.

Il est même facile, en restant dans cet ordre d'idées, d'avoir un véritable développement en série de  $S_n$  en cherchant la valeur principale de  $S_n - \Sigma_n$  (ou de  $R_n - \rho_n$ ).

On peut compléter ces notions en précisant la relation entre les séries et les intégrales mise en évidence par le théorème de Cauchy. L'inégalité sur laquelle repose ce théorème,

$$\int_1^n f(x) dx > u_2 + u_3 + \dots + u_n > \int_2^{n+1} f(x) dx,$$

$f(x)$  étant une fonction décroissante, donnant une limite supérieure et une limite inférieure de  $S_n$ , en donne la valeur principale, si ces deux limites sont équivalentes. Dans cet ordre d'idées, on peut aussi avoir des développements en série de  $S_n$  et  $\rho_n$ . Je n'insiste pas sur ces questions, qui me conduiraient à parler de la série trop peu connue d'Euler-Maclaurin, et renvoie ceux qu'elles intéressent à mon cours de l'École Polytechnique, où elles sont sommairement indiquées.

De même qu'on peut étudier les propriétés d'une fonction en la considérant comme l'intégrale de sa dérivée, un moyen d'étudier une quantité  $S_n$ , pour  $n$

infini, est de la considérer comme somme d'une série de terme général  $u_n = S_n - S_{n-1}$ , et ce moyen est dans la nature des choses si  $u_n$  est plus simple que  $S_n$ . En remontant du logarithme au nombre, on voit que l'ordre de grandeur d'une expression  $f(n)$  peut se déduire de l'étude du rapport  $\frac{f(n)}{f(n-1)}$  [ou  $\frac{f(n+1)}{f(n)}$ ]. De là l'intérêt de la règle de d'Alembert pour les séries. Mais il ne faut pas la considérer comme une règle relative spécialement aux séries; c'est une règle permettant de mettre en évidence l'ordre de grandeur du terme général  $f(n)$ , lorsqu'il est donné sous une forme tel que le rapport  $\frac{f(n+1)}{f(n)}$  soit simple.

Si ce rapport tend vers une limite positive  $k$ , l'expression

$$u_n = \log f(n+1) - \log f(n)$$

tend vers  $\log k$ . Il résulte du théorème qui vient d'être rappelé que  $\log f(n) \sim n \log k$ , c'est-à-dire que

$$\frac{1}{n} \log f(n) \rightarrow \log k.$$

Remontant du logarithme au nombre, nous voyons que  $\sqrt[n]{f(n)}$  tend vers la même limite que  $\frac{f(n+1)}{f(n)}$ . C'est le résultat connu concernant la comparaison des règles de Cauchy et de d'Alembert.

L'application de cette méthode à la fonction  $n!$  est particulièrement indiquée. C'est une fonction telle que  $\frac{n!}{(n-1)!} = n$ . La fonction  $a^n$  est telle que  $\frac{a^n}{a^{n-1}} = a$ . Il suffit alors pour comparer ces deux fonctions d'étudier le rapport  $f(n) = \frac{n!}{a^n}$ ; comme  $\frac{f(n)}{f(n-1)}$  croît dès que  $n > a$ ,  $n!$  croît plus vite que  $a^n$ , et par suite infiniment plus vite  $a^n$  (puisque'elle croît plus vite que  $b^n$ ,  $b$  étant un nombre supérieur à  $a$ ).

Toujours dans le même ordre d'idées, on peut préciser l'ordre de grandeur de  $n!$ . L'application de la même méthode à  $\frac{n! e^n}{n^n}$  montre que cette fonction croît ou décroît moins vite qu'une exponentielle; sa racine  $n^{\text{ième}}$  tend vers l'unité. Donc  $\sqrt[n]{n!}$  a pour valeur principale  $\frac{n}{e}$ .

Précisons encore, en étudiant la fonction

$$f(n) = \frac{n! e^n}{n^n \sqrt[n]{n}}.$$

Son logarithme est la somme d'une série dont le terme général est

$$\begin{aligned} & \log f(n) - \log f(n-1) \\ &= 1 + \left(n - \frac{1}{2}\right) \log \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{12n^2}. \end{aligned}$$

Cette série est donc convergente;  $f(n)$  tend vers une limite, et la valeur principale de  $n!$  se trouve ainsi déterminée, à un facteur constant près. Il est facile de préciser encore, et de donner un développement en série de  $\log n!$ .

Tout ce qui précède dépasse évidemment beaucoup le niveau de la classe de mathématiques spéciales; mais il est essentiel que le professeur soit inspiré de ces principes pour présenter sous son véritable aspect la règle de d'Alembert relative aux séries.

Avant d'aborder les séries, j'indiquerai comment, à mon avis, l'on doit démontrer que le rapport  $\frac{e^x}{x^m}$  augmente indéfiniment avec  $m$ . On peut évidemment y arriver par une application  $m$  fois répétée de la règle de l'Hospital; d'ailleurs il suffit de faire  $m = 1$ , et le théorème plus général résulte immédiatement de ce cas particulier en élevant l'expression étudiée à la

puissance  $m^{\text{ième}}$  et remplaçant ensuite  $mx$  par  $x$ . Cela serait dans la nature des choses si  $e^x$  était défini comme solution de l'équation  $y' = y$ , ou ce qui revient au même si  $\log x$  était défini par la formule

$$\log x = \int_1^x \frac{dx}{x}.$$

Ce serait une intéressante introduction à la théorie des fonctions définies par des quadratures, et en particulier à la théorie des fonctions elliptiques. Ce serait, à mon avis, une erreur d'employer cette méthode dans un enseignement plus élémentaire.

Il est indispensable en effet de définir d'abord la fonction exponentielle  $a^x$  par ses propriétés élémentaires. Elle est définie d'abord si l'exposant est entier; il s'agit de la définir ensuite, par des interpolations convenables, si  $x$  est fractionnaire. Le principe de ces interpolations est que si les valeurs de  $x$  varient en progression arithmétique, celles de  $a^x$  varient en progressions géométriques. C'est la vieille théorie, autrefois en faveur pour définir les logarithmes, et qu'il serait désirable de ressusciter, mais pour définir la fonction exponentielle; ainsi exposée elle ne fait que préciser une notion intuitive, l'élève étant familiarisé depuis longtemps avec la notion de l'exposant. Rien n'est plus facile ensuite que de définir le logarithme comme fonction inverse de l'exponentielle.

Il serait intéressant ensuite d'étudier la variation de  $a^x$  en partant de ces propriétés élémentaires. La courbe tourne sa concavité vers le haut, et de ce seul fait on déduit immédiatement l'existence d'une dérivée à droite et d'une dérivée à gauche (<sup>1</sup>), dont on dé-

---

(<sup>1</sup>) Soit par exemple un point M de la courbe, dont l'abscisse

montre aisément ensuite qu'elles ont pour valeur commune  $ke^x$ ,  $k$  étant le logarithme de  $a$  dans un système ayant pour base un certain nombre  $e$ ; on constate encore aisément que  $e$  peut être défini comme limite de  $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$  pour  $m$  infini. L'étude de la série entière représentant  $e^x$  conduirait ultérieurement à la série  $e$ , et le développement de  $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$  par la formule du binôme, moins difficile d'ailleurs qu'on ne l'a cru longtemps, apparaîtrait seulement comme une vérification d'un résultat obtenu autrement par une méthode plus naturelle.

Je ne veux pas insister sur cette manière d'obtenir la dérivée de  $a^x$ . Ce que j'ai voulu surtout indiquer, c'est que la propriété fondamentale de  $a^x$ , celle qu'il faut prendre comme point de départ de la théorie, est que  $a^x$  est une fonction qui devient  $a$  fois plus grande chaque fois que  $x$  augmente d'une unité. Comment alors démontrer que, si  $a > 1$ , le rapport  $f(x) = \frac{a^x}{x^m}$  augmente indéfiniment avec  $m$ ? Une méthode s'impose, celle qui repose sur la considération du rapport

$$\frac{f(x)}{f(x-1)} = a \left(1 - \frac{1}{x}\right)^m$$

qui tend vers  $a$ . Donc, dès que  $x$  dépasse une certaine valeur  $X$ ,  $f(x)$  augmente quand  $x$  augmente d'une unité. Il reste donc toujours, dès que  $x > X + 1$ , supérieur au maximum  $M$  de  $f(x)$  entre  $X$  et  $X + 1$ . En remplaçant  $m$  par  $m + 1$ , on voit de même que  $\frac{a^x}{x^{m+1}}$

varie en croissant, et qui tend vers un point fixe  $A$ ; soit  $B$  un point d'abscisse supérieure à celle de  $A$ . D'après le sens de la convexité de la courbe, le coefficient angulaire de  $MA$  croît en restant inférieur à celui de  $AB$ ; il a donc une limite. Tout le reste s'en déduit sans difficulté.

reste supérieur à un nombre fixe, ce qui prouve que  $\frac{a^x}{x^m}$  augmente indéfiniment.

Passons maintenant à la théorie des séries, une des principales applications des notions qui précèdent. Je ne parlerai que des séries à termes positifs (1).

La première idée à mettre en évidence est que la somme d'une infinité de quantités tendant vers zéro peut être finie ou infinie. Le meilleur moyen est de prendre une fonction connue, dont la dérivée s'annule à l'infini. Prenons par exemple la fonction  $\log x$ ;  $\log n$  peut être considéré comme de la série de terme général

$$\log n - \log(n-1) = \log\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Le terme général tend bien vers zéro, et si cela ne résultait pas des propriétés élémentaires des loga-

(1) Le professeur est, bien entendu, libre d'exposer les diverses parties du programme dans l'ordre qu'il juge préférable. L'usage est d'exposer la théorie des séries presque au début du cours, ce qui exige certaines modifications à l'exposé des principes dont il est question dans le texte, mais ce qui ne saurait dispenser d'insister sur ces principes à un moment ou à un autre. Il est d'ailleurs possible de ne parler des séries qu'après avoir terminé l'exposé des principales notions relatives aux dérivées et aux intégrales. Cela implique : 1° qu'on expose la théorie de la fonction exponentielle sans introduire la série  $e$ , en suivant la marche indiquée plus haut; 2° qu'on parle de développements en série sans s'inquiéter de la convergence, ce qui ne peut présenter aucune difficulté si l'on indique que la signification d'un tel développement, limité à un terme quelconque, est que le reste est à la limite négligeable devant le dernier terme écrit; 3° que l'on distingue la formule de Taylor et la série de Taylor.

Le chapitre sur les séries numériques serait alors immédiatement suivi du chapitre sur les séries entières.

Il me semble que cet ordre est plus dans la nature des choses que celui que l'on emploie généralement et présente d'autant moins d'inconvénient que les élèves savent ce que c'est qu'une série, avant d'entrer en Mathématiques Spéciales.

rithmes, on pourrait le déduire de la formule des accroissements finis ; cette méthode montre bien que la même remarque s'applique toutes les fois que la dérivée de la fonction considérée tend vers zéro. On a ainsi des exemples de séries divergentes. En raisonnant de même sur la fonction  $\frac{1}{x^\alpha}$ , ( $\alpha > 0$ ), on a des exemples de séries convergentes. Ainsi, pour  $\alpha = 1$ , on voit que la série de terme général

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

est convergente.

Cette idée fondamentale, et la remarque évidente qu'il est nécessaire pour la convergence que le terme général tende vers zéro, doivent ensuite être complétées par les deux notions suivantes : étude de la convergence basée sur la comparaison de la série étudiée avec une série connue ; méthode basée sur la comparaison avec les intégrales.

La méthode de comparaison des séries, qui est essentielle, semble généralement assez bien comprise. Je signale qu'en général les élèves ne se rendent pas compte que cette méthode ne s'applique pas aux termes de signes quelconques (dans ce cas on peut souvent avec avantage considérer la série comme somme de deux autres, ou au contraire grouper les termes de manière à avoir une série à termes positifs). Il y aurait intérêt à introduire les expressions suivantes, qui rendent la méthode de comparaison plus intuitive : la série de terme général  $u_n$  sera dite *plus convergente* qu'une série convergente de terme général  $v_n$  si le rapport  $\frac{u_n}{v_n}$  tend vers zéro ; elle sera dite *au moins aussi convergente* si ce rapport est limité supérieurement.

On emploierait de même l'expression de série *plus divergente, moins divergente, au moins aussi divergente* qu'une autre.

Il s'agit alors de trouver quelques séries simples connues qui puissent servir de termes de comparaison. Ces séries simples, celles dont le terme général est

$$(5) \quad u_n = \frac{1}{n^n},$$

ont précisément été données comme exemples au début. Le théorème de Cauchy sur la comparaison des séries et des intégrales, utile à exposer à ce moment, précisera ce qui aura déjà été dit au sujet de ces séries; comme je l'ai indiqué plus haut, il permet souvent, non seulement de résoudre la question de convergence ou divergence, mais d'évaluer d'une manière très approchée la somme  $S_n$  ou le reste  $R_n$ .

La condition de convergence de la série de terme général  $\frac{1}{n^\alpha}$  s'obtient si aisément par cette méthode qu'il est surprenant qu'on en ait cherché d'autres. La plus répandue repose sur cet autre théorème de Cauchy d'après lequel, si  $u_n$  décroît constamment, la série de terme général  $u_n$  est de même nature que celle dont le terme général est  $a^p u_n$  ( $a$  entier positif). Ou bien l'on démontre ce théorème d'une manière générale, ou bien on le démontre dans le cas particulier considéré. Mais la véritable nature de ce théorème apparaît mieux si l'on énonce le théorème correspondant relatif aux intégrales. Les intégrales

$$\int f(x) dx \quad \text{et} \quad \int f(a^t) a^t dt$$

sont de même nature. On passe en effet de l'une à l'autre, à un facteur constant près, par le changement

de variable  $x = a^t$ . Comme tout devient clair dès qu'on introduit la notion d'intégrale !

D'ailleurs le théorème de Cauchy rattachant les séries aux intégrales doit surtout servir à trouver des séries qui puissent servir de termes de comparaison ; la série de terme général  $\frac{1}{n^\alpha}$  est particulièrement indiquée dans ce but.

La méthode générale pour étudier la convergence d'une série à termes positifs est donc la suivante : mettre en évidence l'ordre de grandeur du terme général ; si l'on n'arrive pas à obtenir sa valeur principale, chercher du moins une limite inférieure et une limite supérieure (l'une des deux suffit d'ailleurs, mais on ne sait pas, *a priori*, laquelle). Une fois cette valeur principale obtenue, le caractère de convergence ou de divergence de la série étudiée apparaîtra d'une manière évidente, si l'on a une idée de la manière dont se classent les principales fonctions usuelles au point de vue de leur croissance, et du point où la condition que la série de terme général  $\frac{1}{f(n)}$  soit convergente constitue une coupure dans le classement des fonctions  $f(n)$  devenant infinies. Si le résultat n'apparaît pas d'une manière évidente, c'est que l'on aura affaire à un type de croissance non encore connu, qu'il s'agit de comparer à ceux déjà connus, et il y a intérêt à poser la question d'une manière précise sous la forme suivante : chercher ce que devient, pour  $n$  infini, le produit  $n^\alpha u_n$ .

Si par exemple  $u_n$  a la valeur (4), son ordre de grandeur n'apparaît pas immédiatement, cette valeur, obtenue par des combinaisons simples des fonctions usuelles, n'ayant pas, dans l'échelle des fonctions rangées d'après la rapidité de leur croissance, une

place que l'on sache par cœur. On forme donc le produit

$$n^x u_n = n^x n^{\log n} e^{-\sqrt{n}}.$$

L'aspect de ce produit, dont les différents facteurs sont du type  $u^n$ , conduit à en prendre le logarithme. Par cette méthode, on voit qu'il tend vers zéro, quel que soit  $x$ . La série est donc convergente.

Au lieu de la méthode qui précède, qu'apprend-on aux élèves? Trois règles de convergence, que l'on met sur le même pied. Bâton d'aveugle qu'on leur donne dans la nuit!

L'erreur est double. D'abord on n'insiste pas sur le fait qu'il s'agit, avant tout, de mettre en évidence l'ordre de grandeur du terme général, et à cet effet de chercher les simplifications que l'on peut effectuer sans altérer cet ordre de grandeur. Aussi, les élèves se trouvent-ils en présence d'une expression un peu compliquée, mais facile à simplifier, n'y songent-ils pas et commencent-ils par former  $\sqrt[n]{u_n}$ , ce qui, généralement, ne leur sert pas à grand'chose.

La seconde erreur consiste à ne pas insister assez sur la différence profonde qui existe entre la troisième règle et les deux premières. J'imagine un professeur de géographie voulant apprendre à un élève le moyen de reconnaître si une ville située sur une ligne de chemin de fer de Paris à Madrid et située à une distance connue de Paris est en France, et qui lui dirait : « Première règle : comparer la distance donnée à 588<sup>km</sup>, distance de Paris à Bordeaux; deuxième règle, à appliquer si la première ne permet pas de conclure : comparer la distance donnée à 822<sup>km</sup>, distance de Paris à la frontière. » Que penserait-on d'une pareille méthode? la deuxième règle ne dispense-t-elle pas de la première?

La coupure constituée par la notion de convergence dans l'échelle de croissance des diverses fonctions ne peut pas être située d'une manière aussi précise que le pont sur la Bidassoa. Aussi faut-il prendre comme terme de comparaison une série qui n'en soit pas trop éloignée. Il n'y a pas intérêt, au point de vue de ce que les élèves de Mathématiques Spéciales doivent savoir, à exagérer les efforts pour se rapprocher de la coupure, en introduisant par exemple la série de terme général  $\frac{1}{n(\log n)^\alpha}$ , et il suffit pour eux de savoir que la coupure est entre la série de terme général  $\frac{1}{n}$  et celle de terme général  $\frac{1}{n^\alpha}$ ,  $\alpha$  étant un nombre supérieur à l'unité d'aussi peu que l'on veut. C'est pourquoi, si la situation de la série étudiée par rapport à la coupure n'apparaît pas clairement dès que l'on a simplifié autant que possible le terme général, doit-on considérer que la méthode indiquée est de chercher ce que devient  $n^\alpha u_n$  pour  $n$  infini.

La valeur de l'exposant à prendre embarrasse les élèves. Ils sont hantés par l'idée de distinguer suivant que  $\alpha$  est ou non supérieur à l'unité. C'est vouloir aller trop vite. Qu'ils commencent par chercher ce que devient  $n^\alpha u_n$  pour  $n$  infini, sans rien préjuger du résultat! Il peut arriver que le résultat dépende de  $\nu$ ; ils le verront bien. De toute façon, ce résultat obtenu, ils ne doivent pas être embarrassés pour conclure sur la question de convergence, à moins d'être précisément dans le cas où la règle utilisée ne permet pas de conclure.

Je répète d'ailleurs qu'ils ne doivent même pas se donner la peine de former le produit  $n^\alpha u_n$ , si  $u_n$  est donné sous une forme telle que l'ordre de grandeur

de  $u_n$  comparé à celui des fonctions  $\frac{1}{n^\alpha}$  apparaisse immédiatement. Ainsi, si

$$(6) \quad u_n = \frac{1}{n^{\varphi(n)}},$$

la fonction  $\varphi(n)$  devenant infinie avec  $n$ , on n'est pas excusable d'hésiter à conclure immédiatement. J'ai même vu un élève (je ne parle toujours que de ceux dont l'examen était bon par ailleurs), qui, ayant trouvé avec mon aide que la valeur principale de  $u_n$  était  $\frac{A}{n^\alpha}$ , a introduit un autre exposant  $p$  (car il ne faut pas donner le même nom à deux choses différentes!), a étudié le produit  $n^p u_n$ , m'a expliqué qu'il y aurait plusieurs cas à distinguer suivant les valeurs de  $p$ , et finalement s'est si bien embrouillé qu'il a fallu que je l'aide à nouveau. Sans doute se serait-il aperçu que le problème était résolu si on lui avait appris à le voir sous son aspect véritable, en lui disant qu'il fallait mettre en évidence l'ordre de grandeur de  $u_n$ .

Quant aux deux premières règles de convergence, les employer, c'est comme comparer notre station de chemin de fer de tout à l'heure à Orléans ou à Madrid. Il convient de réduire au minimum les explications relatives à la règle de Cauchy, en disant simplement que si une série converge plus rapidement qu'une progression géométrique (ce qui est une convergence très rapide), on peut parfois le reconnaître simplement par l'étude de l'expression  $\sqrt[n]{u_n}$ . L'importance de cette règle si grossière augmentera d'ailleurs par la suite, car elle suffit toujours pour trouver le rayon de convergence d'une série entière (mais ne permet pas de décider de la convergence sur la circonférence du cercle de convergence).

Quant à la règle de d'Alembert, j'ai déjà indiqué son caractère spécial. Il peut arriver que  $u_n$  soit donné sous une forme telle que le rapport  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  soit plus simple que  $u_n$  [aux exemples déjà indiqués j'ajoute celui de la série  $(1+x)^m$ ]. Alors l'étude de ce rapport permet de mettre en évidence l'ordre de grandeur de  $u_n$ ; mais ce procédé n'a rien à voir avec le fait que  $u_n$  soit le terme général d'une série, et il faut indiquer sa plus grande portée, même si c'est à propos des séries qu'on expose cette méthode (1).

Pour terminer ces remarques, j'ajouterai quelques mots sur la recherche des asymptotes des courbes dont l'équation est résolue par rapport à  $y$ .

Voici tout ce que je dirais sur ce sujet, si j'étais chargé de le traiter.

Pour étudier l'allure de la courbe pour  $x$  infini, on développe  $y$  en série. (Tout ce qui a été dit pour les développements en série s'appliquant aussi bien lorsque la variable est infiniment grande que lorsqu'elle est infiniment petite; bien entendu il s'agit toujours de mettre en évidence d'abord les termes principaux, et l'on peut être conduit à un développement suivant les puissances décroissantes de  $x$ , mais non suivant les puissances croissantes. Les calculs étant les mêmes; cela ne sert à rien de poser  $x = \frac{1}{t}$  pour ramener un cas à l'autre.) Si le développement se présente sous la

(1) Pratiquement, le professeur ne peut sans doute pas se dispenser d'exposer les trois règles. Mais il doit ensuite mettre chaque chose à sa place en donnant aux élèves, lorsqu'ils ont à étudier la convergence d'une série, quelques indications sur la marche à suivre. C'est alors qu'il devra tenir compte des remarques indiquées dans le texte.

forme

$$(7) \quad y = ax + b + \varepsilon,$$

$a$  et  $b$  étant des constantes, et  $\varepsilon$  infiniment petit, la courbe est asymptote à la droite  $y = ax + b$  et le signe de  $\varepsilon$  donne la position de la courbe par rapport à cette asymptote. Dans tout autre cas il n'y a pas d'asymptote. On peut ajouter quelques mots pour indiquer dans quels cas il y a une branche parabolique, puis traiter quelques exemples.

Au lieu de cela, que dit-on ?

« 1° Je cherche la limite du rapport  $\frac{y}{x}$  ;

» 2° Soit  $a$  cette limite, je cherche la limite de  $y - ax$  ;

« 3° Soit  $b$  cette limite, je cherche le signe de  $y - ax - b$ . »

Sans doute, dira-t-on, cela revient au même. De toute façon il s'agit de trouver les trois premiers termes d'un développement en série.

L'expérience démontre que cela ne revient pas au même. On doit avoir parlé aux élèves de développements en séries; on doit leur avoir donné à ce sujet des méthodes de calcul très simples. Il faut leur dire qu'il s'agit d'appliquer ces méthodes, et ils ne comprennent pas que c'est la même chose si l'on n'emploie pas le même langage que la première fois.

Combien le résultat est vite obtenu lorsqu'on leur dit de développer  $y$  en série. Si au contraire on les laisse appliquer leur méthode, voici à peu près ce qu'on entend au sujet de la différence  $y - ax$  : « Je m'étonne de trouver la forme indéterminée  $\infty - \infty$  (un instant de réflexion); j'ai l'idée ingénieuse de mettre  $x$  en facteur et d'écrire  $x \left( \frac{y}{x} - a \right)$  (nouvelle

réflexion, examen attentif des deux facteurs); je m'étonne de trouver la forme indéterminée  $\infty \times 0$ ; je vais m'efforcer de lever cette indétermination... » Tout cela pour arriver à un résultat souvent évident *a priori* car il arrive que la courbe soit précisément donnée sous la forme (7), ou se ramène à cette forme par une transformation simple, dont l'élève aurait l'idée s'il savait quelle est la question qui se pose à lui.

Maintenant que j'ai terminé mes critiques, le lecteur peut penser que j'ai pris la plume pour bien peu de chose; il y a si peu de différence entre les méthodes que je critique et celles que je veux leur substituer! Sans doute; les mathématiques ne se transforment pas comme le fait la physique lorsque apparaît une théorie nouvelle. Mais ce que je demande constituerait pour certains professeurs un changement assez profond dans l'esprit de l'enseignement, autant que je puis en juger par les réponses que je reçois aux examens.

Il me semble qu'il subsiste encore actuellement quelque chose de l'état d'esprit des contemporains de Leibniz et de Newton que déconcertaient les méthodes nouvelles du calcul infinitésimal. Maintenant encore, on cherche trop à tout ramener à des opérations sur les nombres. Les quantités qui dépendent d'une variable peuvent sans doute s'ajouter et se multiplier comme de simples nombres. Mais il se pose à leur sujet des problèmes qui ne se posent pas pour les nombres, celui de la dérivation par exemple, ou celui, dont nous venons de nous occuper, de rechercher comment certaines quantités deviennent infiniment petites ou infiniment grandes. Ces problèmes ne sont pas difficiles; mais il faut s'efforcer d'en comprendre la véritable nature, de créer un langage approprié à ces problèmes, ne pas craindre d'user et d'abuser de ce langage si

commode dont on n'emploie actuellement que quelques mots avec la plus grande timidité <sup>(1)</sup>. La difficulté qu'éprouvent beaucoup d'élèves à raisonner sur ces questions semble due en partie à ce qu'ils sont habitués à les traiter avec le langage de l'algèbre élémentaire, qui suffit pour les opérations sur les nombres, mais qui ne suffit pas dans toutes les branches de l'analyse.

## AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (1924).

### Compositions de Mathématiques spéciales.

Soit (C) la courbe plane définie en axes rectangulaires par les équations

$$(C) \quad x = at^3 + bt^2 - x_0t, \quad y = a't^3 + b't^2 - y_0t;$$

$a, b, a', b'$  sont des constantes données;  $x_0$  et  $y_0$  sont les coordonnées d'un point  $M_0$  qui pourra se déplacer.

I. Démontrer que la courbe (C) n'a un point de rebroussement que si le point  $M_0$  se trouve sur une parabole (P). Quel est, dans ce cas, le lieu géométrique de ce point de rebroussement et quelle est la courbe enveloppe de la tangente de rebroussement? A quelle condition cette enveloppe est-elle la développée d'une parabole?

II.  $M_0$  étant un point quelconque du plan, la

<sup>(1)</sup> Ainsi le signe  $\sim$ , qui devrait être d'un usage courant, est à peine connu des élèves. Il faut par contre, évidemment, éviter l'erreur, fréquente également, qui consiste à créer un langage pour avoir le plaisir de s'en servir. Un mot nouveau doit être introduit lorsque le besoin s'en fait sentir, et dans ce cas seulement.

courbe (C) admet un point double  $\omega$ . Dans quelle région doit-on choisir le point  $M_0$  pour que  $\omega$  soit un point double réel? Calculer les coordonnées du point  $\omega$  en fonction de celles du point  $M_0$  et montrer qu'à un point  $\omega$  correspond en général un point  $M_0$  et un seul. Quel est le cas d'exception? Où se trouvent alors les points tels que  $M_0$ ?

III. La différentielle de l'arc de la courbe (C) se met sous la forme

$$ds = \sqrt{F(t)} dt,$$

où  $F(t)$  est un polynôme du quatrième degré en  $t$ . Comment choisir le point  $M_0$  pour que la courbe (C) soit rectifiable; c'est-à-dire pour que  $F(t)$  soit le produit d'un polynôme du second degré par le carré d'un facteur linéaire, ou pour que  $F(t)$  soit le carré d'un polynôme du second degré?

IV. On remplace, dans la question précédente, la courbe (C) par la courbe gauche ( $\Gamma$ ) définie en axes rectangulaires par les équations

$$(\Gamma) \quad \begin{cases} x = at^3 + bt^2 - x_0 t, \\ y = a't^3 + b't^2 - y_0 t, \\ z = a''t^3 + b''t^2 - z_0 t; \end{cases}$$

$x_0, y_0, z_0$  désignent les coordonnées d'un point  $M_0$ .

On représente encore par  $\sqrt{F(t)} dt$  la différentielle de l'arc de la courbe ( $\Gamma$ ).

Démontrer que  $F(t)$  n'est le produit d'un polynôme du second degré par le carré d'une fonction linéaire, que si  $M_0$  est sur une parabole (II) et que, dans ce cas, la courbe ( $\Gamma$ ) est une courbe plane.

Démontrer que, si  $F(t)$  est le carré d'un polynôme du second degré, le point  $M_0$  est sur une parabole (II') et que la courbe ( $\Gamma$ ) est alors une hélice.

*On vérifiera que les plans de (II) et de (II') sont rectangulaires et l'on calculera les coordonnées de leurs sommets et de leurs foyers.*

*V. Les deux points  $M_0$  et  $\omega$  étant reliés par la correspondance précitée (voir II), si le premier décrit une courbe (Q), le second se déplace sur une courbe ( $\varpi$ ). On demande de choisir (Q) de telle sorte que les tangentes à ces deux courbes, aux points associés  $M_0$  et  $\omega$ , soient parallèles.*

*On déterminera l'enveloppe des courbes (Q) ainsi obtenues et celle des courbes ( $\varpi$ ) correspondantes.*

SOLUTION PAR M. BERTRAND GAMBIER,  
Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

Supposons d'abord

$$ab' - ba' \neq 0.$$

Il est commode, pour résoudre la question I qui a, presque tout entière, un caractère nettement projectif, de considérer en même temps que les points  $(x, y)$  ou  $(x_0, y_0)$  les points respectivement correspondants  $(X, Y)$  ou  $(X_0, Y_0)$ , dont les coordonnées, par rapport aux mêmes axes rectangulaires, sont définies par les formules

$$(1) \quad \begin{cases} x = aX + bY, & x_0 = aX_0 + bY_0, \\ y = a'X + b'Y, & y_0 = a'X_0 + b'Y_0. \end{cases}$$

Ces formules définissent une transformation homographique très simple, conservant l'origine et la droite de l'infini. La courbe C est remplacée par une autre  $\bar{C}$ , admettant ou non un point de rebroussement, dans les mêmes conditions que C.

Le point  $M_0$  est remplacé par un point  $\bar{M}_0$  décrivant une parabole  $\bar{P}$  et l'on remonte aisément à la figure pri-

mitive par les formules inverses

$$(2) \quad \begin{cases} X = \frac{b'x - by}{ab' - ba'}, & X_0 = \frac{b'x_0 - by_0}{ab' - ba'}; \\ Y = \frac{-a'x + ay}{ab' - ba'}, & Y_0 = \frac{-a'x_0 + ay_0}{a'b' - ba'}. \end{cases}$$

Les équations paramétriques de  $\bar{C}$  sont, *sans avoir besoin de résoudre le moindre système linéaire*, évidemment

$$(\bar{C}) \quad X = t^3 - tX_0, \quad Y = t^2 - tY_0.$$

Pour que  $\bar{C}$  (ou C) ait un point de rebroussement au point de paramètre  $\theta$  il faut et il suffit que

$$(2) \quad X_0 = 3\theta^2, \quad Y_0 = 2\theta.$$

Ce sont les équations paramétriques de la parabole  $\bar{P}$  :

$$(2') \quad (\bar{P}) \quad 4X_0 = 3Y_0^2.$$

Le point de rebroussement ( $R_0$ ) a pour coordonnées

$$(3) \quad X_1 = -2\theta^3, \quad Y_1 = -\theta^2.$$

Ce sont les équations paramétriques de la courbe ( $\bar{R}$ ) :

$$(\bar{R}) \quad X_1^2 + 4Y_1^3 = 0.$$

Entre les coordonnées de  $\bar{M}_0$  et  $\bar{R}_0$  ont lieu les relations

$$(4) \quad \begin{cases} Y_1 = -\frac{X_0}{3}, & X_1 = -\frac{X_0Y_0}{3}, \\ X_0 = -3Y_1, & Y_0 = \frac{X_1}{Y_1} \end{cases}$$

qui définissent une *transformation quadratique birationnelle*.

Les courbes particulières ( $\bar{C}$ ), (ou C), qui admettent un point de rebroussement, forment donc une famille à un paramètre ( $\theta$ ) défini par les équations paramétriques

$$(\bar{C}_\theta) \quad X = t^3 - 3\theta^2t, \quad Y = t^2 - 2\theta t.$$

Les paramètres directeurs  $X'_t, Y'_t$  de la tangente contiennent le facteur  $t - \theta$ , correspondant au point de rebroussement et entraînant la diminution d'une unité pour la classe de  $\bar{C}_0$  relativement à la classe de la courbe  $\bar{C}$  générale : la suppression de ce facteur permet de prendre pour paramètres, en un point quelconque

$$\left[ \frac{3}{2}(t + \theta), 1 \right]$$

et, par suite, au point de rebroussement  $(3\theta, 1)$  : mais alors on constate que ce sont aussi les paramètres directeurs de la tangente à  $\bar{R}$  au même point. Conclusion : *Le lieu du point de rebroussement, l'enveloppe de la tangente de rebroussement, l'enveloppe de la courbe  $\bar{C}_0$  coïncident avec la courbe  $(\bar{R})$ . La correspondance par points  $\bar{M}_0$  et  $\bar{R}_0$  entre  $(\bar{P})$  et  $(\bar{R})$  a lieu, de plus, par tangentes parallèles.*

En revenant aux points ou courbes primitives, les mêmes propriétés ont lieu : les formules (1) donnent immédiatement les équations paramétriques de (P), (R) ou (C<sub>3</sub>) et les formules (1') les équations explicites de ces courbes. Ceci nous permet d'ailleurs de résoudre l'unique partie de la question I qui n'a plus le caractère projectif.

*La relation*

$$ab + a'b' = 0$$

*est nécessaire et suffisante pour que l'enveloppe (R) soit la développée d'une parabole.*

En effet, (R) a pour équations paramétriques

$$(R) \quad x = -2a\theta^3 - b\theta^2, \quad y = -2a'\theta^3 - b'\theta^2$$

et l'on calcule l'arc  $s$  par la formule

$$(5) \quad \frac{ds}{dt} = 2\theta \sqrt{(3a\theta + b)^2 + (3a'\theta + b')^2}.$$

*On suppose  $ab' - ba' \neq 0$  : donc le trinôme en  $\theta$*

sous le radical n'est pas carré parfait. Si l'on suppose  $ab + a'b' = 0$ , on a aussitôt

$$\begin{aligned} ds &= 3\sqrt{a^2 + a'^2} \sqrt{0^2 + \frac{b^2 + b'^2}{9(a^2 + a'^2)}} d(0^2), \\ s &= 2\sqrt{a^2 + a'^2} \left[ 0^2 + \frac{b^2 + b'^2}{9(a^2 + a'^2)} \right]^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2[(3a\theta + b)^2 + (3a'\theta + b')^2]^{\frac{3}{2}}}{27(a^2 + a'^2)} \end{aligned}$$

et l'on constate sans peine que la courbe définie par les formules

$$\begin{aligned} x &= \frac{2(3a\theta + b)}{27(a^2 + a'^2)} [(3a\theta + b)^2 + (3a'\theta + b')^2] - 2a\theta^3 - b\theta^2, \\ y &= \frac{2(3a'\theta + b')}{27(a^2 + a'^2)} [(3a\theta + b)^2 + (3a'\theta + b')^2] - 2a'\theta^3 - b'\theta^2 \end{aligned}$$

est une parabole et admet (R) comme développée.

Si  $ab + a'b' = 0$ , on voit aussi que la parabole P a son sommet à l'origine.

On constate aisément que l'intégrale

$$\int (u + \lambda) \sqrt{u^2 + \mu} du$$

n'est algébrique que si  $\lambda\mu = 0$ , de sorte que, sans insister davantage, on constate que la condition  $ab + a'b' = 0$ , démontrée *suffisante*, est aussi *nécessaire*. On peut d'ailleurs remarquer que si l'on fait tourner les axes  $Ox$ ,  $Oy$  autour de l'origine, les quantités  $(x, y)$ ,  $(a, a')$ ,  $(b, b')$ ,  $(x_0, y_0)$  sont soumises à la même transformation linéaire et homogène, de sorte que l'hypothèse  $ab + a'b' = 0$  permet, par une rotation d'axes préliminaires, de supposer  $b = 0$ ,  $a' = 0$  sans diminuer la généralité; je n'insisterai pas davantage sur ce point et la liaison avec les transformations homographiques ou les coordonnées trilineaires.

Si l'on suppose  $ab' - ba' = 0$ , on écarte le cas où  $a, a'$  seraient nuls tous deux et où (C) se réduirait à une parabole; si donc  $a \neq 0$ , on peut écrire  $b = ma, b' = ma'$ , puis

$$(C) \quad x = at^3 + bt^2 - x_0t, \quad y = mx - (y_0 - mx_0)t.$$

Si donc  $y_0 - mx_0 = 0$ , la courbe C se réduit à la droite  $y - mx = 0$ ; si  $y_0 - mx_0 \neq 0$ , la courbe C admet un point de rebroussement *indépendant de  $x_0, y_0$* , rejeté à l'infini dans la direction  $(1, m)$ ; la tangente de rebroussement est la droite de l'infini.

II et V. Opérons pour ces deux questions, uniquement avec les variables  $(X, Y)$  ou  $(X_0, Y_0)$ .

II. Le cas  $ab' - ba' = 0$  est écarté. Les constantes  $a, b, a', b', x_0, y_0$  sont supposées réelles. La cubique C, unicursale, admet un point double, unique, donc à *coordonnées toujours réelles, isolé ou non isolé, suivant que les valeurs du paramètre,  $t_1$  et  $t_2$ , qui leur correspondent sont imaginaires conjuguées ou réelles.*

Les équations  $X(t_1) = X(t_2)$  et  $Y(t_1) = Y(t_2)$  ayant été débarrassées du facteur  $t_1 - t_2$ , on a aisément

$$(1) \quad \begin{cases} t_1 + t_2 = Y_0 \\ t_1 t_2 = Y_0^2 - X_0 \end{cases} \quad t_1 - t_2 = \varepsilon \sqrt{4X_0 - 3Y_0^2}.$$

Pour que  $\omega$  soit point double, non isolé, on a la condition

$$4X_0 - 3Y_0^2 \geq 0,$$

de sorte que la séparatrice est, comme juste, la parabole. ( $\bar{P}$ ). Les coordonnées  $(X', Y')$  du point double  $\omega$  sont

$$\frac{1}{2} [X(t_1) + X(t_2)], \quad \frac{1}{2} [Y(t_1) + Y(t_2)],$$

de sorte que l'on obtient aisément

$$(2) \quad X' = Y_0(X_0 - Y_0^2), \quad Y' = X_0 - Y_0^2,$$

d'où l'on déduit aisément

$$(2') \quad Y_0 = \frac{X'}{Y'}, \quad X_0 = Y' + \frac{X'^2}{Y'^2}.$$

Les formules (2), (2') définissent une transformation birationnelle entre les deux systèmes de variables  $(X_0, Y_0)$  et  $(X', Y')$ .

A un point  $M_0(X_0, Y_0)$  correspond un seul point  $\omega(X', Y')$  par les formules (2). Si  $X'$  et  $Y'$  ne sont pas nulles toutes deux, les formules (2') donnent inversement un point  $M_0$  et un seul, correspondant à un point  $\omega$  donné; mais si  $\omega$  coïncide avec l'origine, les formules (2') deviennent illusoires et l'on s'aperçoit, par les formules (2), que les points correspondants  $M_0$  sont répartis sur la parabole d'équation

$$(3) \quad X_0 - Y_0^2 = 0.$$

Si l'on étudie les formules (2), (2') du point de vue des transformations birationnelles, sans nous préoccuper davantage de la question qui les a introduites, on remarque que chaque droite de l'un des plans  $(X_0, Y_0)$  ou  $(X', Y')$  est transformée en cubique dans l'autre. Les formules de transformation peuvent s'écrire avec des coordonnées homogènes

$$(4) \quad \begin{cases} X_0 = X'^2 Z' + Y'^3, & Y_0 = X' Y' Z', & Z_0 = Y'^2 Z', \\ (4') \quad \begin{cases} X' = Y_0(X_0 Z_0 - Y_0^2), & Y' = (X_0 Z_0 - Y_0^2) Z_0, & Z' = Z_0^3, \end{cases} \end{cases}$$

Les points fondamentaux du plan  $(X_0, Y_0)$  se réduisent à l'unique point à l'infini sur l'axe des  $X_0$ ; les formules (2) montrent que, pour  $X_0$  infini et  $Y_0$  fini, le point  $(X', Y')$  est rejeté à l'infini dans la direction  $(Y_0, 1)$  de sorte qu'au point à l'infini de l'axe des  $X_0$  correspond toute la droite de l'infini du plan  $(X', Y')$ ; c'est ici qu'apparaît l'utilité des formules homo-

gènes (4), (4'). Servons-nous en effet de ces dernières : nous voyons qu'au point  $Y_0 = Z_0 = 0$  (point à l'infini de l'axe des  $X_0$ ) correspond, soit  $Z' = 0$ , et c'est ce qui vient d'être étudié ( $X_0$  devenant infini et  $Y_0$  restant fini, si l'on emploie les coordonnées non homogènes), soit  $Y' = 0$ ; d'après ce qui vient d'être dit, il est nécessaire dans cette dernière hypothèse que les coordonnées non homogènes  $X_0, Y_0$  deviennent infinies toutes deux, de façon que la différence  $Y_0^2 - X_0$  tende vers zéro (branche parabolique dans la direction de l'axe des  $X_0$ ); par exemple, si le point  $(X_0, Y_0)$  décrit la courbe

$$X_0 = Y_0^2 + \frac{k}{Y_0},$$

où  $k$  est une constante numérique, les coordonnées non homogènes  $X'$  et  $Y'$  tendent respectivement vers  $k$  et 0, quand  $Y_0$  devient infini et l'on obtient ainsi, en faisant varier  $k$ , tous les points de la droite  $Y' = 0$  : on a donc deux droites et non une, correspondant au point à l'infini de l'axe  $X_0$ .

Les points fondamentaux du plan  $(X', Y')$  sont l'origine, à laquelle correspond toute la parabole  $X_0 - Y_0^2 = 0$ , puis le point à l'infini sur l'axe  $X'$ . Si l'on se donne un chemin *déterminé* arrivant à l'origine  $X' = Y' = 0$  avec une tangente *bien déterminée* de pente  $m$ , on a le point  $X_0 = m^2, Y_0 = m$  susceptible de parcourir toute la parabole  $X_0 - Y_0^2 = 0$ . Si l'on donne, en coordonnées non homogènes, à  $X'$  une valeur infinie et à  $Y'$  une valeur finie,  $X_0$  et  $Y_0$  sont infinis de sorte que  $\frac{Y_0}{X_0}$  soit nul : on a donc le point à l'infini de l'axe  $X_0$ ; si l'on fait grandir  $X'$  et  $Y'$  indéfiniment de façon que le rapport  $\frac{Y'}{X'}$  tende vers zéro, le point  $(X', Y')$  s'éloigne à l'infini dans la direction de l'axe des  $X'$ , les quantités  $X_0$  et  $Y_0$  augmentent indéfini-

niment et l'on a

$$\frac{X_0}{Y_0} = \frac{Y'^3 + X'^2}{Y'X'}$$

Si donc on fait parcourir au point  $(X', Y')$  la courbe d'équation

$$Y'^3 + X'^2 = m Y'X',$$

où  $m$  est une constante, le point  $(X_0, Y_0)$  décrit la droite de pente  $\frac{1}{m}$  issue de l'origine et quand le point  $(X', Y')$  s'éloigne à l'infini sur cette courbe, le point  $(X_0, Y_0)$  s'éloigne aussi à l'infini sur la droite en jeu: donc au point à l'infini de l'axe  $X'$  correspond la droite de l'infini du plan  $X_0, Y_0$ .

V. Pour ne pas rompre le cours des idées, traitons maintenant V. Rappelons que  $\bar{M}_0$  a pour coordonnées  $(X_0, Y_0)$  et  $\omega (X', Y')$  avec les formules

$$(T) \quad \begin{cases} X' = Y_0(X_0 - Y_0^2), & Y' = X_0 - Y_0^2, \\ Y_0 = \frac{X'}{Y'}, & X_0 = Y' + \frac{X'^2}{Y'^2}. \end{cases}$$

Quand le point  $\bar{M}_0$  vient de la parabole  $P$ , le point  $\omega$  vient en un point  $\bar{R}_0$  de  $(\bar{R})$ , la courbe  $\bar{C}$  ayant un rebroussement en  $\bar{R}_0$  et nous avons remarqué que les tangentes en  $\bar{M}_0$  et  $\bar{R}_0$  aux deux courbes  $(\bar{P})$  et  $(\bar{R})$  sont parallèles: ces deux courbes se correspondent dans la transformation birationnelle actuelle; nous avons vu plus haut que  $(\bar{P})$  et  $(\bar{R})$  se correspondent aussi dans une autre transformation birationnelle, mais quadratique.

La transformation (T) remplace une courbe *quelconque* de l'un des plans, de degré  $m$ , par une courbe de degré  $3m$  de l'autre plan, admettant les points fondamentaux de ce plan avec un certain degré de multiplicité; si la courbe à transformer, au lieu d'être *quel-*

*conque*, passe par les points fondamentaux, le degré de la courbe correspondante s'abaisse. Pour que les tangentes aux points homologues de deux courbes transformées soient parallèles, il faut que l'on ait *constamment* sur ces deux courbes

$$(1) \quad \frac{dY'}{dX'} = \frac{dY_0}{dX_0}.$$

Ceci donne, en conservant les variables  $X_0, Y_0$ ,

$$(2) \quad dX_0^2 - 3Y_0 dY_0 dX_0 + (3Y_0^2 - X_0) dY_0^2 = 0$$

C'est une équation différentielle du premier ordre à laquelle doit satisfaire la courbe (Q) décrite par le point  $M_0$ . Cette équation prend immédiatement, en la résolvant par rapport à  $\frac{dX_0}{dY_0}$ , la forme

$$(3) \quad \frac{dX_0 - \frac{3}{2} Y_0 dY_0}{\sqrt{X_0 - \frac{3}{4} Y_0^2}} = \pm dY_0$$

manifestement intégrable : on obtient ainsi la famille de paraboles

$$(4) \quad 4X_0 - 3Y_0^2 = (Y_0 - h)^2,$$

où  $h$  est une constante ; toutes ces paraboles ont même direction d'axe que  $\bar{P}$  et lui sont bitangentes aux points où la droite  $Y_0 = h$  rencontre  $\bar{P}$  ; donc l'enveloppe des courbes (Q) particulières est précisément  $\bar{P}$ . Donc dans le plan  $(X', Y')$  les courbes ( $\varpi$ ) ont pour enveloppe la courbe ( $\bar{R}$ ). Avec les formules (T) on a immédiatement l'équation des courbes  $\varpi$  :

$$X'^2 + 4Y'^3 = (X' - hY')^2$$

et l'on voit bien que les cubiques ainsi obtenues ont la courbe ( $\bar{R}$ ) pour enveloppe.

## III. On a

$$\begin{aligned} F(t) &\equiv (3at^2 + 2bt - x_0)^2 + (3a't^2 + 2b't - y_0)^2 \\ &\equiv [3at^2 + 2bt - x_0 + i(3a't^2 + 2b't - y_0)] \\ &\quad \times [3at^2 + 2bt - x_0 - i(3a't^2 + 2b't - y_0)]. \end{aligned}$$

Pour que  $F(t)$  ait *une seule racine double*, il est nécessaire et suffisant que l'une des trois hypothèses suivantes ait lieu :

$$\begin{aligned} (a) \quad & 3(a + ia')(x_0 + iy_0) + (b + ib')^2 = 0, \\ (b) \quad & 3(a - ia')(x_0 - iy_0) + (b - ib')^2 = 0, \\ (c) \quad & x_0 = 3a\theta^2 + 2b\theta, \quad y_0 = 3a'\theta^2 + 2b'\theta. \end{aligned}$$

Cette dernière exprime que le point  $M_0$  appartient à la courbe (R) déjà étudiée. On a donc, dans ce cas,

$$(1) \quad \frac{ds}{dt} = (t - \theta) \sqrt{[3a(t + \theta) + 2b]^2 + [3a'(t + \theta) + 2b']^2}.$$

L'arc  $s$  s'obtient alors par une combinaison de fonctions rationnelles et logarithmiques en  $t$ ; le trinôme en  $(t + \theta)$  sous le radical n'est pas carré parfait, puisque  $ab' - ba'$  est supposé non nul; pour que l'arc  $s$  soit algébrique, il faut et suffit que  $t = \theta$  soit racine de la dérivée du trinôme en  $t$  placé sous le radical, d'où

$$\theta = - \frac{ab + a'b'}{3(a^2 + a'^2)}$$

et alors la courbe ( $C_\theta$ ) correspondante, non seulement admet le point,  $t = \theta$ , comme point de rebroussement, mais est une développée de parabole. La valeur de  $\theta$  obtenue correspond au sommet de la parabole P.

Si l'hypothèse (a) ou (b) est réalisée, à l'exclusion de l'autre, la courbe (C) est imaginaire.

Pour que  $F(t)$  ait *deux racines doubles*, il faut, ou bien que les deux facteurs de  $F(t)$  soient proportion-

nels, d'où  $ab' - ba' = 0$  et  $\frac{a'}{a} = \frac{y_0}{x_0}$ , c'est le cas où (C) se réduit à une droite, ou bien que chaque facteur soit carré parfait, autrement dit ( $a$ ) et ( $b$ ) sont réalisées simultanément. Mais alors si l'on considère la parabole (P) déjà rencontrée

$$(2) \quad x = 3at^2 + 2bt, \quad y = 3a't^2 + 2b't,$$

cela exprime purement et simplement que la distance

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

d'un point *variable*  $t$  de cette parabole au point *fixe*  $(x_0, y_0)$  s'exprime rationnellement en  $t$  ou, si l'on préfère, au moyen des coordonnées  $(x, y)$  du point de P; le point  $(x_0, y_0)$  est donc le foyer de P. Les coordonnées  $(x_0, y_0)$  de ce foyer F et le paramètre  $p$  se déterminent aisément grâce à cette remarque. En effet ( $a$ ) et ( $b$ ) réunies donnent

$$(3) \quad \begin{cases} 3(ax_0 - a'y_0) + b^2 - b'^2 = 0, \\ 3(a'x_0 + ay_0) + 2bb' = 0; \end{cases}$$

d'où pour le foyer F

$$(4) \quad x_0 = \frac{a(b'^2 - b^2) - 2a'bb'}{3(a^2 + a'^2)}, \quad y_0 = \frac{a'(b^2 - b'^2) - 2abb'}{3(a^2 + a'^2)},$$

puis

$$\begin{aligned} (5) \quad F(t) &\equiv \frac{[3(a + ia')t + (b + ib')]^2 [3(a - ia')t + (b - ib')]^2}{9(a^2 + a'^2)} \\ &\equiv \frac{[(3at + b)^2 + (3a't + b')^2]^2}{9(a^2 + a'^2)} \\ &\equiv \frac{[3ax + 3a'y + b^2 + b'^2]^2}{9(a^2 + a'^2)}. \end{aligned}$$

La directrice a donc pour équation

$$(6) \quad 3ax + 3a'y + b^2 + b'^2 = 0.$$

La distance du foyer F à la directrice, ou  $p$ , se calcule aisément :

$$(7) \quad p = \frac{2(ab' - ba')^2}{3(a^2 + a'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

IV. On a cette fois

$$(1) \quad F(t) \equiv (3at^2 + 2bt - x_0)^2 + (3a't^2 + 2b't - y_0)^2 + (3a''t^2 + 2b''t - z_0)^2.$$

Pour que  $F(t)$  ait *une seule racine double*, il suffit de l'identifier avec

$$(t^2 - 2\theta t + \theta^2) \left[ 9(a^2 + a'^2 + a''^2)t^2 + \lambda t + \frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}{\theta^2} \right]$$

et les relations obtenues en égalant les termes en  $t^3$ ,  $t^2$  et  $t$  permettent, par l'élimination de  $\lambda$  et  $\theta$ , d'obtenir une équation unique entre  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  de sorte que le point  $M_0$  décrit une *surface*, d'ailleurs tout entière imaginaire, possédant une *ligne double réelle, mais isolée*; cette ligne est celle que l'énoncé demande; on l'obtient en exprimant que le facteur  $t - \theta$  appartient à chacun des trois trinômes qui figurent dans  $F(t)$ . On a ainsi

$$(II) \quad x_0 = 3a\theta^2 + 2b\theta, \quad y_0 = 3a'\theta^2 + 2b'\theta, \quad z_0 = 3a''\theta^2 + 2b''\theta, \\ F(t) \equiv (t - \theta)^2 \left\{ \begin{aligned} & [3a(t + \theta) + 2b]^2 \\ & + [3a'(t + \theta) + 2b']^2 + [3a''(t + \theta) + 2b'']^2 \end{aligned} \right\}.$$

Le point  $M_0$  décrit alors une parabole (II); la courbe  $\Gamma_\theta$  a pour équations paramétriques

$$(F_\theta) \quad \begin{cases} x = a(t^3 - 3\theta^2 t) + b(t^2 - 2\theta t), \\ y = a'(t^3 - 3\theta^2 t) + b'(t^2 - 2\theta t), \\ z = a''(t^3 - 3\theta^2 t) + b''(t^2 - 2\theta t). \end{cases}$$

Les deux courbes (II) et  $(F_\theta)$  sont donc dans le plan

d'équation

$$(2) \quad \begin{vmatrix} x & a & b \\ y & a' & b' \\ z & a'' & b'' \end{vmatrix} = 0.$$

La courbe  $(\Gamma_\theta)$  correspond par *affinité* à la courbe

$$(\overline{C}_\theta) \quad X = t^3 - 3\theta^2 t, \quad Y = t^2 - 2\theta t$$

déjà rencontrée, qui a un point de rebroussement pour  $t = \theta$ .

On peut remarquer que, si l'on effectue une transformation de coordonnées en passant du système rectangulaire  $Oxyz$  à un autre système, rectangulaire ou non,  $OXYZ$  de même origine, les quantités  $(x, y, z)$ ,  $(a, a', a'')$ ,  $(b, b', b'')$ ,  $(x_0, y_0, z_0)$  subissent la même transformation et l'on peut dire que c'est cette simple remarque qui domine la solution actuelle. Si donc le déterminant  $\Delta$

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ x_0 & y_0 & z_0 \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, on peut réduire les équations de  $\Gamma$  à la forme simple

$$(3) \quad X = t^3, \quad Y = t^2, \quad Z = -t$$

par *affinité*. Si le déterminant  $\Delta = 0$ , on peut par une transformation d'axes rectangulaires réduire les équations de  $\Gamma$  à la forme

$$(4) \quad \begin{cases} x = at^3 + bt^2 - x_0 t, \\ y = a' t^3 + b' t^2 - y_0 t, \\ z = 0 \end{cases}$$

et nous voyons bien que  $\Pi$  et  $\Gamma_\theta$  jouent alors l'une par rapport à l'autre le rôle de  $P$  et  $C_\theta$  précédemment.

Si  $F(t)$  est le carré d'un trinôme de second degré, le point  $x_0, y_0, z_0$  coïncide, pour la raison déjà donnée au paragraphe précédent, avec l'un des foyers de la parabole  $(\Pi)$  déjà rencontrée

$$(\Pi) \quad x = 3at^2 + 2bt, \quad y = 3a't^2 + 2b't, \quad z = 3a''t^2 + 2b''t,$$

de sorte que le point  $M_0$  décrit la parabole  $(\Pi')$  focale de  $(\Pi)$ . La tangente au point  $t$  de  $(\Gamma)$  a pour paramètres directeurs

$$x - x_0, \quad y - y_0, \quad z - z_0$$

[ $x, y, z$  désignant le point de  $(\Pi)$  correspondant au même  $t$  que le point de  $(\Gamma)$ ].

Elle est donc parallèle successivement aux diverses génératrices du cône de sommet  $(x_0, y_0, z_0)$  s'appuyant sur  $(\Pi)$ ; ce cône est de révolution, donc  $(\Gamma)$  est une hélice.

Pour traiter la question sans calculs fastidieux ou inélégants, calculons d'abord les coordonnées du sommet de  $(\Pi)$ . L'axe a pour paramètres directeurs  $(a, a', a'')$ ; la tangente au sommet est perpendiculaire à l'axe, d'où pour le  $t_1$  du sommet

$$(3at_1 + b)a + (3a't_1 + b')a' + (3a''t_1 + b'')a'' = 0$$

ou

$$(5) \quad t_1 = -\frac{ab + a'b' + a''b''}{3(a^2 + a'^2 + a''^2)}.$$

Si l'on pose

$$(6) \quad t = \bar{t} - \frac{ab + a'b' + a''b''}{3(a^2 + a'^2 + a''^2)}$$

et si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au sommet, on a, en appelant  $x_1, y_1, z_1$  les coordon-

nées du sommet S de ( $\Pi$ )

$$(7) \quad \begin{cases} x = x_1 + \bar{x}, & y = y_1 + \bar{y}, & z = z_1 + \bar{z}; \\ x_0 = x_1 + \bar{x}_0, & y_0 = y_1 + \bar{y}_0, & z_0 = z_1 + \bar{z}_0; \\ \bar{x} = 3a\bar{t}^2 + 2\bar{b}\bar{t}, & \bar{y} = 3a'\bar{t}^2 + 2\bar{b}'\bar{t}, \\ & \bar{z} = 3a''\bar{t}^2 + 2\bar{b}''\bar{t}; \\ \bar{b} = 3at_1 + b, & \bar{b}' = 3a't_1 + b', & \bar{b}'' = 3a''t_1 + b''; \end{cases}$$

$$(8) \quad F(t) = S(x - x_0)^2 = S(\bar{x} - \bar{x}_0)^2.$$

Faisons maintenant une rotation des axes autour de S en prenant pour axes nouveaux SX, SY, SZ les droites qui ont pour cosinus directeurs dans les anciens axes

$$(SX) \quad \frac{a}{\sqrt{Sa^2}}, \quad \frac{a'}{\sqrt{Sa'^2}}, \quad \frac{a''}{\sqrt{Sa''^2}};$$

$$(SY) \quad \frac{bSa^2 - aSab}{\sqrt{Sa^2}\sqrt{Sa^2Sb^2 - (Sab)^2}}, \quad \frac{b'Sa^2 - a'Sab}{\sqrt{Sa'^2}\sqrt{Sa'^2Sb'^2 - (Sab')^2}}, \quad \frac{b''Sa^2 - a''Sab}{\sqrt{Sa''^2}\sqrt{Sa''^2Sb''^2 - (Sab'')^2}};$$

$$(SZ) \quad \frac{a'b' - b'a''}{\sqrt{Sa^2Sb'^2 - (Sab')^2}}, \quad \frac{a''b - b'a}{\sqrt{Sa'^2Sb^2 - (Sab)^2}}, \quad \frac{ab' - ba''}{\sqrt{Sa^2Sb^2 - (Sab)^2}}.$$

On s'est servi de ce fait que les matrices

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ \bar{b} & \bar{b}' & \bar{b}'' \end{vmatrix}$$

donnent les mêmes mineurs, et des formules

$$(9) \quad \begin{cases} \bar{b} = \frac{bSa^2 - aSab}{Sa^2}, & \bar{b}' = \frac{b'Sa^2 - a'Sab}{Sa'^2}, \\ \bar{b}'' = \frac{b''Sa^2 - a''Sab}{Sa^2}. \end{cases}$$

On aura, en posant

$$(10) \quad A = \sqrt{Sa^2}, \quad B = \sqrt{S\bar{b}^2} = \frac{\sqrt{Sa^2Sb^2 - (Sab)^2}}{\sqrt{Sa^2}},$$

comme équations paramétriques de (II)

$$(II) \quad X = 3A\bar{t}^2, \quad Y = 2B\bar{t}, \quad Z = 0;$$

$$(11) \quad F(t) \equiv (3A\bar{t}^2 - X_0)^2 + (2B\bar{t} - Y_0)^2 + Z_0^2 \\ \equiv 9A^2\bar{t}^4 - (6AX_0 - 4B^2)\bar{t}^2 - 4BY_0\bar{t} + X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2.$$

Si  $F(t)$  est carré parfait, on a nécessairement

$$(12) \quad \begin{cases} Y_0 = 0, \\ F(t) \equiv \left[ 3A\bar{t}^2 - \left( X_0 - \frac{2B^2}{3A} \right) \right]^2. \end{cases}$$

On a donc pour le lieu du point  $M_0$  la parabole ( $\Pi'$ ) :

$$(II') \quad X_0^2 + Z_0^2 = \left( X_0 - \frac{2B^2}{3A} \right)^2, \quad Y_0 = 0.$$

Le foyer de ( $\Pi'$ ) est le point  $S$ ; le foyer de ( $\Pi$ ) est le sommet de ( $\Pi'$ ),  $\left( X = \frac{B^2}{3A}, Y = Z = 0 \right)$ . La directrice de ( $\Pi'$ ) est la droite d'équations  $Y = 0, X = \frac{2B^2}{3A}$ .

On a pour équations de  $\Gamma$

$$X = A\bar{t}^3 - X_0\bar{t}, \quad Y = B\bar{t}^2, \quad Z = -Z_0\bar{t}; \\ \frac{ds}{dt} = 3A\bar{t}^2 - \left( X_0 - \frac{2B^2}{3A} \right),$$

formules où l'on doit remplacer  $X_0$  par son expression

$$X_0 = -\frac{3AZ_0^2}{4B^2} + \frac{B^2}{3A}.$$

On remonte aisément aux axes primitifs par les formules

$$x = x_1 + \frac{aX}{A} + \frac{\bar{b}Y}{B} - \frac{a'b'' - b'a''}{\sqrt{Sa^2Sb^2 - (Sab)^2}} Z, \\ y_1 = \dots\dots\dots, \\ z_1 = \dots\dots\dots$$

Je n'achève pas les calculs qui maintenant n'offrent

plus de difficulté, je signale simplement la formule

$$p = \frac{2}{3} \frac{(a'b'' - b'a'')^2 + (a''b - b''a)^2 + (ab' - ba')^2}{(a^2 + a'^2 + a''^2)^{\frac{3}{2}}}$$

qui donne le paramètre commun de  $(\Pi)$  et  $(\Pi')$ .

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

### 2409.

(1919, p. 160.)

*Si deux triangles sont à la fois homologues et orthologiques, les deux centres d'orthologie sont sur la perpendiculaire abaissée du centre d'homologie sur l'axe d'homologie.*

Application. — Soient  $M$  et  $M'$  deux points inverses par rapport à un triangle  $ABC$ ,  $\mu_1, \mu_2, \mu_3; \mu'_1, \mu'_2, \mu'_3$  leurs projections sur  $BC, CA, AB$ ; si les droites  $A\mu_1, B\mu_2, C\mu_3$  et  $A\mu'_1, B\mu'_2, C\mu'_3$  sont concourantes, elles se coupent sur  $MM'$  et les axes d'homologie des triangles  $ABC, \mu_1\mu_2\mu_3$  et  $ABC, \mu'_1\mu'_2\mu'_3$  sont perpendiculaires à  $MM'$ .

R. BOUVAIST.

### SOLUTION

Par M. R. B.

On obtient une démonstration rapide par des considérations de géométrie dans l'espace. Partons de ce théorème, sur lequel Maxwell avait établi sa théorie des figures réciproques en Statique graphique, avant que Cremona y appliquât les propriétés des complexes linéaires.

*Si deux droites sont polaires réciproques par rapport à un parabolôïde de révolution, leurs projections sur un plan perpendiculaire à l'axe du parabolôïde sont rectangulaires.*

Soient alors  $ABC, A'B'C'$  deux triangles orthologiques,  $D'$  un de leurs centres d'orthologie, en sorte que  $D'A', D'B', D'C'$  soient perpendiculaires respectivement à  $BC, CA, AB$ .

On peut considérer  $ABC$  comme projection d'un triangle  $abc$  de l'espace sur le plan de la figure, que je supposerai hori-

zontal, et trouver un parabolôïde de révolution. (P) d'axe vertical, tel que le pôle  $d'$  du plan  $abc$  par rapport à (P) se projette en  $D'$ . Cela peut se faire d'une infinité de manières. D'après le théorème rappelé ci-dessus,  $D'A'$ ,  $D'B'$  et  $D'C'$  sont les projections de  $d'a'$ ,  $d'b'$ ,  $d'c'$ , polaires respectivement de  $bc$ ,  $ca$ ,  $ab$ . Soient  $d$  le pôle du plan  $a'b'c'$ , et  $D$  sa projection;  $da$ ,  $db$ ,  $dc$  sont les polaires respectives de  $b'c'$ ,  $c'a'$ ,  $a'b'$ , en sorte que  $DA$ ,  $DB$ ,  $DC$  sont perpendiculaires respectivement à  $B'C'$ ,  $C'A'$ ,  $A'B'$ . Le point  $D$  est donc le second centre d'homologie des triangles  $ABC$ ,  $A'B'C'$  (la démonstration en établit d'ailleurs l'existence).

Si maintenant les deux triangles  $ABC$ ,  $A'B'C'$  sont homologues,  $O$  étant leur centre d'homologie, les droites  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$  rencontrent la verticale du point  $O$ . Mais les deux tétraèdres  $abcd$ ,  $a'b'c'd'$  étant polaires réciproques par rapport à (P), on sait que les droites  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$ ,  $dd'$  sont sur une demi-quadrique. La verticale du point  $O$ , rencontrant les trois premières, rencontre donc aussi la quatrième. Autrement dit,  $DD'$  passe en  $O$ .

En outre, la droite d'intersection  $l$  des plans  $abc$ ,  $a'b'c'$  est la polaire de  $dd'$ . Sa projection  $L$ , qui n'est autre que l'axe d'homologie des triangles  $ABC$ ,  $A'B'C'$ , est donc perpendiculaire à  $DD'$ .

Le théorème est ainsi complètement établi.

L'application signalée dans l'énoncé est immédiate.

*Remarque.* — Le lemme utilisé est un cas particulier de la proposition suivante : *Si à partir d'un point quelconque de l'espace on projette sur un plan deux droites polaires réciproques par rapport à une quadrique, les projections obtenues sont conjuguées par rapport au contour apparent de la quadrique.*

La démonstration est facile.

Cette proposition permet de généraliser l'énoncé 2409, en remplaçant les relations d'orthogonalité qui interviennent dans la définition des triangles orthologiques par des *conjugaisons* de droites par rapport à une conique. Le raisonnement est identique.

On conclut aisément de là que l'énoncé 2409 est valable sur la sphère.

Autres solutions de l'AUTEUR et de M. TRÉBAULT.

Soient ABCD un quadrilatère inscrit dans un cercle Q, M et N les extrémités du diamètre parallèle à la droite de Simson du point D par rapport au triangle ABC. Démontrer que les droites de Simson des points M et N par rapport au triangle ABC sont parallèles aux axes des paraboles circonscrites au quadrilatère ABCD.

SERBAN A. GHEORGHÈRE.

SOLUTION

Par ÉMILE BALLY.

Les droites de Simson d'un triangle étant les tangentes aux sommets des paraboles inscrites à ce triangle, si l'on envisage, au lieu de ces droites, les axes de ces paraboles, l'énoncé se transforme dans le suivant :

*Les axes des paraboles circonscrites à un quadrangle ABCD inscrits dans un cercle (Q) sont parallèles aux axes des paraboles inscrites au triangle ABC et qui ont leurs foyers aux extrémités du diamètre de (Q) perpendiculaire à l'axe de la parabole de foyer D inscrite au triangle ABC.*

(Le lecteur est prié de faire la figure et de se rappeler la propriété élémentaire concernant les tangentes issues d'un point X à une parabole de foyer F, la droite XF et la parallèle issue de X à l'axe de la parabole.)

Joignons DA, et menons DT parallèle à BC, qui recoupe le cercle (Q) en T. L'axe de la parabole de foyer D inscrite à ABC est parallèle à AT.

La même construction, appliquée aux extrémités M et N du diamètre de (Q) perpendiculaire à AT, nous montre que les axes des paraboles inscrites à ABC et qui ont leurs foyers en ces extrémités M et N sont précisément les droites MD et ND, c'est-à-dire les bissectrices des droites DA et DT.

Les directions de ces bissectrices étant celles des bissectrices de la paire de côtés opposés DA et BC du quadrangle inscrit ABCD, sont évidemment celles des axes des deux paraboles circonscrites à ce quadrangle.

Autres solutions par MM. C. CONVERS, Gaston ROY et R. BOUVAIST.

**SUR LA DÉCOMPOSITION EN FACTEURS DE  $\sin \pi z$   
ET DE  $\Gamma(z)$ ;**

PAR M. GEORGES VALIRON

(Strasbourg).

La méthode suivante me paraît particulièrement simple pour obtenir la décomposition en facteurs de  $\sin(\pi z)$  et de  $\Gamma(z)$  comme application de la théorie des fonctions de variable complexe, et est peut-être nouvelle.

1. Le produit infini

$$G(z) = \pi z \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

admet les zéros de  $\sin \pi z$  et vérifie comme cette fonction l'égalité fonctionnelle

$$(1) \quad f(z+1) = -f(z).$$

Considérons la fonction

$$H(z) = \frac{1}{G(z)} - \frac{1}{\sin \pi z},$$

elle vérifie l'égalité (1), donc est périodique, de période 2. C'est une fonction entière car, pour  $z = 0$ , les résidus des deux termes de la différence sont les mêmes,  $H(z)$  est régulière pour  $z = 0$ , donc pour  $z = n$  d'après (1). Je dis que  $H(z)$  est bornée dans tout le plan. Si l'on pose  $z = x + iy$ , il suffit de le

( 242 )

montrer pour  $-1 \leq x \leq 1$  et  $|y| \geq 1$ . Or on a alors

$$\left| 1 - \frac{z^2}{n^2} \right| \geq \frac{n^2 + y^2 - x^2}{n^2} \geq 1,$$

donc

$$\left| \frac{1}{G(z)} \right| \leq \frac{1}{\pi |z|}.$$

Les formules d'Euler montrent d'ailleurs que  $(\sin \pi z)^{-1}$  tend vers zéro lorsque  $|y|$  croît indéfiniment.  $H(z)$  est donc bornée dans tout le plan, donc constante d'après le théorème de Liouville et cette constante est nulle puisque  $H(z)$  tend vers zéro lorsque  $|y|$  croît indéfiniment. L'identité de  $\sin \pi z$  et  $G(z)$  est ainsi établie.

2. Supposons connu que la fonction  $\Gamma(z)$  de  $z = x + iy$ , définie pour  $x > 0$  par l'intégrale d'Euler

$$(2) \quad \Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt,$$

est holomorphe pour  $x > 0$  et vérifie l'égalité fonctionnelle

$$(3) \quad f(z+1) = z f(z)$$

qui permet de prolonger  $\Gamma(z)$  dans tout le plan et montre que cette fonction est méromorphe et a pour pôles simples les points  $0, -1, -2, \dots$  (voir GOURSAT, t. II, p. 275). L'égalité (3) montre en outre que le résidu du pôle  $-n$  est  $\frac{(-1)^n}{n!}$ .

La relation des compléments

$$(4) \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) - \frac{\pi}{\sin \pi z} = 0$$

est alors bien aisée à obtenir. Désignons par  $g(z)$  le

premier membre de cette égalité, c'est une fonction entière car les résidus des pôles dans les deux termes de la différence sont égaux; en outre, d'après la relation (3), cette fonction est impaire et vérifie la relation (1), elle est donc aussi périodique de période 2. Montrons qu'elle est bornée dans tout le plan, il suffit de le montrer pour  $1 \leq x \leq 2$  et  $|y| \geq 1$ . C'est connu pour  $\frac{\pi}{\sin \pi z}$  et, eu égard à la relation (3), il suffit de le vérifier pour  $\Gamma(z)$ . Or en remplaçant  $z$  par  $x$  dans (2) on voit que dans ces conditions

$$|\Gamma(z)| < \Gamma(1) + \Gamma(2) = 2;$$

$g(z)$  est bornée, donc constante, et impaire, donc identiquement nulle, la relation (4) est démontrée.

3. La relation (4) montre que  $\Gamma(z)$  ne s'annule jamais puisque sa valeur est  $n!$  pour le pôle  $z = n + 1$  de  $\Gamma(1 - z)$ .  $\frac{1}{\Gamma(z)}$  est donc une fonction entière dont les zéros sont les points  $0, -1, -2, \dots$ . Soit

$$P(z) = z \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

le produit de Weierstrass formé avec ces zéros, c'est une fonction entière qui ne vérifie pas la relation (3), on reconnaît aisément que l'on a seulement

$$zP(z+1) = P(z)e^{-C},$$

où  $C$  est la constante d'Euler

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n.$$

Considérons alors la fonction

$$(5) \quad W(z) = e^{cz} P(z),$$

$\frac{1}{W(z)}$  satisfait à la condition (3) et l'on a, en considérant le second membre de (5) comme la limite du produit des  $m$  premiers termes de  $P(z)$  par  $e^{cmz}$ ,

$$(6) \quad W(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{z(z+1)\dots(z+m)}{1 \cdot 2 \dots m m^z}.$$

Le produit  $W(z)\Gamma(z)$  est une fonction entière périodique, de période 1, elle est égale à 1 pour  $z = 1$ , donc aussi pour  $z = n$  entier quelconque; la fonction

$$K(z) = \frac{W(z)\Gamma(z) - 1}{\sin \pi z}$$

est donc encore une fonction entière admettant la période 1. Montrons qu'elle est bornée dans tout le plan. Il suffit de le voir pour  $0 \leq x \leq 1$  et  $|y| > 1$ . On sait déjà que

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(1+z)}{z}$$

a un module moindre que 2, pour  $W(z)$  la formule (6) dans laquelle

$$\left| \frac{n+z}{n} \right| = \sqrt{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}} \leq \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{y^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

donne

$$\begin{aligned} |W(z)| &\leq \frac{W(x)}{x} 2 |y| \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{y^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2 \frac{W(x)}{\pi x} |y| \left[ |\sin(iy\pi)| \right]^{\frac{1}{2}} < M |y| e^{\frac{\pi}{2}|y|}, \end{aligned}$$

$M$  étant fixe, enfin

$$|\sin \pi z| > \frac{1}{3} e^{\pi|y|}.$$

$K(z)$  est donc bornée et par suite constante et tend vers zéro lorsque  $|y|$  croît indéfiniment,  $K(z)$  est identiquement nulle.  $W(z)$  est identique à  $\frac{1}{\Gamma(z)}$ , l'expression (5) de  $\frac{1}{\Gamma(z)}$  est celle de Weierstrass, l'égalité (6) est celle de Gauss.

**SUR**  
**QUELQUES APPLICATIONS DES MÉTHODES VECTORIELLES;**

PAR M. GEORGES BOULIGAND.

1. J'ai donné, dans mes *Leçons de Géométrie vectorielle*, n° 69, une théorie intrinsèque des formes quadratiques de vecteurs, indépendante du nombre des dimensions de l'espace., inspirée d'une définition classique de la *forme polaire*, au moyen de l'identité (1)

$$Q(\lambda \vec{U} + \mu \vec{V}) = \lambda^2 Q(\vec{U}) + 2\lambda\mu P(\vec{U}, \vec{V}) + \mu^2 Q(\vec{V}).$$

Si  $P$  s'annule pour deux vecteurs  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$ , on dit que ces vecteurs sont *conjugués* par rapport à la forme  $Q$ . Il n'y a pas de difficulté à saisir le lien qui existe entre cette définition et les notions familières de la théorie des pôles et des polaires.

On peut d'abord remarquer que les relations qui, à l'exemple de  $P(\vec{U}, \vec{V}) = 0$ , sont indifférentes à la mul-

(1) Cf. WEYL. *Temps, espace, matière*, p. 21 et suivantes.

tiplication de chaque vecteur qu'elles renferment par un scalaire, expriment des *propriétés projectives*; le centre de projection, c'est l'origine commune qu'on pourrait, arbitrairement, assigner aux vecteurs tels que  $\vec{U}$ ,  $\vec{V}$ . On peut encore dire qu'on obtient la géométrie projective à  $n$  dimensions en prélevant, dans la géométrie linéaire à  $n+1$ , les théorèmes sur les vecteurs libres qui concernent, d'une manière exclusive, leurs directions.

Nous avons justement ici un exemple de cette nature. En écrivant que  $P(\lambda\vec{U} + \mu\vec{V})$  est nul, nous exprimons aussi le fait suivant : en attribuant une même origine à tous les vecteurs dont nous parlerons, le vecteur  $\lambda\vec{U} + \mu\vec{V}$  ne peut se trouver sur le cône d'annulation de  $Q$ , sans qu'il en soit de même du vecteur  $\lambda\vec{U} - \mu\vec{V}$ . Or le lecteur verra sans peine que le faisceau des vecteurs concourants et coplanaires

$$\vec{U}, \vec{V}, \lambda\vec{U} + \mu\vec{V}, \lambda\vec{U} - \mu\vec{V}$$

est harmonique, et ceci nous ramène à des propositions classiques, qui se trouvent ainsi rattachées à notre théorie d'une manière suffisamment nette pour qu'il ne soit pas nécessaire d'insister.

II. La théorie des diamètres et plans diamétraux des quadriques n'est qu'un cas limite de la précédente. Mais on peut retrouver rapidement ses résultats essentiels à partir d'un autre point de vue. Proposons-nous d'étudier un *champ scalaire du second degré*. On peut utiliser les remarques suivantes :

1° Son champ de gradients est un *champ vectoriel*

du premier degré, possédant les mêmes éléments de symétrie. Donc le centre d'un champ scalaire du second degré est le point, s'il existe, où le gradient s'annule. Et même, s'il existe une infinité de centres, ce sont encore des points d'annulation du gradient.

2° Un champ vectoriel du premier degré est inaltéré par une homothétie faite de son centre, ce qui explique que les quadriques de niveau d'un champ scalaire du second degré soient homothétiques et concentriques. Exceptionnellement, le centre peut être rejeté à l'infini, et l'homothétie dégénérer en translation.

3° La section d'un champ scalaire à trois dimensions par un plan est un champ scalaire à deux dimensions dont le gradient est la projection orthogonale (1) du gradient du premier sur le plan de section. Il s'ensuit que le diamètre conjugué d'une direction de plans, c'est-à-dire le lieu des centres des champs scalaires du second degré, s'obtient en exprimant l'orthogonalité du gradient, relatif au champ à trois dimensions, soit  $f(M)$ , et de ces plans. Soit  $\vec{\nu}$  un vecteur normal. Ce diamètre conjugué aura pour équation

$$\vec{\nu} = \lambda \vec{\text{grad}} f$$

$\lambda$  désignant un scalaire indéterminé, relation qui équivaut aux équations classiques

$$\frac{f'_x}{\alpha} = \frac{f'_y}{\beta} = \frac{f'_z}{\gamma}.$$

4° Pareillement, le plan diamétral conjugué des

(1) On pourrait se passer, dans cette question essentiellement linéaire, de considérations métriques, en introduisant la notion de gradient linéaire (*loc. cit.*, n° 143).

droites parallèles à  $\vec{\nu}$  est aussi le lieu des centres des champs à une dimension, interceptés par ces droites. Il est donc défini par

$$\vec{\nu} \cdot \vec{\text{grad}} f = 0$$

ou

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0.$$

III. Je voudrais enfin rectifier deux erreurs, commises dans le travail cité, au cours de rédactions trop hâtives.

La première est relative aux ombilics (n° 138). Il n'est pas exact qu'un ombilic livre nécessairement passage à une infinité de lignes de courbure. Du fait que la direction d'un champ devient indéterminée (le champ est ici celui des directions principales), on n'a pas le droit d'en conclure qu'il passe au point d'indétermination une infinité de lignes de champ. C'est là un fait bien classique depuis les mémorables travaux de Poincaré sur les intégrales réelles d'une équation différentielle. Mais, pour ce qui concerne plus particulièrement les ombilics, M. Picard a fait une étude de la question au Tome III de son *Traité d'Analyse* (1) : je me borne donc à remarquer que, par un ombilic d'une quadrique, il ne passe qu'une seule ligne de courbure réelle.

La seconde se rapporte aux équations différentielles totales de la forme

$$(1) \quad P dx + Q dy + R dz = 0.$$

En général, cette équation n'est pas complètement

(1) Section III du Chapitre IX. Voir aussi une Note complémentaire au Tome IV de la *Théorie des surfaces* de Darboux.

intégrable, mais on peut, en adoptant le point de vue de Pfaff, chercher les lignes C qui satisfont à l'équation (1). Soit  $\vec{V}(M)$  le vecteur de composantes P, Q, R : une ligne C est astreinte à cette condition d'être normale, en chaque point M à  $\vec{V}(M)$ . Désignons par  $\vec{v}(M)$  le vecteur unitaire collinéaire à  $\vec{V}(M)$ . On passe de  $dM$  aux accroissements géométriques  $d\vec{V}$  et  $d\vec{v}$  par deux transformations linéaires. Les déplacements  $dM$  sur les courbes C satisfont à  $\vec{v} \cdot dM = 0$ , et comme d'autre part on a  $\vec{v} \cdot d\vec{v} = 0$ , l'étude de la correspondance entre  $dM$  et  $d\vec{v}$  est un problème de géométrie plane, dans un plan normal à  $\vec{v}$ . Le point sur lequel je désire précisément attirer l'attention est que *cette correspondance n'est pas autométrique*, excepté si la condition d'intégrabilité est satisfaite. En conséquence, j'invite le lecteur à supprimer les sept dernières lignes de la Note en petits caractères de la page 288.

Voici la démonstration. Soient  $d$  et  $\delta$  les caractéristiques de deux déplacements infinitésimaux effectués à partir d'un point M sur deux lignes intégrales de l'équation (1). D'après une propriété classique du rotationnel d'un champ vectoriel, appliquée au champ  $\vec{v}(M)$  (*loc. cit.*, n° 162), nous avons

$$dM \cdot \delta \vec{v} - d\vec{v} \cdot \delta M = (\text{rot } \vec{v}, \delta M, dM).$$

En général, le second membre n'est pas nul; la transformation  $(dM, \delta \vec{v})$  n'est donc pas autométrique. Pour qu'elle le soit, il faut et il suffit que l'on ait

$$\text{rot } \vec{v} \cdot (\delta M \wedge dM) = 0$$

ou ce qui revient au même

$$(2) \quad \vec{v} \cdot \text{rot} \vec{v} = 0,$$

ce qui nous fournit bien, sous sa forme classique, la condition d'intégrabilité. Si nous revenons au vecteur  $\vec{V}$ , en vertu de la relation

$$\text{rot}(h\vec{v}) = h \text{rot} \vec{v} + \text{grad} h \wedge \vec{v}, \quad \text{où} \quad h\vec{v} = \vec{V},$$

la condition (2) conservera la forme

$$\vec{V} \cdot \text{rot} \vec{V} = 0.$$

Revenons, dans le cas général, aux lignes intégrales de l'équation (1). En chaque point M d'une telle ligne C, construisons le trièdre fondamental  $\vec{T}$ ,  $\vec{N}$ ,  $\vec{B}$ . Nous avons

$$\vec{v} = \vec{N} \cos \theta + \vec{B} \sin \theta \quad \text{où} \quad \theta = \left( \vec{N}, \vec{v} \right);$$

en divisant et en appliquant les formules de Frenet, on trouve aisément

$$(3) \quad \frac{d\vec{v}}{ds} = -\rho \cos \theta \vec{T} + \left( \tau - \frac{d\theta}{ds} \right) \vec{B}$$

en appelant  $\rho$  la courbure,  $\tau$  la torsion de (C) et  $\vec{\Gamma}$  un vecteur tel que le trièdre  $\vec{T}$ ,  $\vec{\Gamma}$ ,  $\vec{v}$  soit trirectangle et direct. Le vecteur  $\vec{\Gamma}$ , en théorie des surfaces (théorie qui est englobée dans la présente), serait la normale géodésique. En remarquant que  $\frac{d\vec{v}}{ds}$  a même valeur pour toutes les courbes intégrales tangentes en M à une droite

donnée, on voit que les quantités  $\rho \cos \theta$  et  $\tau - \frac{d\theta}{ds}$  sont également bien déterminées en  $M$  pour chaque tangente issue de  $M$ . On rattache ainsi à la théorie des champs vectoriels des propositions, d'ailleurs anciennes, suivant lesquelles le théorème de Meusnier et le théorème d'Ossian Bonnet sont valables pour les courbes intégrales d'une équation aux différentielles totales. L'étude de ces théorèmes et de leurs conséquences a été approfondie par M. Axel Egnell dans sa Thèse (*Géométrie infinitésimale vectorielle*, Paris, 1919).

Supposons en particulier que le champ  $\vec{V}(M)$  soit un champ de moments. Les courbes  $(C)$  sont alors les courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe de droites de moment nul. Le plan osculateur se confond avec le plan polaire du complexe et l'on a  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Il en résulte que la relation (3) se réduit alors à

$$\frac{d\vec{v}}{ds} = \tau \vec{\Gamma}$$

et que l'angle  $dM, d\vec{v}$  est constamment droit. Donc, dans ce cas, la transformation linéaire  $dM, d\vec{v}$  s'obtient en composant une rotation d'un droit avec une autre transformation linéaire, qui n'est autre qu'une homothétie de rapport  $\tau$ . Donc ici,  $\tau$  ne dépend que de  $M$  et non de la direction  $MT$  de la tangente. Nous retrouvons ce théorème classique de Lie : *Toutes les courbes d'un complexe linéaire qui passent en  $M$  ont même torsion* (1).

---

(1) Ce théorème est le point de départ d'un intéressant article de M. Lainé, qui paraîtra ici prochainement.

---



---

**REMARQUE SUR UNE INÉGALITÉ CONCERNANT LES MODULES  
DES RACINES D'UNE ÉQUATION QUELCONQUE ;**

PAR M. W. STOZEK.

---

M. K. P. Williams, dans ses notes insérées dans le *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1914, 1922, New-York, a déduit certaines inégalités relatives aux modules des racines d'une équation algébrique, en se servant des déterminants et de l'inégalité de M. Hadamard. On peut, cependant, démontrer ces inégalités par des méthodes élémentaires de la façon suivante :

Envisageons l'équation

$$(1) \quad W_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

L'équation

$$(2) \quad (x - t) W_n(x) = 0,$$

où  $t$  désigne un paramètre arbitraire, possède toutes les racines de l'équation (1), et en plus, la racine  $x = t$ . Il en résulte que la borne supérieure des modules des racines de l'équation (2), pour toutes les valeurs du paramètre  $t$ , doit être en même temps une borne supérieure des modules des racines de l'équation (1). Pour obtenir cette borne supérieure, mettons l'équation (2) sous la forme

$$(3) \quad x^{n+1} + (a_1 - t)x^n + (a_2 - ta_1)x^{n-1} + \dots + (a_n - ta_{n-1})x - ta_n = 0.$$

Supposons, dans la suite, que nous nous occupions

seulement des racines de l'équation (3), qui satisfont à l'inégalité

$$(4) \quad |x| > 1.$$

Nous obtenons de l'équation (3)

$$x = (t - a_1) + (t \cdot a_1 - a_2) \frac{1}{x} + \dots \\ + (t \cdot a_{n-1} - a_n) \frac{1}{x^{n-1}} + t \cdot a_n \frac{1}{x^n};$$

d'où

$$|x| \leq |t - a_1| \cdot 1 + |t \cdot a_1 - a_2| \frac{1}{|x|} + \dots \\ + |t \cdot a_{n-1} - a_n| \frac{1}{|x|^{n-1}} + |t \cdot a_n| \frac{1}{|x|^n}$$

ou bien, en appliquant l'inégalité de Schwartz,

$$(5) \quad |x|^2 \leq [|t - a_1|^2 + |t \cdot a_1 - a_2|^2 + \dots \\ + |t \cdot a_{n-1} - a_n|^2 + |t \cdot a_n|^2] \frac{1 - \frac{1}{|x|^{2n+2}}}{1 - \frac{1}{|x|^2}}.$$

Mais il résulte de l'inégalité (4) que

$$1 - \frac{1}{|x|^2} > 0.$$

Donc, en multipliant les deux membres de l'inégalité (5) par  $1 - \frac{1}{|x|^2}$ , nous trouverons

$$|x|^2 - 1 \leq [|t - a_1|^2 + |t a_1 - a_2|^2 + \dots \\ + |t a_{n-1} - a_n|^2 + |t a_n|^2] \left[ 1 - \frac{1}{|x|^{2n+2}} \right];$$

d'où, en augmentant le second membre, nous obtenons

$$(6) \quad |x| \leq [1 + |t - a_1|^2 + |t a_1 - a_2|^2 + \dots \\ + |t a_{n-1} - a_n|^2 + |t a_n|^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Cette inégalité a été déduite sous l'hypothèse (4), mais il résulte de sa forme même qu'elle est vraie aussi pour les racines de l'équation (1) ou (2), pour lesquelles  $|x| < 1$ , c'est-à-dire que l'inégalité (6) est vraie pour toutes les racines de l'équation (1) ou (2). En posant dans l'inégalité (6)  $t = 0$ , puis  $t = 1$ , nous trouvons comme bornes supérieures des modules des racines de l'équation (1) :

$$(7) \quad |x| \leq \sqrt{1 + |\alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_n|^2},$$

$$(8) \quad |x| \leq \sqrt{1 + |1 - \alpha_1|^2 + \dots + |\alpha_{n-1} - \alpha_n|^2 + |\alpha_n|^2} \quad (1).$$

Il reste encore à savoir pour quelles valeurs du paramètre  $t$ , le second membre de l'inégalité (6) atteint son minimum.

Si nous posons

$$\alpha_p = \alpha_p + i\beta_p \quad (p = 1, 2, \dots, n),$$

$$t = \xi + i\tau,$$

un calcul facile montre qu'il existe toujours un seul minimum pour

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{\alpha_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \alpha_{k+1} + \beta_k \beta_{k+1})}{1 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2)}, \\ \eta = \frac{\beta_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k \beta_{k+1} - \beta_k \alpha_{k+1})}{1 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2)}. \end{array} \right.$$

---

(1) J'avais d'abord déduit l'inégalité (7) directement de l'équation (1), et l'inégalité (8) de l'équation  $(x-1)W_n(x) = 0$ . C'est M. S. Banach qui m'a conseillé d'introduire le paramètre  $t$ .

Donc, si le minimum a lieu pour un  $t = \xi + i\eta$  dont le module diffère peu de zéro, l'inégalité (7) est meilleure que l'inégalité (8); si, au contraire, le minimum a lieu pour un  $t$  dont le module diffère peu de l'unité, l'inégalité (8) est meilleure que l'inégalité (7). Évidemment, nous obtenons la meilleure des inégalités (6) en y faisant  $t = \xi + i\eta$ , où  $\xi$  et  $\eta$  sont définis par les formules (9) (1).

(1) *Note de la rédaction.* — Nous donnons ici le calcul indiqué par M. Stozek. Utilisant ses notations nous poserons  $\alpha_p = \alpha_p + i\beta_p$ , mais nous donnerons à  $p$  toutes les valeurs entières de  $-1$  à  $+n+1$ , en posant

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_{-1} = \alpha_{n+1} = 0.$$

La quantité qui figure entre crochets au second membre de (6) est

$$\begin{aligned} m &= \sum_{-1}^n |\alpha_p t - \alpha_{p+1}|^2 \\ &= \sum_{-1}^n [(\alpha_p \xi - \beta_p \eta - \alpha_{p+1})^2 + (\beta_p \xi + \alpha_p \eta - \beta_{p+1})^2]. \end{aligned}$$

Donc

$$m = A(\xi^2 + \eta^2 + 1) - 2B\xi - 2C\eta,$$

avec

$$\begin{aligned} A &= \sum_{-1}^n (\alpha_p^2 + \beta_p^2), \\ B &= \sum_{-1}^n (\alpha_p \alpha_{p+1} + \beta_p \beta_{p+1}), \\ C &= \sum_{-1}^n (\alpha_p \beta_{p+1} - \beta_p \alpha_{p+1}). \end{aligned}$$

Le minimum  $m_0$  de  $m$ , et les valeurs  $\xi_0$  et  $\eta_0$  qui le fournissent, sont donnés par

$$A\xi_0 - B = 0, \quad A\eta_0 - C = 0, \quad -B\xi_0 - C\eta_0 + A = m_0;$$

[L'17d]

**PROBLÈME DE PONCELET ET PROBLÈME ANALOGUE ;**

PAR M. BERTRAND GAMBIER,

Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

1. Poncelet a montré qu'étant donnés une première conique  $C_0$ , un triangle  $T$  autopolaire relativement à  $C_0$ , et un entier  $n \geq 3$ , il existe  $\infty^1$  coniques  $C_1$ , conjuguées par rapport à  $T$ , telles que chaque couple  $(C_0, C_1)$  admette  $\infty^1$  polygones  $P_n$  de  $n$  côtés inscrits dans  $C_0$  et circonscrits à  $C_1$ ; pour un tel couple  $(C_0, C_1)$ , on peut prendre arbitrairement, soit le premier sommet sur  $C_0$ , soit le premier côté tangent à  $C_1$ . Cette question, devenue classique, a été l'objet de nombreux travaux. Je voudrais montrer comment on peut la résoudre en n'employant que les propriétés les plus simples des

d'où

$$m_0 = A - \frac{B^2 + C^2}{A}.$$

Or il est clair que l'on a

$$A = \Sigma |a_p|^2,$$

et, si l'on pose  $a'_p = \alpha_p - \beta_p i$ ,

$$B + Ci = \Sigma a'_p a_{p+1};$$

donc finalement on a

$$|x|^2 \leq \Sigma |a_p|^2 - \frac{|\Sigma a'_p a_{p+1}|^2}{\Sigma |a_p|^2}.$$

Les  $\Sigma$  portent sur les indices  $p$  allant de  $-1$  à  $n$ ; mais il est clair que, dans le premier, on peut ne faire varier  $p$  que de  $0$  à  $n$  et, dans le second, de  $0$  à  $n-1$ .

H. L.

seules coniques ; j'engagerai néanmoins à lire la solution, basée sur les fonctions elliptiques, donnée, par exemple, dans le traité d'Halphen, soit la solution si élégante, donnée d'après Cayley, par M. Lebesgue aux *Annales de Toulouse* (1922), basée sur les propriétés des cubiques générales et la théorie des groupes de points résiduels.

Je montrerai que la construction de polygones  $\Pi_n$  inscrits dans une conique  $C_0$ , de façon que chaque couple de deux sommets voisins soit conjugué par rapport à une nouvelle conique  $\Gamma$  se ramène à la question étudiée par Poncelet, et inversement. On obtient d'ailleurs un résultat, accidentel, mais curieux, à savoir que si deux coniques  $C_0$  et  $C_1$  admettent  $\infty^1$  quadrilatères  $_4$  de Poncelet, elles admettent  $\infty^1$  hexagones  $\Pi_6$  du nouveau problème.

Nous verrons aussi que l'étude du problème de Poncelet est en relation étroite avec l'itération de substitutions rationnelles effectuées sur des polynomes homogènes à 3 variables.

2. Étant données deux coniques  $C_0, C_1$ , d'un point arbitraire  $A_0$  de  $C_0$ , je mène une tangente à  $C_1$  qui coupe  $C_0$  de nouveau en  $A_1$ ; de  $A_1$  je mène à  $C_1$  la tangente autre que  $A_0A_1$ ; j'obtiens ainsi le point  $A_2$  sur  $C_0$ , et continue ainsi de façon à obtenir une chaîne  $A_0A_1 \dots A_i$  de  $i$  côtés, inscrite dans  $C_0$  et circonscrite à  $C_1$ . La droite  $A_0A_i$ , variable avec  $A_0$ , enveloppe manifestement une conique  $C_i$ , car par tout point de  $C_0$  passent deux chaînes et deux seulement admettant  $A_0$  pour premier sommet; les deux tangentes issues de  $A_0$  à  $C_i$  ne se confondent que si les deux tangentes issues de  $A_0$  à  $C_1$  se confondent, donc  $C_i$  appartient au faisceau linéaire  $(C_0, C_1)$ , quel que soit l'entier  $i$ .

Cette remarque est essentielle et donne la clé du problème (1).

Soient  $A_0 A_1 A_2 \dots A_n$  et  $A_0 A'_1 \dots A'_n$  les deux chaînes d'ordre  $n$  issues d'un point quelconque de  $C_0$  : la droite  $A_n A'_n$  enveloppe la conique  $C_{2n}$  et l'on a une identité

$$(1) \quad C_{2n} \equiv I_{2n+1} C_0 + I_{2n} C_1,$$

où  $I_{2n}$ ,  $I_{2n+1}$  sont des fonctions algébriques rationnelles et entières des coefficients qui entrent dans les premiers membres  $C_0$  et  $C_1$  des équations des coniques du début. Si l'on écrit les équations numériques

$$(2) \quad I_{2n} = 0,$$

$$(3) \quad I_{2n+1} = 0,$$

*tout couple de coniques  $C_0, C_1$  satisfaisant à  $I_{2n} = 0$  (ou  $I_{2n+1} = 0$ ) admet  $\infty^1$  polygones  $P_{2n}$  de Poncelet (ou  $\infty^1$  polygones  $P_{2n+1}$  de Poncelet).*

Il faut expliquer un paradoxe : étant donné le point  $A_0$ , les droites  $A_1 A'_1, A_2 A'_2, \dots, A_n A'_n$ , qui enveloppent respectivement  $C_2, C_4, \dots, C_{2n}$ , quand  $A_0$  décrit  $C_0$ , ont des équations rationnelles par rapport aux coordonnées de  $A_0$  ou, si l'on préfère, par rapport au paramètre  $t$  qui individualise  $A_0$  sur  $C_0$ . *On a toujours quatre solutions du problème  $P_{2n}$  ou  $P_{2n+1}$ , car elles correspondent aux tangentes communes aux coniques  $C_0$  et  $C_{2n}$  pour  $P_{2n}$  et  $C_1, C_{2n}$  pour  $P_{2n+1}$  : mais ces solutions sont impropres, et connues a priori.*

En effet, prenons comme  $A_0$  un point commun à  $C_0$  et  $C_1$  :  $A_1$  et  $A'_1$  sont confondus,  $A_2$  et  $A'_2$  aussi,  $\dots, A_n$  et  $A'_n$  aussi ; c'est cette remarque qui nous a montré que  $A_0$  appartient à  $C_i$ , quel que soit  $i$ . Les droites  $A_i A'_i$ ,

---

(1) On peut remarquer qu'une chaîne de zéro côté donne comme enveloppe  $C_0$  et qu'une chaîne de un côté donne  $C_1$ .

$A_2 A'_2, \dots, A_n A'_n$ , correspondant à cet  $A_0$  particulier, sont des tangentes communes à  $C_0$  et  $C_2$ , ou  $C_0$  et  $C_4, \dots$ , ou  $C_0$  et  $C_{2n}$ . La chaîne particulière

$$A_n A_{n-1} \dots A_1 A_0 A_1 \dots A_{n-1} A_n$$

parcourue à partir de cet  $A_n$  particulier, pris comme premier sommet, avec  $A_n A_{n-1}$  comme premier chaînon, se replie en  $A_0$  sur elle-même et se referme en  $A_n$  de sorte qu'elle donne un  $P_{2n}$  impropre; partir de cet  $A_n$  particulier avec la tangente autre que  $A_n A_{n-1}$  ne referme plus la chaîne; partir sur la chaîne particulière  $A_n A_{n-1} \dots A_1 A_0$  d'un sommet  $A_i$  autre que  $A_n$ , soit avec la tangente  $A_i A_{i-1}$ , soit avec la tangente  $A_i A_{i+1}$  ne referme pas la chaîne avec  $2n$  chaînons. Les quatre points communs à  $C_0$  et  $C_i$  donnent donc les quatre solutions  $P_{2n}$  prévues *a priori*, mais impropres.

De même, soit  $B_0$  un point de contact avec  $C_0$  d'une tangente commune à  $C_0$  et  $C_i$ ; soit  $B_0 B_i$  la tangente à  $C_i$  issue de  $B_0$  et autre que la tangente en  $B_0$  à  $C_0$ ; la chaîne  $B_0 B_i B_2 \dots B_n$  s'en déduit et l'on a manifestement  $B'_1 = B_0, B'_2 = B_i, \dots, B'_n = B_{n-1}$ ; la droite  $B_n B_{n-1}$  est donc la droite  $B_n B'_n$  relative à ce  $B_0$  particulier; donc la chaîne  $B_n B_{n-1} \dots B_i B_0 B_0 B_i \dots B_{n-1} B_n$  se referme bien en  $B_n$  par  $(2n + 1)$  chaînons consécutifs, et donne un  $P_{2n+1}$  impropre; mêmes observations que plus haut, il faut partir de  $B_n$  (et non de  $B_i$ ) et avec la tangente  $B_n B_{n-1}$ .

Formons donc l'équation de  $A_n A'_n$  au moyen du paramètre  $t$  de  $A_0$  et exprimons que cette droite touche  $C_0$  ou  $C_1$ : nous avons une équation du quatrième degré en  $t$

$$(4) \quad E(t) = 0$$

qui coïncide, sauf un facteur numérique en  $t$ , mais

fonction des coefficients de  $C_0$  et  $C_1$ , soit  $I_{2n}$  ou  $I_{2n+1}$ , avec l'équation

$$(5) \quad e(t) = 0$$

que nous pouvons écrire à l'avance, relative aux points communs à  $C_0$  et  $C_1$  ou aux points de contact avec  $C_0$  des tangentes communes à  $C_0$  et  $C_1$ . Ce facteur  $I_{2n}$  ou  $I_{2n+1}$  n'est pas numérique par rapport aux coefficients de  $C_1$  et  $C_0$ , sinon on n'aurait jamais de polygones  $P_n$ , quelles que fussent  $C_0$  et  $C_1$  : or l'existence de polygones réguliers dément cette impossibilité. Quel que soit  $n$ , il existe donc des couples de coniques admettant des polygones  $P_n$  de Poncelet.

Nous retombons donc sur le même résultat que plus haut :  $I_n \neq 0$ , impossibilité des  $P_n$  véritables ;  $I_n = 0$ ,  $\infty'$  polygones  $P_n$ . Il suffit donc d'avoir constaté l'existence d'un polygone  $P_n$  (véritable) inscrit à  $C_0$ , circonscrit à  $C_1$  pour en déduire l'existence de  $\infty'$  polygones de même espèce ; cela tient à ce que, en dehors des quatre tangentes impropres du cas général, la conique  $C_0$  (ou  $C_1$ ) admet avec la conique  $C_{\frac{n}{2}}$  si  $n$  est pair (ou  $C_{\frac{n-1}{2}}$  si  $n$  est impair)  $n$  tangentes nouvelles, de sorte qu'il y a identité des deux coniques.

3. Dans le cas où les polygones  $P_n$  véritables existent, on peut partir d'un point arbitraire de  $C_0$  et l'on revient en ce point au bout de  $n$  chaînons. Étudions à ce point de vue les points particuliers  $A_0$  communs à  $C_0$  et  $C_1$  et les points  $B_0$  de contact avec  $C_0$  d'une tangente commune à  $C_0$  et  $C_1$ .

1° Existence du polygone  $P_{2n}$  : en partant de  $A_0$ ,  $n$  chaînons conduisent en un nouveau point commun

à  $C_0$  et  $C_1$ ; en partant de  $B_0$  avec la tangente à  $C_1$  distincte de la tangente en  $B_0$  à  $C_0$ ,  $n - 1$  chaînons conduisent en un nouveau point de contact d'une tangente commune.

2° Existence du polygone  $P_{2n+1}$  : partant de  $A_0$ ,  $n$  chaînons conduisent en un point  $B_0$  de contact avec  $C_0$  d'une tangente commune; inversement, partir de  $B_0$  conduit en  $A_0$ .

L'un de ces critères nouveaux est nécessaire et suffisant.

Sans avoir recours à ces critères particuliers, nous pouvons donner des exemples de  $\infty^1$ ,  $P_3$ ,  $P_4$  ou  $P_5$ , puisque l'on peut faire passer une conique par 3, 4 ou 5 points arbitraires et inscrire une conique dans un polygone de 3, 4 ou 5 droites arbitraires. Avec les nouveaux critères on peut donner des exemples graphiques de  $P_6$ ,  $P_7$  ou  $P_8$  en se donnant arbitrairement  $C_0$  et une chaîne spéciale convenablement choisie; par exemple pour l'octogone, trois cordes consécutives de  $C_0$  et les tangentes aux deux extrémités déterminent complètement la conique  $C_1$  tangente à ces cinq droites (tandis qu'une chaîne de quatre cordes de  $C_0$  donnerait quatre tangentes à  $C_1$  et les points de contact de deux d'entre elles).

#### 4. Dans le cas général, la suite illimitée

$$C_0 C_1 C_2 \dots C_n C_{n+1} \dots$$

n'est pas périodique. Dans le cas de polygones effectifs  $P_{2n}$ , on a la réduction exprimée par le schéma

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} C_0 C_1 C_2 \dots C_{2n-p} \dots C_{2n-2} C_{2n-1} C_{2n} C_{2n+1} C_{2n+2} \dots, \\ C_0 C_1 C_2 \dots C_p \dots C_2 \quad C_1 \quad C_0 \quad C_1 \quad C_2 \quad \dots \end{array} \right.$$

Pour les polygones  $P_{2n+1}$  on a de même

$$(7) \begin{cases} C_0 C_1 C_2 \dots C_{2n-p} \dots C_{2n-2} C_{2n-1} C_{2n} C_{2n+1} C_{2n+2} C_{2n+1} \dots, \\ C_0 C_1 C_2 \dots C_{p+1} \dots C_3 C_2 C_1 C_0 C_1 C_2 \dots \end{cases}$$

Réciproquement, écrire la seule équation  $C_p = C_{2n-p}$  suffit pour exprimer la possibilité des  $P_{2n}$ ; cela fait bien une équation unique, puisqu'il s'agit de coniques d'un même faisceau linéaire; mais ce procédé, qui a l'avantage de ne pas obliger à former successivement les équations des coniques  $C_2, C_4, \dots$  jusqu'à  $C_{2n}$  compris, a l'inconvénient d'introduire des solutions étrangères; ainsi écrire  $C_2 = C_{2n-2}$  entraîne soit  $P_{2n}$ , soit  $P_{2n-4}$ , comme on le voit en écrivant de nouveau les lignes (6) en y remplaçant  $n$  par  $n-2$ . De même, écrire  $C_{2n} = C_1$  entraîne soit  $P_{2n+1}$ , soit  $P_{2n-1}$ ; ce mode *particulier* de calcul fait donc apparaître, comme facteurs parasites, des invariants déjà rencontrés dans les calculs successifs relatifs à  $P_3, P_4, \dots, P_n, P_{n+1}, \dots$ . Écrire  $C_{2n} = C_0$  n'introduit pas de tels facteurs parasites.

Mais si  $n$  n'est pas premier, *quel que soit le mode de calcul employé*, on retrouve comme facteurs étrangers les conditions déjà rencontrées pour les diviseurs de  $n$ ; en effet un polygone proprement dit  $P_{n_1}$  parcouru  $n_2$  fois consécutivement est encore un polygone (non replié) de  $n_1 n_2$  côtés. On saura donc éliminer ces facteurs parasites.

On remarquera que, si  $p$  est premier avec  $n$ , et si  $C_0$  et  $C_1$  admettent des polygones  $P_n$ , il en est de même de  $C_0$  et  $C_p$ ; si  $p$  et  $n$  ont un plus grand commun diviseur  $\delta$ ,  $C_0$  et  $C_p$  admettent des polygones  $P_{\frac{n}{\delta}}$ .

Enfin une dernière remarque très simple : si l'on étudie le cas  $P_{2n}$ , la conique  $C_n$  se réduit nécessaire-

ment à un point et ce point est l'un des trois sommets du triangle autopolaire commun à  $C_0$  et  $C_1$  : se donner  $C_0$  et ce triangle donne donc *trois séries* analytiquement distinctes de coniques  $C_1$ . C'est ce qui explique pourquoi, en cherchant les quadrilatères à la fois inscriptibles dans un cercle et circonscrits à un autre, on trouve *deux catégories* distinctes :  $R$ ,  $R_1$  étant les rayons des cercles  $C_0$ ,  $C_1$  et  $D$  la distance des centres, on a soit

$$R_1 = D,$$

soit

$$\frac{1}{(R-D)^2} + \frac{1}{(R+D)^2} = \frac{1}{R_1^2},$$

de sorte que dans le premier cas  $C_0$  passe par le centre de  $C_1$  et les sommets opposés du quadrilatère sont symétriques par rapport à la ligne des centres, tandis que dans le second cas, les diagonales du quadrilatère passent toutes deux en l'un des cercles de rayon nul appartenant au faisceau  $(C_0, C_1)$ .

On remarquera qu'il est intéressant de supposer les polygones  $P_n$  réels, donc  $C_0$  et  $C_1$  réelles toutes deux, la totalité ou une portion de  $C_0$  étant extérieure à  $C_1$ . Or, pourvu que les équations de  $C_0$  et  $C_1$  soient à coefficients réels, le triangle autopolaire commun est réel et l'un des sommets est *intérieur* à  $C_0$  : donc par une perspective *réelle* qui renvoie le côté opposé à l'infini, on peut supposer que  $C_0$  et  $C_1$  ont le même centre et que  $C_0$  est du genre ellipse; cela fait, la transformation homographique bien connue transforme  $C_0$  en un cercle : on peut donc, sans restreindre la généralité, prendre les équations des coniques sous la *forme réduite*

$$(C_0) \quad x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

$$(C_1) \quad \frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{b_1} - \frac{1}{c_1} = 0.$$

les notations étant choisies de façon que les formules de récurrence que nous développerons plus bas aient la forme la plus simple. Quand on revient aux équations générales (précédant l'homographie ou perspective), il suffit de remarquer que l'équation

$$C_0 - \lambda C_1 = 0$$

se réduit à deux droites pour  $\lambda = a_1, b_1, c_1$ ; donc on se rappellera que  $a_1, b_1, c_1$  sont les racines de l'équation bien connue

$$\Delta - \theta\lambda + \theta_1\lambda^2 - \Delta_1 = 0$$

dont le premier membre est le discriminant de  $C_0 - \lambda C_1$ .

§. Soient  $(\cos \varphi_0, \sin \varphi_0)$  les coordonnées du point  $A_0$ . La droite  $A_0 A_1$  a pour équation

$$x \cos \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} + y \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} - \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2} = 0.$$

La condition de contact avec  $C_1$  prend la forme

$$(b_1 + c_1 - a_1) \cos \varphi_0 \cos \varphi_1 + (c_1 + a_1 - b_1) \sin \varphi_0 \sin \varphi_1 - (a_1 + b_1 - c_1) = 0,$$

de sorte que l'équation de  $A_1 A'_1$  est

$$(8) \quad x(b_1 + c_1 - a_1) \cos \varphi_0 + (c_1 + a_1 - b_1) \sin \varphi_0 - (a_1 + b_1 - c_1) = 0.$$

Nous avons donc la condition d'existence des *quadri-latères*  $P_4$

$$I_4 \equiv (b_1 + c_1 - a_1)(c_1 + a_1 - b_1)(a_1 + b_1 - c_1) = 0.$$

[Si l'on applique ceci à deux cercles rapportés à leur ligne des centres et à leur axe radical

$$C_0 \equiv x^2 + y^2 - 2ax + c = 0,$$

$$C_1 \equiv x^2 + y^2 - 2a'x + c = 0,$$

les racines de l'équation en  $\lambda$  s'obtiennent aisément et l'on trouve

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{R^2 + R_1^2 - D^2}{R_1^2}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{R^2}{R_1^2}, \quad \lambda_3 = 1,$$

de sorte que

$$\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2$$

donne  $D = \pm R$  et  $\lambda_3 = \pm (\lambda_1 - \lambda_2)$  donne la relation annoncée plus haut.]

De l'équation (8) on déduit l'équation ponctuelle de  $C_2$

$$C_2 \equiv (b_1 + c_1 - a_1)^2 x^2 \\ + (c_1 + a_1 - b_1)^2 y^2 - (a_1 + b_1 - c_1)^2 = 0.$$

et l'on trouve immédiatement en posant

$$I_3 \equiv a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - 2b_1c_1 - 2c_1a_1 - 2a_1b_1, \\ C_2 \equiv I_3 C_0 + 4a_1b_1c_1 C_1.$$

La condition d'existence des *triangles*  $P_3$  est donc

$$I_3 = 0.$$

D'ailleurs, si l'on adopte la seconde marche de calcul proposée et si l'on écrit que  $A_1 A'_1$  est tangente à  $C_1$  on trouve pour  $\varphi_0$  l'équation

$$(9) \quad a_1(b_1 + c_1 - a_1)^2 \cos^2 \varphi_0 \\ + b_1(c_1 + a_1 - b_1)^2 \sin^2 \varphi_0 - (a_1 + b_1 - c_1)^2 = 0,$$

qui, par adjonction au premier membre de la quantité identiquement nulle

$$-4a_1b_1c_1 \cos^2 \varphi_0 - 4b_1c_1a_1 \sin^2 \varphi_0 + 4c_1a_1b_1,$$

devient

$$I_3(a_1 \cos^2 \varphi_0 + b_1 \sin^2 \varphi_0 - c_1) = 0,$$

et nous vérifions ainsi toutes les circonstances annoncées *a priori*.

Nous voyons aussitôt que  $A_2 A'_2$  joue par rapport à  $C_2$  le rôle de  $A_1 A'_1$  par rapport à  $C_1$ , la conique  $C_0$  restant la même dans les deux cas. Si donc on pose

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_2 = \frac{1}{(b_1 + c_1 - a_1)^2}, \\ b_2 = \frac{1}{(c_1 + a_1 - b_1)^2}, \\ c_2 = \frac{1}{(a_1 + b_1 - c_1)^2}; \end{array} \right.$$

on a, d'après les calculs qui précèdent, appliqués à  $C_0$  et  $C_2$ ,

$$C_4 \equiv (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - 2b_2c_2 - 2c_2a_2 - 2a_2b_2)C_0 + 4a_2b_2c_2C_2,$$

et ceci fournit aussitôt la relation *nécessaire* pour les hexagones  $P_6$ , obtenue en annulant le coefficient de  $C_0$  de façon que  $C_4$  et  $C_2$  coïncident. Cette relation se décompose en

$$(11) \quad \left( \frac{1}{b_1 + c_1 - a_1} + \frac{1}{c_1 + a_1 - b_1} + \frac{1}{a_1 + b_1 - c_1} \right) \\ \times \left( \frac{1}{c_1 + a_1 - b_1} + \frac{1}{a_1 + b_1 - c_1} - \frac{1}{b_1 + c_1 - a_1} \right) \\ \times \left( \frac{1}{a_1 + b_1 - c_1} + \frac{1}{b_1 + c_1 - a_1} - \frac{1}{c_1 + a_1 - b_1} \right) \\ \times \left( \frac{1}{b_1 + c_1 - a_1} + \frac{1}{c_1 + a_1 - b_1} - \frac{1}{a_1 + b_1 - c_1} \right) = 0.$$

Le premier facteur qui est symétrique en  $a_1, b_1, c_1$  ne peut être que le facteur  $l_3$  parasite, relatif au triangle; c'est ce que l'on vérifie sans peine en le rendant entier; on ne garde donc que les trois derniers qui expriment d'ailleurs que  $C_3$  se réduit à l'un des sommets du triangle autopolaire.

Exprimons maintenant  $C_4$  en  $C_0$  et  $C_1$ , ce qui est facile en remplaçant  $C_2$  par l'expression déjà obtenue:

on a

$$(12) \quad C_4 \equiv [a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - 2b_2c_2 - 2c_2a_2 - 2a_2b_2 + 4a_2b_2c_2I_3]C_0 \\ + 16a_2b_2c_2a_1b_1c_1C_1.$$

La condition d'existence des *pentagones* est donc

$$(13) \quad a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - 2b_2c_2 - 2c_2a_2 - 2a_2b_2 + 4a_2b_2c_2I_3 = 0.$$

Nous savons que cette condition doit contenir le facteur parasite  $I_3$  relatif aux  $P_3$ ; cela a été signalé par la décomposition (11) de l'expression  $2 \Sigma b_2c_2 - \Sigma a_2^2$ ; on trouve ainsi les conditions définitives pour l'hexagone ou le pentagone

$$(11') \quad I_6 \equiv [(a_1 + b_1 + c_1)^2 - 4(a_1^2 + b_1c_1)] \\ \times [(a_1 + b_1 + c_1)^2 - 4(b_1^2 + c_1a_1)] \\ \times [(a_1 + b_1 + c_1)^2 - 4(c_1^2 + a_1b_1)] = 0,$$

$$(13') \quad I_5 \equiv I_6 + 4I_4^2 = 0.$$

La forme (12) de  $C_4$  masque légèrement la condition d'identité de  $C_4$  avec  $C_0$ , c'est-à-dire d'existence des quadrilatères  $P_4$ : il suffit de rendre l'équation entière en  $a_1, b_1, c_1$ , ou de multiplier par

$$(b_1 + c_1 - a_1)^4 (c_1 + a_1 - b_1)^4 (a_1 + b_1 - c_1)^4$$

pour retrouver la condition  $I_4 = 0$ .

Pour obtenir la condition relative à l'*octogone*  $P_8$ , il suffit d'exprimer que  $C_0$  et  $C_2$  admettent des quadrilatères de Poncelet; on trouve ainsi

$$I_8 \equiv (b_2 + c_2 - a_2)(c_2 + a_2 - b_2)(a_2 + b_2 - c_2) = 0.$$

Ces exemples suffisent pour montrer la souplesse et la puissance de la méthode.

6. Indiquons maintenant comment par récurrence

on trouvera les équations des coniques  $C_2, C_3, \dots, C_n, \dots, C_{2n} \dots$  successives. Prenons l'équation de la conique  $C_n$  sous la forme

$$(C_n) \quad \frac{x^2}{a_n} + \frac{y^2}{b_n} - \frac{z^2}{c_n} = 0;$$

alors le calcul fait au début du paragraphe 4 s'applique aussi bien au couple  $(C_0, C_n)$  qu'au couple  $(C_0, C_1)$  : posons donc

$$(14) \quad \begin{cases} \alpha_n = b_n + c_n - a_n & 2a_n = \beta_n + \gamma_n, \\ \beta_n = c_n + a_n - b_n & \text{ou} \quad 2b_n = \gamma_n + \alpha_n, \\ \gamma_n = a_n + b_n - c_n & 2c_n = \alpha_n + \beta_n. \end{cases}$$

Les paramètres  $\varphi_0$  et  $\varphi_n$  sont liés par la relation

$$(15) \quad \alpha_n \cos \varphi_0 \cos \varphi_n + \beta_n \sin \varphi_0 \sin \varphi_n - \gamma_n = 0,$$

l'équation de  $A_n A'_n$  est

$$(16) \quad \alpha_n x \cos \varphi_0 + \beta_n y \sin \varphi_0 - \gamma_n = 0,$$

l'équation ponctuelle de  $C_{2n}$  est

$$(17) \quad \alpha_n^2 x^2 + \beta_n^2 y^2 - \gamma_n^2 = 0.$$

(La condition de possibilité des  $P_{4n}$  est  $\alpha_n \beta_n \gamma_n = 0$ .)

Pour abrégé écrivons

$$(18) \quad \lambda_1 = \frac{\gamma_1}{\alpha_1}, \quad \mu_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}, \quad \lambda_i = \frac{\gamma_i}{\alpha_i}, \quad \mu_i = \frac{\beta_i}{\alpha_i}.$$

On a donc

$$(19) \quad \begin{cases} \cos \varphi_0 \cos \varphi_{n-1} + \mu_{n-1} \sin \varphi_0 \sin \varphi_{n-1} - \lambda_{n-1} = 0, \\ \cos \varphi_{n-1} \cos \varphi_n + \mu_1 \sin \varphi_{n-1} \sin \varphi_n - \lambda_1 = 0, \end{cases}$$

et l'élimination de  $\cos \varphi_{n-1}, \sin \varphi_{n-1}$  entre les équations

tions (19) donne

$$(20) \quad \begin{aligned} & [-\lambda_1 \mu_{n-1} \sin \varphi_0 + \lambda_{n-1} \mu_1 \sin \varphi_n]^2 \\ & + [-\lambda_{n-1} \cos \varphi_n + \lambda_1 \cos \varphi_0]^2 \\ & - [\mu_1 \cos \varphi_0 \sin \varphi_n - \mu_{n-1} \sin \varphi_0 \cos \varphi_n]^2 = 0. \end{aligned}$$

Cette relation (20), malheureusement, est vérifiée, en parasite, par l'angle  $\varphi_{n-2}$  ou  $\varphi'_{n-2}$ , au lieu d'être simplement vérifiée par  $\varphi_n$  et  $\varphi'_n$ . Donc le premier membre de (20) est identique au produit

$$(21) \quad \begin{aligned} & H_n [\cos \varphi_0 \cos \varphi_n + \mu_{n-2} \sin \varphi_0 \sin \varphi_n - \lambda_{n-2}] \\ & \times [\cos \varphi_0 \cos \varphi_n + \mu_n \sin \varphi_0 \sin \varphi_n - \lambda_n]. \end{aligned}$$

Ordonnons donc les premiers membres de (20) ou (21) suivant les quantités suivantes, à l'exclusion de toute autre,

$$(22) \quad \begin{cases} \sin^2 \varphi_0 & \sin^2 \varphi_n & \sin^2 \varphi_0 \sin^2 \varphi_n \\ \sin \varphi_0 \sin \varphi_n & \cos \varphi_0 \cos \varphi_n & \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \sin \varphi_n \cos \varphi_n \end{cases}$$

les termes du type de la première ligne (22) donnent

$$(23) \quad \begin{cases} \lambda_1^2 + \lambda_{n-1}^2 = H_n [\lambda_{n-2} \lambda_n + 1], \\ \mu_1^2 + \mu_{n-1}^2 = H_n [\mu_{n-2} \mu_n + 1], \\ \lambda_1^2 \mu_{n-1}^2 - \lambda_1^2 \mu_{n-1}^2 - \mu_{n-1}^2 = -H_n, \\ \lambda_{n-1}^2 \mu_1^2 - \lambda_{n-1}^2 \mu_1^2 - \mu_1^2 = -H_n. \end{cases}$$

Les termes de la seconde ligne (22) donnent

$$(24) \quad \begin{cases} 2 \lambda_1 \mu_1 \lambda_{n-1} \mu_{n-1} = H_n [\lambda_{n-2} \mu_n + \mu_{n-2} \lambda_n], \\ 2 \lambda_1 \lambda_{n-1} = H_n [\lambda_{n-2} + \lambda_n], \\ 2 \mu_1 \mu_{n-1} = H_n [\mu_{n-2} + \mu_n]. \end{cases}$$

Cela fait 7 équations pour les inconnues  $\lambda_n, \mu_n, H_n$  à calculer en fonction des quantités  $\lambda_0 = 1, \mu_0 = 1, \lambda_1, \mu_1, \dots, \lambda_{n-1}, \mu_{n-1}$  supposées déjà calculées. Ces équations sont compatibles bien entendu; les deux dernières équations (23) donnent

$$1 - H_n = (1 - \lambda_1^2)(1 - \mu_{n-1}^2) = (1 - \lambda_{n-1}^2)(1 - \mu_1^2).$$

Si l'on pose

$$(25) \quad k^2 = \frac{1 - \mu_1^2}{1 - \lambda_1^2} = \frac{1 - \mu_{n-1}^2}{1 - \lambda_{n-1}^2} = \frac{c_1}{b_1} \frac{b_1 - a_1}{c_1 - a_1},$$

$k$  est une quantité connue et l'on a les formules, qui résolvent la question,

$$(26) \quad \begin{cases} H_n = 1 - k^2(1 - \lambda_1^2)(1 - \lambda_{n-1}^2), \\ \lambda_n = \frac{2\lambda_1\lambda_{n-1}}{H_n} - \lambda_{n-2}, \\ \mu_n = \frac{2\mu_1\mu_{n-1}}{H_n} - \mu_{n-2}. \end{cases}$$

La constance du rapport  $\frac{1 - \mu_n^2}{1 - \lambda_n^2}$  signifie simplement que toutes les coniques  $C_n$  contiennent les points communs à  $C_0$  et  $C_1$ . Le calcul ainsi conduit montre que les équations de  $C_n$  et  $C_{2n}$  s'obtiennent ensemble; dans notre méthode, nous avons besoin de former l'identité

$$C_{2n} \equiv I_{2n+1}C_0 + I_{2n}C_1.$$

Or on a le droit d'écrire, en prenant

$$(27) \quad \begin{cases} C_{2n} \equiv x^2 + \mu_n^2 y^2 - \lambda_n^2, \\ 1 = I_{2n+1} + \frac{I_{2n}}{a_1}, \\ \mu_n^2 = I_{2n+1} + \frac{I_{2n}}{b_1}, \\ \lambda_n^2 = I_{2n+1} + \frac{I_{2n}}{c_1}, \end{cases}$$

de sorte que

$$(28) \quad \begin{cases} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_1}\right) I_{2n} = 1 - \mu_n^2, & a_1 - b_1 \mu_n^2 = (a_1 - b_1) I_{2n+1}, \\ \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{c_1}\right) I_{2n} = 1 - \lambda_n^2, & a_1 - c_1 \lambda_n^2 = (a_1 - c_1) I_{2n+1}. \end{cases}$$

Ces relations montrent clairement que la condition  $I_{2n} = 0$  s'obtient en cherchant le plus grand commun

diviseur des expressions  $\mu_n^2 - 1$  et  $\lambda_n^2 - 1$ , qui sont rationnelles en  $a_1, b_1, c_1$  et l'égalant à zéro (on retrouve d'ailleurs ici la constante du rapport  $\frac{1 - \mu_n^2}{1 - \lambda_n^2}$ ). On remarque d'ailleurs que  $C_{2n}$  ayant pour équation

$$x^2 + \mu_n^2 y^2 - \lambda_n^2 = 0,$$

il y a à étudier les quatre combinaisons

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \mu_n = 1, \\ \lambda_n &= 1, \quad \mu_n = -1, \\ \lambda_n &= -1, \quad \mu_n = 1, \\ \lambda_n &= -1, \quad \mu_n = -1. \end{aligned}$$

Mais l'équation (16) obtenue pour  $A_n A'_n$  ou

$$x \cos \varphi_0 + \mu_n y \cos \varphi_0 - \lambda_n = 0$$

montre que la première combinaison est à rejeter, car on aurait alors  $A_n = A'_n = A_0$  et il s'agirait d'un  $P_n$  et non pas d'un  $P_{2n}$ . La combinaison  $\lambda_n = -1, \mu_n = 1$  par exemple [montre que  $A_n A'_n$  est tangente au point  $\varphi_0 + \pi$  à  $C_0$ : c'est le point diamétralement opposé à  $A_0$ : on pourra donc se borner à chercher le plus grand commun diviseur de  $1 + \lambda_n$  et  $\mu_n - 1$ ; une permutation circulaire effectuée ensuite sur  $a_1, b_1, c_1$  donnera les deux autres diviseurs analogues; en égalant chacun à zéro, on a l'une des séries  $C_1$  admettant avec  $C_0$   $\infty^1$  polygones  $P_{2n}$ . On aura de même pour  $P_{2n+1}$  à égaliser à zéro le plus grand commun diviseur de  $a_1 - b_1 \mu_n^2$ , et  $a_1 - c_1 \lambda_n^2$  ou simplement le quotient  $\frac{a_1 - b_1 \mu_n^2}{a_1 - b_1}$ .

7. Ici se place la remarque simple: si  $n = pq$ , l'existence de  $P_n$  pour  $C_0$  et  $C_1$  revient à l'existence de  $P_p$  pour  $C_0$  et  $C_q$ ; autrement dit, si

$$(29) \quad f_p(a_1, b_1, c_1) = 0$$

est la condition d'existence des  $P_p$  pour  $C_0$  et  $C_1$ , la condition

$$(30) \quad f_p(a_q, b_q, c_q) = 0$$

est la condition d'existence des  $P_{pq}$  pour  $C_0$  et  $C_1$ . Nous avons précisément, au paragraphe précédent, montré comment  $a_q, b_q, c_q$  s'obtiennent rationnellement au moyen de  $a_1, b_1, c_1$ ; dans l'expression (30) on remplace  $a_q, b_q, c_q$  par ces expressions en  $a_1, b_1, c_1$ ; c'est cette opération que j'appelle substitution  $(a_1, b_1, c_1; a_q, b_q, c_q)$ . Si donc on effectue la décomposition de l'entier  $n$  en facteurs premiers

$$n = p^p q^q r^r \dots,$$

on pourra partir par exemple de l'expression

$$f_p(a_1, b_1, c_1)$$

et l'on y effectuera  $P - 1$  fois successivement la substitution  $(a_1, b_1, c_1; a_p, b_p, c_p)$ , puis dans le résultat obtenu  $Q$  fois la substitution  $(a_1, b_1, c_1; a_q, b_q, c_q)$  et ainsi de suite.

8. Appliquons ce qui précède à la recherche des conditions d'existence de  $P_n$  et  $P_{2n}$ . La relation relative aux  $P_n$

$$(31) \quad f_n(a_1, b_1, c_1) = 0$$

sera remplacée pour les  $P_{2n}$  par la condition

$$(32) \quad f_n \left[ \frac{1}{(b_1 + c_1 - a_1)^2}, \frac{1}{(c_1 + a_1 - b_1)^2}, \frac{1}{(a_1 + b_1 - c_1)^2} \right] = 0$$

ou du moins la relation (32) rendue entière, débarrassée du facteur parasite éventuel  $f_n(a_1, b_1, c_1)$  relatif à un  $P_n$  parcouru deux fois est la condition cherchée pour les  $P_{2n}$ .

Écrivons donc les formules de substitution

$$(33) \begin{cases} a_1 = a^2, & b_1 = b^2, & c_1 = c^2, \\ a = \frac{1}{B_1 + C_1 - A_1}, & b = \frac{1}{C_1 + A_1 - B_1}, & c = \frac{1}{A_1 + B_1 - C_1}, \end{cases}$$

où j'écris  $A_1, B_1, C_1$  pour plus de clarté. Je considère  $(a_1, b_1, c_1), (a, b, c), (A_1, B_1, C_1)$  comme des coordonnées ponctuelles homogènes; la transformation *plane*  $(A_1, B_1, C_1; a_1, b_1, c_1)$  n'est pas birationnelle, car au point  $(A_1, B_1, C_1)$  correspond bien rationnellement un seul point  $(a_1, b_1, c_1)$ , mais au point  $(a_1, b_1, c_1)$  correspond quatre points  $(A_1, B_1, C_1), (A'_1, B'_1, C'_1), (A''_1, B''_1, C''_1), (A'''_1, B'''_1, C'''_1)$  que nous pouvons supposer correspondre aux points intermédiaires respectifs  $(a, b, c), (-a, b, c), (a, -b, c), (a, b, -c)$ .

On a donc

$$(34) \begin{cases} 2A_1 = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, & 2A'_1 = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \\ 2B_1 = \frac{1}{c} + \frac{1}{a}, & 2B'_1 = \frac{1}{c} - \frac{1}{a}, \\ 2C_1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, & 2C'_1 = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}, \end{cases}$$

d'où l'on conclut entre les points  $(A_1, B_1, C_1), (A'_1, B'_1, C'_1)$  les formules birationnelles involutives

$$(35) \begin{cases} A'_1 = A_1, & B'_1 = A_1 - C_1, & C'_1 = A_1 - B_1, \\ A_1 = A'_1, & B_1 = A'_1 - C'_1, & C_1 = A'_1 - B'_1. \end{cases}$$

Nous allons trouver une simplification considérable dans le cas où l'entier  $n$  est impair. Mettons en évidence la parité et écrivons la condition relative aux  $P_{2n+1}$ , soit

$$(36) \quad f_{2n+1}(a_1, b_1, c_1) = 0.$$

On a d'abord ce résultat : l'expression  $f_{2n+1}(a_1, b_1, c_1)$

est symétrique en  $a_1, b_1, c_1$ , et de plus l'équation

$$(37) \quad f_{2n+1}(a^2, b^2, c^2) = 0$$

se décompose *rationnellement en quatre facteurs*, dont l'un, rendu entier en  $A_1, B_1, C_1$ , reproduit  $f_{2n+1}(A_1, B_1, C_1)$ ; ce facteur est symétrique en  $a, b, c$ ; nous le désignerons par  $R_{2n+1}(a, b, c)$  et il correspond à un  $P_{2n+1}$  parcouru deux fois; on a l'identité

$$(38) \quad f_{2n+1}(a^2, b^2, c^2) \equiv \varepsilon R_{2n+1}(a, b, c) R_{2n+1}(-a, b, c), \\ \times R_{2n+1}(a, -b, c) R_{2n+1}(a, b, -c),$$

où  $\varepsilon$  est un facteur numérique; chacun des facteurs  $R_{2n+1}(-a, b, c)$  et analogues correspond à l'une des trois séries de  $P_{2n+2}$  qui se différencient l'une de l'autre par le choix du sommet du triangle autopolaire  $T$  où passent les diagonales de  $P_{2n+2}$  joignant les sommets opposés. Exemple :

$$f_3(a_1, b_1, c_1) \equiv a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - 2b_1c_1 - 2c_1a_1 - 2a_1b_1, \\ f_3(a^2, b^2, c^2) \equiv -(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c).$$

On peut encore remarquer qu'en raison de la symétrie de  $R_{2n+1}$  en  $a, b, c$  les trois facteurs  $R_{2n+1}(-a, b, c)$ ,  $R_{2n+1}(a, -b, c)$  ou  $R_{2n+1}(a, b, -c)$  se déduisent l'un de l'autre par permutations circulaires.

D'autre part  $R_{2n+1}(a, b, c)$  exprimé en  $A_1, B_1, C_1$  donne la relation  $f_{2n+1}(A_1, B_1, C_1) = 0$ , donc

$$R_{2n+1}(-a, b, c)$$

donne de même  $f_{2n+1}(A'_1, B'_1, C'_1) = 0$ : donc, en vertu de (35), l'équation

$$(39) \quad f_{2n+1}(a_1, a_1 - c_1, a_1 - b_1) = 0$$

est la condition nécessaire et suffisante d'existence d'une série de  $P_{2n+2}$  si

$$f_{2n+1}(a_1, b_1, c_1) = 0$$

est la condition nécessaire et suffisante d'existence des  $P_{2n+1}$ .

En vertu de la symétrie, écrire

$$f_{2n+1}(a_1, a_1 - b_1, a_1 - c_1)$$

revient au même qu'écrire

$$f_{2n+1}(a_1, a_1 - c_1, a_1 - b_1).$$

Nous avons ainsi, dans le cas où  $n$  est impair, considérablement abrégé les calculs : sous la forme (32), il y a en effet une décomposition en quatre facteurs à effectuer, nous avons montré comment on trouve chacun d'eux. La vérification est aisée à faire pour le triangle et l'hexagone [voir formules (11) et (11')].

Dans le cas où l'on part d'un polygone  $P_{2n}$ , le procédé de simplification ne s'applique plus ; il faut revenir à la formule (32) ; nous supposons que l'équation

$$(40) \quad f_{2n}(a_1, b_1, c_1) = 0$$

soit l'une des conditions, *irréductible*, d'existence d'un  $P_{2n}$  pour lequel les diagonales joignant deux sommets opposés passent par *un* sommet déterminé de T ; l'équation

$$(41) \quad f_{2n} \left[ \frac{1}{(b_1 + c_1 - a_1)^2}, \frac{1}{(c_1 + a_1 - b_1)^2}, \frac{1}{(a_1 + b_1 - c_1)^2} \right] = 0$$

ne se décompose plus ; c'est la condition nécessaire et suffisante d'existence de  $P_{4n}$ , relatifs au même sommet du triangle conjugué commun T. La vérification est facile à faire : pour le quadrilatère, on a eu, par exemple,

$$b_1 + c_1 - a_1 = 0,$$

d'où, pour l'octogone, la relation

$$\frac{1}{(c_1 + a_1 - b_1)^2} + \frac{1}{(a_1 + b_1 - c_1)^2} - \frac{1}{(b_1 + c_1 - a_1)^2} = 0,$$

ou si l'on préfère

$$b^2 + c^2 - a^2 = 0$$

qui est indécomposable.

(A suivre.)

## CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

§ ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Énoncer et démontrer le théorème relatif à l'intégrale  $\frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$  prise le long d'un contour fermé (C) à l'intérieur duquel la fonction  $f(z)$  n'admet pas d'autres singularités que des pôles.

II. On donne une courbe (C) ayant pour équations paramétriques

$$x = a \cos \theta, \quad y = a \sin \theta, \quad z = a \sin 2\theta,$$

où  $a$  désigne une constante et  $\theta$  un paramètre.

Le plan osculateur en un point M de cette courbe coupe l'axe des  $z$  en un point A. Déterminer les lignes asymptotiques de la surface engendrée par la droite AM lorsque M parcourt (C). Pouvait-on prévoir que la détermination de ces lignes asymptotiques n'exigerait qu'une quadrature ?

III. Intégrer l'équation

$$2y^2 - xy \frac{dy}{dx} - x^2 \left[ \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + y \frac{d^2y}{dx^2} \right] = 0.$$

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — II. Le point A a pour coordonnées  $0, 0, -3z$ , de sorte qu'on a à chercher les lignes asymptotiques de la surface réglée ayant pour équations paramétriques

$$X = xt, \quad Y = yt, \quad Z = -3z + 4zt.$$

Calcul classique conduisant à une seule quadrature parce qu'on connaît *a priori* deux lignes asymptotiques qui sont l'axe des  $z$  ( $t = 0$ ) et la courbe C ( $t = 1$ ).

III. En posant  $y^2 = z$  on est ramené à une équation linéaire

de forme classique qui, en posant  $x = e^t$ , se ramène à une équation linéaire du second ordre à coefficients constants dont l'équation caractéristique admet les racines  $\pm 2$ . En remontant on arrive à l'intégrale générale cherchée

$$y^2 = Cx^2 + \frac{C'}{x^2}.$$

✓ ÉPREUVE PRATIQUE. — On donne en coordonnées rectangulaires la surface (S) ayant pour équations paramétriques

$$x = au \sin v, \quad y = au, \quad z = a(1 - u) \cos v,$$

où  $a$  est une constante positive donnée et où  $u, v$  sont deux paramètres.

Montrer que cette surface est engendrée par une droite qui s'appuie en un point A sur l'axe Oz, en un point B sur la droite  $y = a, z = 0$ , de telle sorte que la longueur AB reste constante.

Soit  $\Sigma$  la portion de la surface (S) engendrée par le segment de droite AB, A restant du côté des  $z$  positifs et B du côté des  $x$  positifs.

1° Calculer le volume V compris entre  $\Sigma$ , le plan  $yOx$  et le plan  $yOz$ .

2° Soit  $\Gamma$  la portion de la ligne de striction de (S) qui se trouve située sur  $\Sigma$ . Calculer l'aire de la surface conique engendrée par le segment de droite OP (O désignant l'origine des coordonnées) lorsque P parcourt  $\Gamma$ .

On pourra exprimer les coordonnées d'un point M de cette surface conique situé sur OP en fonction du paramètre  $v$  et du paramètre  $w = \frac{OM}{OP}$ .

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — Les courbes  $v = \text{const.}$  sont les droites considérées dont les points A et B sont  $u = 0$  et  $u = 1$ .

$\Sigma$  est la portion de surface S obtenue en faisant varier  $u$  de 0 à 1 et  $v$  de 0 à  $\frac{\pi}{2}$  de sorte que

$$V = \int \int z \, dx \, dy$$

devient, exprimée en  $u$  et  $v$ , une intégrale double étendue à un rectangle.

Le point de striction sur la génératrice  $v$  est donné par  $u = \sin^2 v$  et  $\Gamma$  est obtenu en faisant varier  $v$  de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ . Les coordonnées d'un point de la surface conique seront

$$x = a\omega \sin^3 v, \quad y = a\omega \sin^2 v, \quad z = a\omega \cos^3 v,$$

la surface cherchée sera une intégrale double étendue au rectangle obtenu en faisant varier  $\omega$  de 0 à 1 et  $v$  de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ .

Bordeaux, novembre 1924.)

EPREUVE THÉORIQUE. — I. *Étant donnée l'équation aux dérivées partielles (notations classiques)*

$$p - q^2 x - z = 0,$$

*intégrer complètement les équations des caractéristiques et déterminer l'intégrale  $z = \varphi(x, y)$  telle que  $\varphi(0, y) = y^2$  identiquement.*

II. *Étant donnée une courbe gauche (C), on mène en un point M de cette courbe la tangente  $M\xi$ , la normale principale  $M\eta$  et la binormale  $M\zeta$ . Soient MD la bissectrice de l'angle  $\xi M\zeta$  et (S) la surface engendrée par MD quand M parcourt (C). On prend sur MD un point P défini par  $MP = u\sqrt{2}$ ; former l'équation du plan tangent en P à (S) rapportée aux axes  $M\xi, M\eta, M\zeta$  et en déduire à quelle condition la surface (S) sera développable. La courbe (C) est, dans ce cas, une hélice; montrer que la surface (S) est alors le cylindre sur lequel est tracée cette hélice.*

*Dans le cas général où (S) n'est pas développable, former l'équation différentielle de Riccati donnant ses lignes asymptotiques non rectilignes.*

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. Les équations des caractéristiques sont

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-2qx} = \frac{dp}{q^2 + p} = \frac{dq}{q}$$

donnant les intégrales premières

$$qe^{-x} = \text{const.}, \quad \frac{p}{q} - q = \text{const.}, \quad y + 2q(x-1) = \text{const.}$$

et l'intégrale demandée s'obtient alors par l'application immédiate de la méthode de Cauchy; c'est

$$z = \frac{y^2}{4(1-x) - 3e^{-x}}.$$

II. Considérant l'arc  $s$  de (C) comme étant le temps, on connaît le mouvement du trièdre  $M\xi\eta\zeta$ : translation de composantes 1, 0, 0 et rotation de composantes  $\frac{-1}{T}$ , 0,  $\frac{1}{R}$ , T et R étant les rayons de torsion et de courbure.

Le plan tangent au point  $u, 0, u$  de (S) a sa direction déterminée par la génératrice et par la vitesse d'entraînement de ce point; on trouve ainsi, en posant

$$\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{T}\right)u = v,$$

le plan

$$(X - u)v - Y - (Z - u)v = 0.$$

La surface sera développable si sa direction est indépendante de  $u$ , c'est-à-dire si l'on a  $R = T$ . (C) est alors une hélice et le plan tangent précédent est  $YzO$ , c'est le plan  $M\xi\zeta$  dont (S) est ainsi l'enveloppe, plan qui, d'après les propriétés de l'hélice, est le plan tangent au cylindre sur lequel elle est tracée, donc (S) est ce cylindre.

Dans le cas général, une ligne asymptotique de S sera obtenue en considérant  $u$  comme fonction de  $s$  et écrivant que l'accélération du point  $u, 0, u$ , calculée d'après une méthode classique est dans le plan tangent précédemment écrit. On trouve ainsi une équation en  $u$  qui s'exprime immédiatement en  $v$  sous la forme de Riccati :

$$\frac{dv}{ds} = -\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{T}\right)v^2 - \frac{1}{R}.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer la valeur de l'intégrale de variable complexe

$$\int_0^4 \frac{dz}{(1-z^2)\sqrt{z}}$$

*prise de 0 à 4 le long d'un chemin tracé tout entier dans le premier angle de coordonnées.*

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — On ramène le chemin à un petit arc de cercle de centre origine suivi du chemin rectiligne sur l'axe réel, chemin interrompu par une petite demi-circonférence autour du pôle  $z = 1$ .

(Bordeaux, novembre 1924.)

---

---

### BIBLIOGRAPHIE.

---

MÉTHODES ET PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE MODERNE, par  
*M. Marcel Yvon*. 1 vol. de 112 pages (autographié).  
Paris, librairie Croville-Morant.

Un excellent petit Livre, auquel on ne peut reprocher que de se présenter sous la forme trop modeste d'une sorte de Recueil d'exercices à l'usage des élèves de mathématiques spéciales. En réalité, il s'agit d'un Ouvrage d'initiation à une foule de théories importantes négligées dans l'enseignement, beaucoup plus tourné aujourd'hui vers l'algèbre et l'analyse que vers la géométrie : transformations homographiques et corrélation, transformations conformes, faisceaux ponctuels et tangentiels de coniques, théorèmes de Poncelet, inversion, etc. C'est vraiment assez riche pour 112 pages. Et une alliance heureuse de la géométrie pure et de la géométrie analytique. Trop de Livres sont écrits en vue d'illustrer une méthode, éliminant tout ce qui refuse d'en relever. Cela ne donne guère idée de ce qu'est l'invention, dont le propre est de créer ses méthodes à propos des questions qui se posent. L'Ouvrage de M. Marcel Yvon (pseudonyme) enseigne qu'il ne faut pas avoir de parti pris, que tel problème doit être attaqué par le calcul et tel autre en faisant la figure. Chose utile en un temps où le « problème » proprement dit est peu cultivé dans les classes, où presque tous les exercices ne sont que des applications immédiates du cours.

R. B.

---

[L'17d]

## PROBLÈME DE PONCELET ET PROBLÈME ANALOGUE

*(suite et fin);*

PAR BERTRAND GAMBIER,

Professeur à la Faculté des Sciences de Lille.

8. Il est facile d'interpréter géométriquement les résultats exposés au paragraphe précédent; cela nous permettra même de résoudre un problème nouveau analogue à celui de Poncelet et en rapport étroit avec lui.

La substitution  $(a_1, b_1, c_1; a_p, b_p, c_p)$  fait correspondre à un point du plan  $(a_1, b_1, c_1)$ , rationnellement, un seul point  $(a_p, b_p, c_p)$ ; au point  $(a_p, b_p, c_p)$  correspondent inversement un groupe fini de points  $(a_1, b_1, c_1)$ . Si le point  $(a_1, b_1, c_1)$  est pris au hasard dans le plan, l'itération de cette transformation, qui n'est ni birationnelle ni involutive, donne successivement les points

$$(52) \quad (a_1, b_1, c_1), (a_p, b_p, c_p), (a_{p^2}, b_{p^2}, c_{p^2}), \dots$$

qui correspondent aux coniques

$$(43) \quad C_1, C_p, C_{p^2}, \dots$$

définies au paragraphe 2 et formant une suite indéfinie. Si  $C_0$  et  $C_1$  admettent des polygones  $P_n$ , autrement dit si  $(a_1, b_1, c_1)$  appartient à la courbe d'équation

$$f_n(a_1, b_1, c_1) = 0,$$

les coniques (43) forment une suite périodique se

reproduisant soit de  $n$  en  $n$ , soit de  $\frac{n}{\delta}$  en  $\frac{n}{\delta}$  où  $\delta$  est un diviseur de  $n$ . On est ramené au problème bien connu d'étudier les restes, suivant le module  $n$ , de la suite

$$1 \quad p \quad p^2 \quad p^3 \quad \dots$$

Dans le paragraphe précédent, nous n'avons envisagé la question que pour  $p = 2$ ; pour ne pas allonger, bornons-nous à ce cas  $p = 2$ . C'est parce que nous devons remplacer  $a_1, b_1, c_1$  par

$$\frac{1}{(B_1 + C_1 - A_1)^2}, \quad \frac{1}{(C_1 + A_1 - B_1)^2}, \quad \frac{1}{(A_1 + B_1 - C_1)^2},$$

que nous avons écrit les formules (33).

Si nous partons de la courbe  $S_{2n+1}$  d'équation

$$(36) \quad f_{2n+1}(a_1, b_1, c_1) = 0,$$

les quatre points  $(A_1, B_1, C_1)$ ,  $(A'_1, B'_1, C'_1)$ ,  $(A''_1, B''_1, C''_1)$ ,  $(A'''_1, B'''_1, C'''_1)$  correspondant au même point  $(a_1, b_1, c_1)$  décrivent quatre courbes distinctes dont la première est  $S_{2n+1}$ , les autres étant  $S'_{2n+1}$ ,  $S''_{2n+1}$ ,  $S'''_{2n+1}$ . Il en résulte cette fois qu'au lieu d'étudier une *transformation plane qui n'est pas birationnelle*, nous avons une *transformation birationnelle de courbe à courbe* entre  $S_{2n+1}$  et  $S_{2n+1}^{(i)}$  où  $i$  est l'un des entiers 0, 1, 2, 4. Bornons-nous à la transformation birationnelle ainsi obtenue sur  $S_{2n+1}$ : les quantités  $\left(\frac{B_1}{A_1}, \frac{C_1}{A_1}\right)$  s'expriment rationnellement sur  $S_{2n+1}$  au moyen de  $\left(\frac{b_1}{a_1}, \frac{c_1}{a_1}\right)$ , il est nécessaire puisque

$$2A_1 = \frac{1}{\sqrt{b_1}} + \frac{1}{\sqrt{c_1}}, \quad 2B_1 = \frac{1}{\sqrt{c_1}} + \frac{1}{\sqrt{a_1}}, \quad 2C_1 = \frac{1}{\sqrt{a_1}} + \frac{1}{\sqrt{b_1}}$$

que les expressions

$$\sqrt{b_1 c_1}, \quad \sqrt{c_1 a_1}, \quad \sqrt{a_1 b_1}$$

s'expriment rationnellement, sur  $S_{2n+1}$ , au moyen de  $(a_1, b_1, c_1)$ .

La vérification est aisée pour le triangle, car

$$\begin{aligned} {}_3(a_1, b_1, c_1) &\equiv a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - 2b_1c_1 - 2c_1a_1 - 2a_1b_1 \\ &\equiv (-a + b_1 + c_1)^2 - 4b_1c_1 \\ &\equiv (a_1 - b_1 + c_1)^2 - 4c_1a_1 \\ &\equiv (a_1 + b_1 - c_1)^2 - 4a_1b_1. \end{aligned}$$

Nous allons même voir le moyen géométrique simple de définir cette correspondance birationnelle sur  $S_{2n+1}$  : le point  $(A_1, B_1, C_1)$  coïncide avec le point  $(a_n, b_n, c_n)$  déduit du point  $(a_1, b_1, c_1)$ .

En effet, la droite  $A_nA'_n$  relative au point  $A_0$  de départ sur  $C_0$  a pour équation [voir plus haut formules (16) et suivantes]

$$\alpha_n x \cos \varphi_0 + \beta_n y \sin \varphi_0 - \gamma_n = 0.$$

Elle est donc la [polaire de  $A_0(\cos \varphi_0, \sin \varphi_0)$  par rapport à la conique

$$(\Gamma_n) \quad \alpha_n x^2 + \beta_n y^2 - \gamma_n = 0.$$

Comme la conique  $C_{2n}$  coïncide avec  $C_1$ , on a

$$(44) \quad a_1 \alpha_n^2 = b_1 \beta_n^2 = c_1 \gamma_n^2$$

et ces équations prennent une forme plus simple si l'on pose comme plus haut

$$(45) \quad a_1 = a^2, \quad b_1 = b^2, \quad c_1 = c^2.$$

En choisissant convenablement la détermination de  $a, b, c$  elles montrent que  $\Gamma_n$  n'est autre que la conique

$$(\Gamma) \quad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - \frac{z^2}{c} = 0.$$

Or on peut remarquer que la conique  $\Gamma$  obtenue en

prenant pour le point  $(a, b, c)$  l'une des quatre positions définie par (45) est telle que la polaire réciproque de  $C_0$  par rapport à  $\Gamma$  soit  $C_1$ ; l'enveloppe des droites coupées harmoniquement par  $C_0$  et  $\Gamma$  a pour équation

$$(\overline{C_1}) \quad \frac{x^2}{A_1} + \frac{y^2}{B_1} - \frac{1}{C_1} = 0,$$

où l'on a

$$(46) \quad 2A_1 = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \quad 2B_1 = \frac{1}{c} + \frac{1}{a}, \quad 2C_1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Mais alors les équations (45) et (46) reconstituent le système de départ (33). Ici l'une des quatre coniques  $\Gamma$  est précisément  $\Gamma_n$ , parce que  $C_{2n}$  et  $C_1$  coïncident; le pôle de  $A_n A'_n$  est précisément  $A_0$  de sorte que  $A_0 A_n$  et  $A_0 A'_n$  sont deux droites coupées harmoniquement par  $C_0$  et  $\Gamma_n$ , donc tangentes à une conique  $\overline{C_1}$  qui n'est autre que  $C_n$ : le nombre  $n$  est premier avec  $2n + 1$  de sorte que les droites joignant de  $n$  en  $n$  les sommets de  $P_{2n+1}$  sont toutes tangentes à  $C_n$  et forment le polygone  $P'_{2n+1}$  inscrit dans  $C_0$ , circonscrit à  $C_n$  (ou  $\overline{C_1}$ ), les sommets consécutifs étant conjugués par rapport à  $\Gamma_n$  (ou  $\Gamma$ ). Le point  $(A_1, B_1, C_1)$  qui sert à définir  $\overline{C_1}$ , c'est-à-dire  $C_n$ , coïncide donc avec  $(a_n, b_n, c_n)$ ; ce point  $(A_1, B_1, C_1)$  s'obtient donc bien rationnellement, sur  $S_{2n+1}$ , en tenant compte de l'équation de  $S_{2n+1}$ , au moyen du point  $(a_1, b_1, c_1)$ . La substitution birationnelle ainsi trouvée sur  $S_{2n+1}$  n'est identique que pour le triangle ( $n = 1$ ); d'ailleurs écrire que  $(a_1, b_1, c_1)$ , dans la transformation *plane*, coïncide avec son transformé  $(A_1, B_1, C_1)$  entraîne les équations

$$a(b^2 + c^2 - a^2) = b(c^2 + a^2 - b^2) = c(a^2 + b^2 - c^2)$$

qui n'ont d'autre solution commune que celles de

$$a + b + c = 0$$

et par suite font retrouver  $S_3$ . Le point  $(a_1, b_1, c_1)$  est d'ailleurs le point  $(A_2, B_2, C_2)$  déduit de  $(A_1, B_1, C_1)$ : en effet, si dans les formules (10) nous employons les grandes lettres  $A_1, B_1, C_1$ , et  $A_2, B_2, C_2$ , nous trouvons pour  $A_2, B_2, C_2$  en fonction de  $A_1, B_1, C_1$  les valeurs fournies pour  $a_1, b_1, c_1$  en fonction de  $A_1, B_1, C_1$  par les formules (33); or pour que la transformation birationnelle sur  $S_{2n+1}$  entre  $(a_1, b_1, c_1)$  et  $(A_1, B_1, C_1)$  fût involutive, il faudrait que  $(a_1, b_1, c_1)$  coïncidât avec  $(A_n, B_n, C_n)$ : donc sur  $S_{2n+1}$  la transformation birationnelle est involutive pour  $n = 2$  (pentagone), mais ne l'est plus si  $n \geq 3$ .

Le polygone  $P_{2n+1}$  se trouve être à lui-même son propre polaire réciproque relativement à cette conique  $\Gamma$  qui échange  $C_0$  avec  $C_1$  et le sommet  $A_0$  avec la corde  $A_n A_{n+1}$ , côté opposé à  $A_0$  dans  $P_{2n+1}$ ; or on voit aussitôt, géométriquement ou analytiquement par l'équation de  $A_n A_{n+1}$  et les équations (44), que,  $O_1$  étant l'un des sommets du triangle  $T$  conjugué commun à  $C_0$  et  $C_1$ , la droite  $A_0 O_1$  perce  $C_0$  en un point que j'appellerai  $B_n$  et qui est pôle de  $A_n A_{n+1}$  par rapport à  $\Gamma'$ ; cette construction répétée sur chaque côté de  $P_{2n+1}$  donne un polygone de  $4n + 2$  côtés

$$A_0 B_0 A_1 B_1 A_2 B_2 \dots A_i B_i A_{i+1} B_{i+1} \dots A_{2n+1} B_{2n+1} A_0$$

où  $B_i$  est le pôle de  $A_i A_{i+1}$  et où deux sommets consécutifs sont conjugués par rapport à  $\Gamma'$ , chaque côté touchant la conique enveloppe des sécantes coupées harmoniquement par  $C_0$  et  $\Gamma'$ .

Nous avons ainsi trouvé l'interprétation géométrique des opérations analytiques effectuées.

**Problème analogue au problème de Poncelet.**

9. Ce qui précède montre l'intérêt du problème suivant : Étant données deux coniques  $C_0, \Gamma$ , dont on peut sans restreindre la généralité ramener les équations à la forme

$$(C_0) \quad x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

$$(\Gamma) \quad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - \frac{1}{c} = 0,$$

existe-t-il un polygone  $\pi_n$  de  $n$  côtés inscrit dans  $C_0$ , dont les sommets consécutifs sont conjugués par rapport à  $\Gamma$  ?

S'il en est ainsi, les côtés de  $\pi_n$  enveloppent la conique  $C_1$  enveloppe des droites coupées harmoniquement par  $C_0$  et  $\Gamma$ ; l'équation tangentielle de  $C_1$  est

$$(C_1) \quad u^2 \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + v^2 \left( \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) = w^2 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right),$$

et si l'on pose

$$(1) \quad a_1 = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \quad b_1 = \frac{1}{c} + \frac{1}{a}, \quad c_1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

la conique  $C_1$  a pour équation ponctuelle

$$(C_1) \quad \frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{b_1} - \frac{1}{c_1} = 0.$$

Donc, nous reprendrons l'invariant  $I_n(a_1, b_1, c_1)$  trouvé précédemment; nous y ferons la substitution (1) et nous aurons la condition nécessaire et suffisante d'existence de  $\infty^1 \pi_n$  en égalant le résultat à zéro. Inversement les formules (1) donnent

$$(2) \quad \frac{2}{a} = b_1 + c_1 - a_1, \quad \frac{2}{b} = c_1 + a_1 - b_1, \quad \frac{2}{c} = a_1 + b_1 - c_1,$$

de sorte que si  $C$  et  $C_1$  admettent  $\infty'$  polygones  $P_n$  de Poncelet, il existe une conique  $\Gamma$  et une seule partageant harmoniquement les côtés. Il résulte de là qu'en joignant de  $p$  en  $p$  les côtés d'un polygone  $\pi_n$ , on retrouve un nouveau polygone de  $n$  ou  $\frac{n}{\delta}$  côtés, de définition semblable.

$C_0$  et  $\Gamma$  étant données *a priori*, nous n'avons en général que les polygones *impropres et repliés*, déjà signalés, au nombre de 4. A ce point de vue, le point  $A_0$  étant pris au hasard sur  $C_0$ , les cordes  $A_0A_1$  et  $A_0A'_1$  s'obtiennent en coupant  $C_0$  par la polaire de  $A_0$  relativement à  $\Gamma$ , d'où résultent  $A_1$  et  $A'_1$ ; pour que  $A_1$  et  $A'_1$  coïncident, il faut que cette polaire touche  $C_0$ , il faut donc que  $A_0$  soit sur la conique  $\gamma$  polaire réciproque de  $C_0$  par rapport à  $\Gamma$ : ces deux droites particulières  $A_0A_1$  et  $A_0A'_1$  sont d'ailleurs les tangentes issues de  $A_0$  à  $C_1$ , de sorte que cet  $A_0$  particulier se trouve sur  $C_1$ : donc les points communs à  $C_0$  et à la conique  $\gamma$  d'équation

$$(\gamma) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0$$

donnent les polygones impropres  $\pi_{2n}$  et sont les points de base du faisceau linéaire engendré par les coniques  $C_n$ . D'autre part, les tangentes à  $C_0$  aux points communs à  $C_0$  et  $\Gamma$  sont tangentes à  $C_1$ : ce sont donc ces points qui fournissent les solutions impropres  $\pi_{2n+1}$ .

Ceci explique pourquoi la recherche d'un trièdre trirectangle, inscrit dans un cône du second degré quelconque  $C_0$ , donne toujours quatre solutions, impropres, en prenant une génératrice isotrope  $I$  du cône, puis encore une fois cette génératrice  $I$ , puis la génératrice nouvelle  $J$  où le plan tangent à  $C_0$  le long de  $I$  coupe  $C_0$ ; les trois droites  $I, I, J$  sont deux à deux

perpendiculaires, mais ne forment pas un trièdre véritable.

Le *triangle*  $\pi_3$  fournit la relation bien connue

$$(3) \quad a + b + c = 0.$$

Le *quadrilatère* conduit à trois relations du type  $b_1 + c_1 - a_1 = 0$  ou  $\frac{1}{a} = 0$ , ce qui n'a lieu que si  $\Gamma$  *dégénère en deux droites*; cela est clair *a priori*, car dans  $A_0A_1A_2A_3$  la droite  $A_1A_3$  a pour pôles  $A_0$  et  $A_2$  simultanément, de sorte que si  $A_0$  et  $A_2$  sont distincts,  $\Gamma$  se réduit à deux droites  $\Delta$  et  $\Delta_1$  et les deux droites  $A_0A_2$ ,  $A_1A_3$  concourent au point double  $(\Delta, \Delta_1)$  et sont conjuguées par rapport à  $\Delta$  et  $\Delta_1$ . Par contre si  $\pi_4$  n'existe pas en général, bien que  $P_4$  existe, on constate que  $\pi_2$  existe, bien que  $P_2$  n'existe pas; il suffit que  $C_0$  coïncide avec  $\gamma$ , de sorte que  $a^2 = b^2 = c^2$  et la conique  $\Gamma$  est l'une des coniques

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + 1 = 0, \\ x^2 - y^2 - 1 = 0, \\ -x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{array} \right.$$

Pour le *pentagone* au lieu de partir de l'invariant compliqué

$$I_5(a_1, b_1, c_1)$$

calculé précédemment, il suffit de remarquer que dans le pentagone  $\pi_5$ ,  $A_0A_1A_2A'_2A'_1A_0$ , le côté  $A_2A'_2$  est tangent à  $C_1$ ; or la droite  $A_2A'_2$  s'obtient en menant de  $A_0$  les tangentes à la conique  $(\gamma)$  d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0,$$

de sorte que nous retrouvons ici un calcul traité au paragraphe 4 : dans l'équation (8), on remplace  $a_1, b_1, c_1$

par  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $c^2$  et l'on a ici pour équation de  $A_2A'_2$

$$(5) \quad \begin{aligned} & x(b^2 + c^2 - a^2) \cos \varphi_0 \\ & + y(c^2 + a^2 - b^2) \sin \varphi_0 = a^2 + b^2 - c^2. \end{aligned}$$

La condition de contact avec  $C_1$  fournira la condition vraie pour  $\pi_5$  et la condition parasite relative à  $\pi_3$ . On a

$$(6) \quad \begin{aligned} & (b^2 + c^2 - a^2)^2 \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \cos^2 \varphi_0 \\ & + (c^2 + a^2 - b^2)^2 \left( \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) \sin^2 \varphi_0 \\ & = (a^2 + b^2 - c^2)^2 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right). \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$(7) \quad T \equiv a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 - 2a^2b^2,$$

la condition pour que (6) soit *identique* en  $\varphi_0$  est

$$(8) \quad \begin{aligned} & (T + 4b^2c^2) \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \\ & = (T + 4c^2a^2) \left( \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) \\ & = (T + 4a^2b^2) \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \right). \end{aligned}$$

La première équation (8) donne

$$T \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) = 4ac(a+c) - 4bc(b+c)$$

ou

$$(a-b)[T - 4abc(a+b+c)] = 0.$$

Les équations (8) exigent donc

$$T = 4abc(a+b+c)$$

et en supprimant la solution parasite  $a+b+c=0$  du triangle,

$$(9) \quad (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) + 4abc = 0.$$

10. Puisque dans un polygone  $\pi_n$  chaque sommet tel que  $A_0$  est le pôle relativement à  $\Gamma$  de la diagonale  $A_1A'_1$  joignant les sommets consécutifs à  $A$ , il en résulte que l'existence d'un  $\pi_{2n}$  relatif à  $C_0$  et  $\Gamma$  revient à l'existence d'un  $P_n$  relatif à  $C_0$  et  $\gamma$ , obtenu en joignant de deux en deux les sommets de  $\pi_{2n}$ . Donc la condition

$$(10) \quad f_n(a_1, b_1, c_1) = 0,$$

relative à un  $P_n$  deviendra la condition

$$(11) \quad f_n(a^2, b^2, c^2) = 0$$

relative à un  $\pi_{2n}$ ; mais la condition (11) relative à un  $\pi_{2n}$  entraîne la condition

$$(12) \quad f_n \left[ \frac{1}{(b_1 + c_1 - a_1)^2}, \frac{1}{(c_1 + a_1 - b_1)^2}, \frac{1}{(a_1 + b_1 - c_1)^2} \right] = 0,$$

relative aux  $P_{2n}$  pour  $C_0$  et  $C_1$ . Nous avons donc retrouvé d'une façon intuitive les circonstances déjà signalées. Nous savons que si  $n$  est pair, en supposant  $f_n$  relatif à une seule série de  $P_n$ , l'équation (11) ne se décompose pas. Nous savons que si  $n$  est impair, l'équation (11) contient une solution impropre relative à un  $\pi_n$  parcouru deux fois; un facteur, propre, à conserver est alors,  $n$  étant impair,

$$f_n(a_1, a_1 - b_1, a_1 - c_1) = 0$$

ou, pour avoir un  $\pi_{2n}$  relatif à  $C_0$  et  $\Gamma$ ,

$$(13) \quad f_n \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \frac{1}{b} - \frac{1}{a}, \frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right) = 0,$$

Inversement la condition d'existence d'un  $\pi_n$  ( $C_0, \Gamma$ ) étant

$$(14) \quad \varphi_n(a, b, c) = 0,$$

on a la condition d'existence d'un  $P_n$  ( $C_0, C_1$ )

$$(15) \quad \varphi_n \left( \frac{1}{b_1 + c_1 - a_1}, \frac{1}{c_1 + a_1 - b_1}, \frac{1}{a_1 + b_1 - c_1} \right) = 0,$$

et par suite la condition d'existence d'un  $\pi_{2n} (C_0, \Gamma)$

$$(16) \quad \varphi_n \left( \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2}, \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2}, \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \right) = 0.$$

Les mêmes remarques ont lieu : si  $n$  est impair, l'équation (16) se décompose rationnellement en quatre facteurs, dont l'un, impropre, reproduit  $\varphi_n (a, b, c)$ ; mais alors les facteurs propres sont obtenus d'une façon remarquablement simple :

$$(17) \quad \begin{cases} \varphi_n(-a, b, c) = 0, \\ \varphi_n(a, -b, c) = 0, \\ \varphi_n(a, b, -c) = 0. \end{cases}$$

Si  $n$  est pair, ce procédé ne réussit plus, l'équation (16) ne se décompose pas.

Appliquons ceci à l'*hexagone* : le triangle donne  $a + b + c = 0$ . Donc l'hexagone donne

$$(18) \quad (b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) = 0.$$

Mais alors nous retrouvons un résultat obtenu comme condition des quadrilatères  $P_4$  relatifs à  $C_0$  et  $\Gamma$ ;  $C_0$  et  $\Gamma$  admettent simultanément des quadrilatères  $P_4$  et des hexagones  $\pi_6$ . Il est facile de vérifier géométriquement ce fait par la géométrie;  $C_0$  et  $\Gamma$  peuvent être réduits à deux cercles dont le second a son centre  $\omega_1$  sur  $C_0$ ; prenons un point  $A_0$  de  $C_0$  et menons une corde arbitraire  $A_1A'_1$  de  $C_0$  perpendiculaire à  $A_0\omega_1$ ; le cercle  $\omega_1$  se trouve pleinement déterminé par la condition que  $A_0$  soit pôle de  $A_1A'_1$ ; la droite  $A_0A_2$  est alors la perpendiculaire abaissée de  $A_0$  sur  $\omega_1A_1$  de sorte que les angles  $A'_1A_1\omega_1$  et  $A_2A_0\omega_1$  sont égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires, et par suite les arcs  $\omega_1A'_1$  et  $\omega_1A_2$  sont égaux; dans la chaîne  $A'_1A_0A_1A_2$  on aboutit par trois chaînons au point  $A_2$

symétrique de  $A'_1$  par rapport à la ligne des centres, donc la continuation de la chaîne par trois chaînons nouveaux reconduit de  $A_2$  en  $A'_1$  et l'hexagone  $\pi_6$  est formé; la fermeture des  $P_i$  est d'ailleurs immédiate (le lecteur fera sans peine la figure).

On peut faire ici l'application d'une propriété générale citée par Halphen : nous avons vu plus haut que l'on peut, de quatre façons différentes, trouver une conique directrice d'une transformation par polaires réciproques échangeant  $C_0$  et  $\Gamma$  : donc il existe  $\infty^1$  hexagones circonscrits à  $\Gamma$ , deux côtés consécutifs de cet hexagone étant conjugués par rapport à  $C_0$ . Cela fait donc un ensemble de *trois* propriétés géométriques distinctes réalisées par le couple  $C_0, \Gamma$  et traduites par l'*unique* relation  $b + c - a = 0$ .

Le cas de l'*octogone*  $\pi_8$  est immédiat, puisque le quadrilatère  $P_4$  donne, comme on l'a vu,

$$(b_1 + c_1 - a_1)(c_1 + a_1 - b_1)(a_1 + b_1 - c_1) = 0.$$

On a donc pour  $\pi_8$

$$(19) \quad (b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2) = 0.$$

Si nous prenons par exemple deux cercles  $C_0$  et  $\Gamma$  de rayon  $R$  et  $R_1$  respectivement, la distance des centres étant  $D$ ,

$$(C_0) \quad x^2 + y^2 - 2ax + c = 0,$$

$$(\Gamma) \quad x^2 + y^2 - 2a'x + c = 0,$$

nous écrirons entre les racines de l'équation en  $\lambda$  du faisceau  $C_0 - \lambda\Gamma = 0$  l'égalité  $\lambda_3^3 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$ ; en prenant

$$\lambda_3 = 1, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{R^2 + R_1^2 - D^2}{R_1^2}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{R^2}{R_1^2}.$$

On trouve ainsi

$$(20) \quad D^2 - R^2 = \pm DR_1 \sqrt{2}.$$

Soient donc  $O$  le centre de  $C_0$  et  $\omega_1, \omega_2$  deux points inverses l'un de l'autre par rapport à  $C_0$ ,  $\omega_1$  étant intérieur à  $C_0$  et  $T$  étant le point de contact avec  $C_0$  d'une tangente issue de  $\omega_2$ . Si l'on prend le centre de  $\Gamma$  en  $\omega_2$ , on a

$$D^2 - R^2 = \omega_2 T^2 = D \times \omega_1 \omega_2, \quad R_1 = \frac{\omega_1 \omega_2}{\sqrt{2}}.$$

Si l'on prend le centre de  $\Gamma$  en  $\omega_1$ , on a

$$-(D^2 - R^2) = \omega_1 T^2 = D \times \omega_1 \omega_2, \quad R_1 = \frac{\omega_1 \omega_2}{\sqrt{2}}.$$

Donc on peut choisir le centre de  $\Gamma$  arbitrairement soit à l'intérieur, soit à l'extérieur de  $C_0$ , le rayon de  $\Gamma$  est égal au quotient par  $\sqrt{2}$  de la distance du centre de  $\Gamma$  au pied de sa polaire.

## UN PROBLÈME DE PERCUSSIONS ;

PAR G. BOULIGAND.

1. Étudions d'abord le problème suivant :

*On considère un fil flexible, inextensible et sans masse, suspendu par une extrémité  $O$ , et le long duquel on dispose invariablement des masses ponctuelles en des points  $M_1, M_2, \dots, M_n$ . Le système est en équilibre dans sa position verticale, et l'on suppose que*

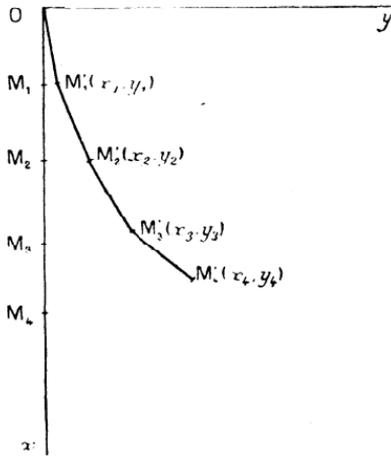
$$\overline{OM_1} = \overline{M_1 M_2} = \dots = \overline{M_{n-1} M_n}.$$

*Soient  $m_1, m_2, \dots, m_n$  les masses placées aux points en question. On fait agir simultanément sur elles des percussions horizontales et parallèles, d'intensités respectives  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . En désignant par  $l$  la longueur totale, déterminer l'état des vitesses du*

ystème, à l'instant immédiatement postérieur à la production de ces impulsions.

Nous avons fait la figure dans le cas de  $n = 4$  et nous avons pris comme axe  $Ox$  la position d'équilibre du système. Soit  $OM'_1 M'_2, \dots, M'_n$  une position vir-

Fig. 1.



tuelle quelconque : nous la déterminerons par ses angles

$$\widehat{Ox, OM'_i} = \theta_i, \quad \dots, \quad \widehat{Ox, OM'_n} = \theta_n.$$

Les coordonnées des différentes masses dans cette position seront données par des équations de la forme

$$x_i = \frac{l}{n} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \dots + \cos \theta_i),$$

$$y_i = \frac{l}{n} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2 + \dots + \sin \theta_i).$$

De là, on passe aux vitesses

$$x'_i = -\frac{l}{n} (\theta'_1 \sin \theta_1 + \theta'_2 \sin \theta_2 + \dots + \theta'_i \sin \theta_i),$$

$$y'_i = \frac{l}{n} (\theta'_1 \cos \theta_1 + \theta'_2 \cos \theta_2 + \dots + \theta'_i \cos \theta_i).$$





expression qu'on peut déduire de (1), en faisant croître  $n$  indéfiniment. On pourrait d'ailleurs l'obtenir aussi par un calcul direct, en remarquant que dans une position virtuelle, un point courant de l'arc étudié a pour coordonnées

$$x = \int_0^s \cos \theta ds, \quad y = \int_0^s \sin \theta ds.$$

On en déduit  $\frac{\partial x}{\partial t}$  et  $\frac{\partial y}{\partial t}$  : ce sont des fonctionnelles linéaires et homogènes de  $\frac{\partial \theta}{\partial t}$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = - \int_0^s \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} ds, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \int_0^s \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial t} ds.$$

Dans la position utile,  $\frac{\partial x}{\partial t}$  est nulle quel que soit  $s$ , et l'on a

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x) = \int_0^x \frac{\partial \theta}{\partial t}(x) ds.$$

On a d'ailleurs

$$2T = \int_0^l \rho(x) \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx,$$

ce qui donne la formule (4). L'expression obtenue est une fonctionnelle homogène et du second degré de  $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ , pour l'intervalle  $0 \leq x \leq l$ .

Calculons maintenant le travail virtuel correspondant à une déformation infinitésimale du fil. Pour la définir, il suffit de donner la variation  $\delta \theta$  en fonction de  $x$ . Sur l'élément  $(x, x + dx)$  agit une percussion de composantes 0 et  $\varpi(x) dx$ . La somme des travaux virtuels sera

$$\int_0^l \varpi(x) \delta y dx,$$

où l'on doit prendre

$$\delta y = \int_0^x \delta \theta ds,$$

d'où l'expression du travail percutant

$$(5) \quad \delta \mathcal{E} = \int_0^t \left[ dx \varpi(x) \int_0^x \delta \theta ds \right],$$

qui est bien, dans les conditions étudiées, la limite de (2).

Cela posé, l'intervention d'une infinité de degrés de liberté ne fait nullement obstacle à l'application de la méthode de Lagrange au problème actuel. C'est ce qu'on peut montrer en reprenant l'équation fondamentale de la dynamique des percussions

$$(6) \quad \Sigma (m \Delta x' - P_x) \delta x + \Sigma (m \Delta y' - P_y) \delta y = 0$$

applicable à tous les systèmes satisfaisant à la condition des travaux virtuels. Nous rappellerons seulement qu'un fil flexible satisfait bien à cette condition. L'équation (6) doit être vérifiée pour tous les  $\delta x$ ,  $\delta y$  compatibles avec les liaisons. Les liaisons consistent actuellement dans la condition de conservation des longueurs sur le fil. Pour l'exprimer, il est indiqué d'utiliser les valeurs  $(x, y)$  des coordonnées d'un point du fil exprimées pour chaque valeur  $s$  de l'abscisse curviligne à l'aide la fonction  $\theta(s)$ , car cette dernière, ainsi que sa variation  $\delta \theta$ , sont arbitraires. D'ailleurs, pour la position utile, nous avons  $\delta x = 0$ . L'équation (6) devient alors, en y remplaçant  $\Delta \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)$  par sa valeur  $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ ,

$$\int_0^t \left\{ \left[ \rho(x) dx \int_0^x \frac{\partial \theta}{\partial t}(s) ds - \varpi(x) dx \right] \int_0^x \delta \theta ds \right\} = 0,$$

où toute la quantité entre crochets doit être intégrée

par rapport à  $x$ . Posons

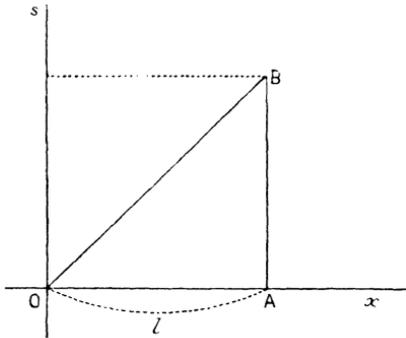
$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{\partial \theta}{\partial t}(s) ds$$

et cherchons d'abord  $\varphi(x)$ , c'est-à-dire la primitive de  $\frac{\partial \theta}{\partial t}(x)$ . Il faut écrire que l'on a

$$\int_0^l \left\{ [\rho(x)\varphi(x) - \varpi(x)] \int_0^x \delta \theta ds \right\} dx = 0,$$

quelle que soit la fonction  $\delta \theta$  dans l'intervalle  $(0, l)$ . Or, d'après la formule de Lejeune-Dirichlet relative à

Fig. 2.



une intégration dans le triangle OAB du plan  $xOs$ , la condition précédente peut s'écrire

$$\int_0^l \delta \theta ds \int_s^l [\rho(x)\varphi(x) - \varpi(x)] dx = 0,$$

elle exige que l'on ait

$$(7) \quad \int_s^l [\rho(x)\varphi(x) - \varpi(x)] dx = 0$$

quel que soit  $s$ , ou enfin que

$$\varphi(x) = \frac{\varpi(x)}{\rho(x)}.$$

On a donc finalement pour définir l'état des vitesses après la percussion

$$(7 \text{ bis}) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\pi}{\rho} \right).$$

Il est clair que la formule (7) et la formule (7 bis) pourraient s'obtenir à partir des relations (3') et (3 bis) par passage à la limite.

Cet exemple se rattache à une théorie générale : extension des méthodes de la dynamique analytique aux systèmes comportant une infinité de degrés de liberté. Dans le cas où ces degrés sont en nombre fini, un problème de percussions conduit à la résolution d'un système d'équations linéaires, en nombre égal à celui des paramètres indépendants. Dans le cas d'une infinité de degrés de liberté, on pourra obtenir des équations intégrales linéaires (1) : ici, ces équations sont particulièrement simples et susceptibles d'une résolution immédiate.

## SUR UN POINT DE LA THÉORIE DES COMPLEXES DE DROITES ;

PAR E. LAINÉ.

Nous représenterons une droite quelconque par les équations

$$\begin{aligned} x &= az + f, \\ y &= bz + g, \end{aligned}$$

(1) On doit supposer que les masses sont réparties sur un ensemble continu pour obtenir des équations intégrales : le raisonnement serait à reprendre par exemple si les masses étaient réparties, le long de la position verticale du fil, sur un ensemble parfait discontinu. Il faut alors utiliser l'intégrale de Stieltjes.

et nous prendrons, suivant les notations de M. Vesiot<sup>(1)</sup>, l'équation du complexe sous la forme

$$(1) \quad g = \psi(a, b, f).$$

De plus nous choisirons comme paramètre sur une courbe quelconque du complexe la variable  $z$ . En désignant par des accents les dérivées par rapport à  $z$ , on aura donc

$$a = x', \quad b = y', \quad f = x - x'z, \quad g = y - y'z,$$

et l'équation des courbes du complexe s'écrira

$$(2) \quad y - y'z - \psi(x', y', x - x'z) = 0.$$

Les coefficients directeurs de la binormale seront égaux à

$$-1, \quad \frac{x''}{y''}, \quad x' - y' \frac{x''}{y''}.$$

En dérivant l'équation (2) par rapport à  $z$ , on aura d'ailleurs

$$\frac{x''}{y''} = \frac{z + \psi_{y'}}{z\psi_f - \psi_x},$$

ce qui montre que le rapport  $\frac{x''}{y''}$  ne dépend que des éléments du premier ordre. Si donc deux courbes du complexe ont en commun un élément du premier ordre, elles ont aussi en ce point même plan osculateur : c'est, comme il est bien connu, le plan tangent au cône du complexe associé à ce point, le long de la tangente commune aux deux courbes.

Après avoir établi ce résultat, Sophus Lie, voulant généraliser une propriété des complexes linéaires, a ensuite tenté de démontrer<sup>(2)</sup> que deux courbes du

(1) *Leçons de Géométrie supérieure*, p. 261.

(2) Cf. *Geometrie der Berührungstransformationen*, p. 310.

complexe, qui ont en commun un élément du premier ordre, ont aussi même torsion au point correspondant. Mais sa démonstration, qui repose sur la dérivation de certaines relations non identiquement vérifiées, est manifestement inexacte. Nous appellerons, pour simplifier, « propriété de Lie » la propriété d'égalité des torsions, et nous allons chercher à déterminer tous les complexes qui possèdent la propriété de Lie.

Nous poserons

$$\frac{x''}{y''} = \frac{z + \psi_{y'}}{z\psi_f - \psi_{x'}} = u.$$

Soient d'autre part ( $\alpha''$ ,  $\beta''$ ,  $\gamma''$ ) les cosinus directeurs de la binormale,  $\frac{d\tau}{ds}$  la torsion, d'une courbe du complexe. On aura, en désignant par  $\rho$  un coefficient de proportionnalité,

$$\begin{aligned} \alpha'' &= -\rho, & \beta'' &= \rho u, & \gamma'' &= \rho(x' - u y'), \\ d\tau^2 &= dx''^2 + d\beta''^2 + d\gamma''^2, \end{aligned}$$

et l'on en déduit, après quelques simplifications aisées,

$$\frac{d\tau^2}{ds^2} = \rho^4 u'^2.$$

Donc, pour que la torsion soit indépendante des éléments du second ordre, il faut et il suffit qu'il en soit de même de  $u'$ , ou encore de  $\frac{u'}{u}$ . Or on a

$$\frac{u'}{u} = \frac{1 + x''(\psi_{x'y'} - z\psi_{y'f}) + y''\psi_{y'y'}}{z + \psi_{y'}} - \frac{\psi_f + z[x''(\psi_{x'y'} - z\psi_{y'f}) + y''\psi_{y'y'}] - x''(\psi_{x'x'} - z\psi_{x'f}) - y''\psi_{x'y'}}{z\psi_f - \psi_{x'}}.$$

Si l'on remplace  $x''$  par  $y'' \frac{z + \psi_{y'}}{z\psi_f - \psi_{x'}}$ , on aura

$$\frac{u'}{u} = \theta_1 + y''\theta_2,$$

$\Theta_1$  et  $\Theta_2$  ne dépendant que des éléments du premier ordre. D'ailleurs

$$\Theta_2 = \frac{(z + \psi_{y'}) (\psi_{x'x'} - 2z \psi_{x'f} + z^2 \psi_{ff})}{(z \psi_f - \psi_{x'})^2} + 2 \frac{\psi_{x'y'} - z \psi_{y'f}}{z \psi_f - \psi_{x'}} + \frac{\psi_{y'y'}}{z + \psi_{y'}}.$$

En chassant les dénominateurs, on obtient finalement l'équation

$$(3) \quad (z \psi_f - \psi_{x'})^2 \psi_{y'y'} + 2(z \psi_f - \psi_{x'}) (z + \psi_{y'}) (\psi_{x'y'} - z \psi_{y'f}) + (z + \psi_{y'})^2 (\psi_{x'x'} - 2z \psi_{x'f} + z^2 \psi_{ff}) = 0.$$

Telle est la condition nécessaire et suffisante pour que le complexe défini par l'équation (1) possède la propriété de Lie. Cette équation doit être vérifiée quand on tient compte de l'équation (2), donc identiquement puisqu'elle ne contient pas  $\gamma$ .

Observons que l'équation (3) est satisfaite pour tout élément du premier ordre appartenant à la surface des singularités (1); mais il est clair que, pour un pareil élément, les calculs qui ont conduit à l'équation (3) deviennent illusoires.

Nous allons maintenant déterminer les fonctions  $\psi$  qui satisfont à l'équation (3). On peut évidemment considérer, dans cette équation, les variables  $x'$ ,  $y'$ ,  $z$  et  $f = x - x'z$  comme autant de variables indépendantes. Le premier membre de l'équation (3) étant un polynôme en  $z$ , tous les coefficients de ce polynôme doivent être nuls; or il existe un seul terme en  $z^4$ , de coefficient  $\psi_{ff}$ : on aura donc, en revenant aux variables  $a$ ,  $b$ ,  $f$ ,

$$\psi = A(a, b) + fB(a, b),$$

---

(1) Cf. VESSIOT, *Leçons*, p. 263.

A et B désignant deux fonctions inconnues. En tenant compte de cette valeur de  $\psi$ , on voit que le premier membre de l'équation (3) est un polynome en  $f$  et  $z$ , et en égalant à zéro les coefficients de ce polynome, on obtient un système d'équations aux dérivées partielles auquel devront satisfaire les fonctions A et B. Ce système se réduit à quatre équations distinctes, savoir

$$(4) \quad B \frac{\partial B}{\partial b} + \frac{\partial B}{\partial a} = 0,$$

$$(5) \quad B^2 \frac{\partial^2 A}{\partial b^2} + 2B \frac{\partial^2 A}{\partial a \partial b} + \frac{\partial^2 A}{\partial a^2} + 2 \left( \frac{\partial B}{\partial b} \frac{\partial A}{\partial a} - \frac{\partial B}{\partial a} \frac{\partial A}{\partial b} \right) = 0,$$

$$(6) \quad -B \frac{\partial A}{\partial a} \frac{\partial^2 A}{\partial b^2} + \left( B \frac{\partial A}{\partial b} - \frac{\partial A}{\partial a} \right) \frac{\partial^2 A}{\partial a \partial b} \\ + \frac{\partial A}{\partial b} \frac{\partial^2 A}{\partial a^2} + \frac{\partial A}{\partial b} \left( \frac{\partial B}{\partial b} \frac{\partial A}{\partial a} - \frac{\partial B}{\partial a} \frac{\partial A}{\partial b} \right) = 0,$$

$$(7) \quad \left( \frac{\partial A}{\partial a} \right)^2 \frac{\partial^2 A}{\partial b^2} - 2 \frac{\partial A}{\partial a} \frac{\partial A}{\partial b} \frac{\partial^2 A}{\partial a \partial b} + \left( \frac{\partial A}{\partial b} \right)^2 \frac{\partial^2 A}{\partial a^2} = 0.$$

Posons

$$B \frac{\partial A}{\partial b} + \frac{\partial A}{\partial a} = U(a, b);$$

il viendra successivement

$$\frac{\partial U}{\partial a} = B \frac{\partial^2 A}{\partial a \partial b} + \frac{\partial^2 A}{\partial a^2} + \frac{\partial B}{\partial a} \frac{\partial A}{\partial b},$$

$$\frac{\partial U}{\partial b} = B \frac{\partial^2 A}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial a \partial b} + \frac{\partial B}{\partial b} \frac{\partial A}{\partial b};$$

d'où résulte, compte tenu de (4),

$$B^2 \frac{\partial^2 A}{\partial b^2} + 2B \frac{\partial^2 A}{\partial a \partial b} + \frac{\partial^2 A}{\partial a^2} = \frac{\partial U}{\partial a} + B \frac{\partial U}{\partial b}.$$

Les équations (5) et (6) peuvent alors s'écrire

$$(5) \quad \frac{\partial U}{\partial a} + B \frac{\partial U}{\partial b} + 2 \left( \frac{\partial B}{\partial b} \frac{\partial A}{\partial a} - \frac{\partial B}{\partial a} \frac{\partial A}{\partial b} \right) = 0,$$

$$(6) \quad \frac{\partial A}{\partial b} \frac{\partial U}{\partial a} - \frac{\partial A}{\partial a} \frac{\partial U}{\partial b} + 2 \frac{\partial A}{\partial b} \left( \frac{\partial B}{\partial b} \frac{\partial A}{\partial a} - \frac{\partial B}{\partial a} \frac{\partial A}{\partial b} \right) = 0.$$

Multiplions (5)' par  $-\frac{\partial A}{\partial b}$  et ajoutons à (6)'; il reste simplement

$$-U \frac{\partial U}{\partial b} = 0,$$

d'où

$$U = 2\theta(\alpha),$$

$\theta$  désignant une nouvelle fonction inconnue : cette dernière équation, jointe à

$$(8) \quad \frac{\partial B}{\partial a} \frac{\partial A}{\partial b} - \frac{\partial B}{\partial b} \frac{\partial A}{\partial a} = \theta'(\alpha),$$

est donc équivalente aux équations (5)' et (6)'.

Considérons maintenant le système

$$(9) \quad B \frac{\partial A}{\partial b} + \frac{\partial A}{\partial a} = 2\theta(\alpha),$$

$$(4) \quad B \frac{\partial B}{\partial b} + \frac{\partial B}{\partial a} = 0;$$

on en tire

$$\frac{\partial B}{\partial a} \frac{\partial A}{\partial b} - \frac{\partial B}{\partial b} \frac{\partial A}{\partial a} = -2 \frac{\partial B}{\partial b} \theta(\alpha),$$

et par suite, d'après (8),

$$(10) \quad -2 \frac{\partial B}{\partial b} = \frac{\theta'(\alpha)}{\theta(\alpha)}.$$

D'autre part, on tire de (4)

$$\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial a} = - \frac{\partial B}{\partial b} = \frac{1}{2} \frac{\theta'(\alpha)}{\theta(\alpha)};$$

on aura donc

$$B = \psi(b) [\theta(\alpha)]^{\frac{1}{2}}.$$

Or l'équation (10) montre que  $\psi$  doit être une fonction linéaire de  $b$ ; si l'on pose

$$\psi(b) = \alpha b + \beta,$$

on aura successivement

$$\alpha \theta^2 = -\frac{1}{2} \frac{\theta'}{\theta},$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} \theta^{-\frac{3}{2}} \theta',$$

$$\theta^{-\frac{1}{2}} = \alpha a + \gamma$$

et enfin

$$\theta = \frac{1}{(\alpha a + \gamma)^2},$$

$$(11) \quad B = \frac{\alpha b + \beta}{\alpha a + \gamma}.$$

Nous supposons d'abord  $\alpha \neq 0$ . Alors l'équation (6) s'écrit

$$\frac{\alpha b + \beta}{\alpha a + \gamma} \frac{\partial A}{\partial b} + \frac{\partial A}{\partial a} = \frac{2}{(\alpha a + \gamma)^2};$$

d'où l'on tire

$$(12) \quad A = -\frac{2}{\alpha(\alpha a + \gamma)} + \varphi \left( \frac{\alpha b + \beta}{\alpha a + \gamma} \right),$$

$\varphi$  désignant une fonction à déterminer. Les valeurs (11) et (12) de B et A satisfont aux équations (4), (5) et (6); portons-les dans l'équation (7) : cette équation s'écrira, toutes réductions faites,

$$\varphi'' = 0.$$

On peut donc écrire, en posant  $\frac{\beta}{\alpha} = \beta_1$ ,  $\frac{\gamma}{\alpha} = \gamma_1$ , et désignant par  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  trois autres constantes arbitraires,

$$A = \frac{\lambda a + \mu b + \nu}{a + \gamma_1}, \quad B = \frac{b + \beta_1}{a + \gamma_1};$$

l'équation (1) s'écrit alors

$$ag - bf - \beta_1 f + \gamma_1 g - \lambda a - \mu b - \nu = 0.$$

C'est l'équation du complexe linéaire le plus général (non spécial).

Supposons en second lieu  $\alpha = 0$ . Alors la fonction **B** se réduit à une constante,  $\lambda$ , ainsi que la fonction  $\theta(\alpha)$ , et l'équation (9) prend la forme

$$\lambda \frac{\partial A}{\partial b} + \frac{\partial A}{\partial a} = \mu,$$

$\mu$  désignant une constante arbitraire. On en déduit

$$A = \mu a + \varpi(b - \lambda a),$$

et pour déterminer la fonction inconnue  $\varpi$ , il suffit de remplacer **A** par sa valeur dans l'équation (7) : elle s'écrit alors, toutes réductions faites,

$$\mu^2 \varpi'' = 0.$$

On devra donc avoir :

Ou bien  $\varpi'' = 0$ , et alors on retrouve des complexes linéaires;

Ou bien  $\mu = 0$ , la fonction  $\varpi$  restant arbitraire. Les complexes correspondants sont définis par une équation de la forme

$$(13) \quad g - \lambda f = \varpi(b - \lambda a).$$

Ce sont des complexes spéciaux, formés des tangentes à un cylindre arbitrairement choisi. Les courbes de ces complexes sont définies par l'équation différentielle

$$y - zy' - \lambda(x - zx') = \varpi(y' - \lambda x'),$$

d'où l'on tire

$$(y'' - \lambda x'')(z + \varpi') = 0.$$

Ainsi, en dehors des courbes tracées arbitrairement sur le cylindre (qui est ici la surface des singularités), les courbes du complexe vérifient l'équation

$$y'' - \lambda x'' = 0,$$

d'où

$$y - \lambda x + \mu z + v = 0 :$$

ce sont des courbes planes, tracées dans les plans tangents au cylindre. Le calcul précédent montre d'ailleurs inversement que les seuls complexes dont les courbes soient planes sont définis par l'équation (13).

En résumé, pour qu'un complexe non spécial possède la propriété de Lie, il faut et il suffit qu'il soit linéaire. Cette propriété appartient en outre aux seuls complexes spéciaux formés des tangentes à un cylindre arbitraire.

*Remarque.* — Si l'équation du complexe ne contient ni  $f$ , ni  $g$ , on constate très facilement que le théorème précédent lui est encore applicable.

[M<sup>2</sup>4iδ]

**DÉMONSTRATIONS ÉLÉMENTAIRES  
DE PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DU TORE ;**

PAR RAOUL BRICARD.

1. Le tore jouit des propriétés suivantes :

I. THÉORÈME DE VILLARCEAU. — *Tout plan bitangent au tore le coupe suivant deux cercles (cercles de Villarceau).*

II. THÉORÈME DE SCHOELCHER (1). — *Les cercles de Villarceau coupent sous le même angle tous les*

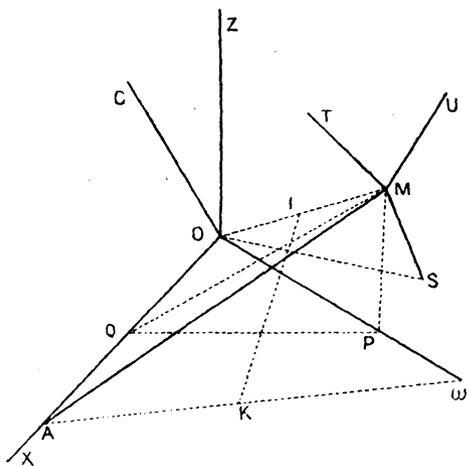
(1) Voir l'article de A. MANNHEIM, *Sur le théorème de Schœlcher* (N. A., 1903, p. 105).

parallèles (et par conséquent aussi tous les méridiens) du tore.

III. L'ellipse, projection d'un cercle de Villarceau sur le plan équatorial du tore, a pour l'un de ses foyers le pied de l'axe de la surface sur ce plan.

Vu l'intérêt de ces théorèmes connus, il m'a paru désirable d'en posséder des démonstrations aussi élémentaires que possible. Celles-ci ont ce caractère et sont peut-être nouvelles.

2. Je désigne, dans ce qui suit, par R le rayon du cercle méridien du tore et par D la distance à l'axe du centre de ce cercle.



Un plan bitangent au tore fait avec le plan équatorial un angle  $\theta$  tel que

$$\sin \theta = \frac{R}{D}.$$

Soient (voir figure) OZ l'axe du tore; OX la trace d'un

plan bitangent sur le plan équatorial;  $O\omega$  la trace sur le même plan d'un plan méridien quelconque du tore;  $\omega$  le centre de l'un des cercles méridiens contenus dans ce plan;  $M$  l'un des points où le plan bitangent coupe le cercle méridien. On a

$$O\omega = D, \quad \omega M = R.$$

Soient encore  $P$  la projection de  $M$  sur  $O\omega$ ;  $Q$  celle de  $P$  sur  $OX$ ;  $S$  celle de  $O$  sur  $\omega M$ . L'angle  $\theta$  se retrouve en  $\widehat{PQM}$ . On a donc

$$\sin \widehat{PQM} = \frac{PM}{QM} = \frac{\omega M}{O\omega}.$$

D'autre part, en évaluant de deux manières différentes l'aire du triangle  $O\omega M$ , on a

$$SO \cdot \omega M = PM \cdot O\omega$$

ou

$$\frac{\omega M}{O\omega} = \frac{PM}{SO}.$$

Donc

$$\frac{PM}{QM} = \frac{PM}{SO} \quad \text{et} \quad QM = SO.$$

Les deux triangles rectangles  $OQM$ ,  $MSO$  sont égaux, et l'on a

$$OQ = MS.$$

Marquons maintenant sur  $OX$  un point  $A$  tel que  $OA = R$ , et cela de telle manière que les points  $O$ ,  $Q$ ,  $A$  aient la même disposition que les points  $M$ ,  $S$ ,  $\omega$ . On a  $QA = S\omega$ . Par conséquent, les deux triangles rectangles  $AQM$ ,  $\omega SO$  sont égaux, ce qui donne

$$MA = O\omega = D.$$

Il résulte de là que le point  $M$  décrit, quand on fait

varier le plan méridien  $OZ\omega$ , un cercle de centre  $A$  et de rayon  $D$ . Si l'on remplace le point  $M$  par le second point de rencontre du plan bitangent avec le cercle méridien considéré, on trouve pour lieu un cercle égal au premier, ayant pour centre le point symétrique de  $A$  par rapport à  $O$ .

Le théorème I est donc démontré.

3. Le quadrilatère gauche  $OAM\omega$  est un *isogramme* <sup>(1)</sup>, c'est-à-dire qu'il a ses côtés opposés égaux deux à deux. Il possède un axe de symétrie, qui est la droite joignant le milieu  $I$  de  $OM$  au milieu  $K$  de  $A\omega$  : en effet de l'égalité des triangles  $OAM$ ,  $M\omega O$ , il résulte que l'on a  $AI = \omega I$ . Par conséquent  $KI$  est une médiatrice de  $A\omega$ ; c'est de même une médiatrice de  $OM$ , donc, etc.

Cela posé, considérons l'angle sous lequel se coupent en  $M$  le cercle de Villarceau et le parallèle du tore. La tangente au cercle de Villarceau est  $MT$ , perpendiculaire à  $AM$  dans le plan  $AMO$ ; la tangente au parallèle est  $MU$ , perpendiculaire au plan  $OM\omega$ . Considérons les symétriques de ces droites par rapport à  $IK$ . La symétrique de  $MT$  est la perpendiculaire à  $\omega O$  dans le plan  $\omega OM$  : c'est donc  $OZ$ . La symétrique de  $MU$  est la perpendiculaire  $OC$  élevée en  $O$  au plan  $MOA$ . On a donc

$$\widehat{TMU} = \widehat{ZOC} = \theta.$$

Ainsi, les cercles de Villarceau et les parallèles se coupent sous l'angle constant  $\theta$ . C'est le théorème II.

4. La projection du cercle de Villarceau sur le plan

---

(1) Ce terme est de M. T. Bennett (voir plus loin).

équatorial du tore est une ellipse ayant le point A pour centre et la droite AX pour grand axe. Les longueurs  $a$  et  $b$  du demi-grand axe et du demi-petit axe de cette ellipse sont données par

$$a = D, \quad b = D \cos \theta,$$

d'où, avec la notation ordinaire,

$$c = D \sin \theta = R.$$

Par conséquent l'ellipse a bien un foyer en O (théorème III).

5. Imaginons que le point M décrive le cercle de Villarceau avec une vitesse constante. Ce mouvement peut encore être obtenu en faisant tourner le plan  $OZ\omega$  autour de l'axe  $OZ$ , en même temps que le point M décrit le méridien contenu dans le plan. Il résulte de l'égalité des angles  $\widehat{OAM}$ ,  $\widehat{M\omega O}$  que la vitesse de ce mouvement relatif est constante aussi.

6. Appelons *dièdres de l'isogramme* les quatre dièdres dont chacun a pour arête un côté de l'isogramme, ses faces passant par les deux sommets non situés sur le côté considéré de l'isogramme. Les dièdres d'arêtes  $O\omega$  et  $MA$  sont égaux à  $\frac{\pi}{2}$ , les dièdres d'arêtes  $OA$  et  $\omega M$  sont égaux à  $\theta$ . Ils sont donc tous constants, et l'on se trouve en présence d'un cas particulier du théorème sur lequel est fondé le mécanisme si remarquable de M. Bennett (1) : *un isogramme peut être déformé, les longueurs de ses côtés et les grandeurs de ses dièdres étant conservées.*

---

(1) Voir M. D'OCAGNE, *Cours de Géométrie*, t. II, p. 55. — R. BRICARD, *Cinématique et mécanismes*, p. 159.

Dans le cas général, aucun dièdre de l'isogramme n'est droit, et le mécanisme se rattache au théorème suivant, qui contient celui de Villarceau comme cas particulier (et qui est également connu) : *la surface de révolution, lieu d'un cercle C tournant autour d'un axe quelconque, contient encore des cercles autres que les parallèles, les cercles C et les symétriques de ces derniers par rapport aux divers plans passant par l'axe de la surface.*

## CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

### Alger.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. Question de cours. *Maximum et minimum d'une fonction de deux variables indépendantes. Étude détaillée du cas douteux.*

Application : *Distance d'un point à une surface.*

II. Problème : 1° *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$q^2y + px - y = 0;$$

2° *Équations des courbes caractéristiques (Relations entre  $x, y, z$ );*

3° *Déterminer la surface intégrale passant par la courbe :*

$$y = x^2 + 1,$$

$$z = x^2 - 1;$$

4° *Cette surface a pour équation*

$$z = y \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

*Équations des lignes asymptotiques de cette surface;*

5° *Former l'équation donnant la direction des lignes de courbure (on n'intégrera pas).*

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — 1° On a à intégrer le système

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{2qy} = \frac{dz}{2y - px} = \frac{-dp}{p} = \frac{-dq}{q^2 - 1};$$

on a les intégrales immédiates

$$\begin{aligned} (1) \quad & px = p_0 x_0, \\ (2) \quad & y(q^2 - 1) = y_0(q_0^2 - 1), \\ (3) \quad & x^2 \frac{q-1}{q+1} = x_0^2 \frac{q_0-1}{q_0+1}. \end{aligned}$$

En substituant  $y$  et  $px = p_0 x_0$  dans les troisième et cinquième rapports, il vient

$$\frac{dz}{p_0 x_0} = \frac{q^2 + 1}{(q^2 - 1)^2} dq;$$

d'où

$$(4) \quad z - z_0 = p_0 x_0 \left[ \frac{q}{1 - q^2} - \frac{q_0}{1 - q_0^2} \right].$$

2° En éliminant  $p, q$  entre (1), (2), (3), (4), on a les équations des courbes caractéristiques.

En posant pour abrégé

$$\lambda = \frac{x_0^2}{x^2} \cdot \frac{q_0 - 1}{q_0 + 1},$$

on obtient

$$z - z_0 = p_0 x_0 \left[ \frac{\lambda^2 - 1}{4\lambda} - \frac{q_0}{1 - q_0^2} \right],$$

$$4\lambda y = y_0(q_0^2 - 1).$$

3° Pour déterminer la surface qui passe par la courbe, on pose

$$\begin{aligned} x_0 &= u, \\ y_0 &= 1 + u^2, \\ z_0 &= u^2 - 1; \end{aligned}$$

$p_0$  et  $q_0$  seront déterminés par

$$\begin{aligned} (q_0^2 - 1)y_0 + p_0 x_0 &= 0, \\ p_0 + 2q_0 u - 2u &= 0. \end{aligned}$$

Une solution évidente est :

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad q_0 &= 1, & p_0 &= 0; \\ p &= 0, & q &= 1. \end{aligned}$$

On a une première surface

$$y - z = 2.$$

La solution intéressante est

$$q_0 = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}, \quad p_0 = \frac{4u}{u^2 + 1}.$$

On en déduit

$$\lambda = -\frac{1}{x^2}.$$

Les équations des courbes caractéristiques deviennent

$$\begin{aligned} z + y \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} &= 0, \\ \frac{4\lambda y}{(1 - \lambda)^2} &= \frac{-4u^2}{u^2 + 1}; \end{aligned}$$

d'où

$$z = y \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

4° L'équation des lignes asymptotiques est

$$2x \, dy \, dx + y \, dx^2 \frac{1 - 3x^2}{1 + x^2} = 0,$$

et

$$\frac{dy}{y} + \frac{1 - 3x^2}{2x(x^2 + 1)} \, dx = 0;$$

d'où

$$x^2 y = c'(1 + x^2)^2.$$

5° Lignes de courbure :

$$\frac{dx + p \, dz}{dp} = \frac{dy + q \, dz}{dq}$$

ou

$$\begin{aligned} [(1 + p^2)s - pqr] \, dx^2 + [t(1 + p^2) - r(1 + q^2)] \, dx \, dy \\ + [pqt - s(1 + q^2)] \, dy^2 = 0. \end{aligned}$$

Pour le cas actuel,

$$p = \frac{4xy}{(x^2+1)^2}, \quad q = \frac{x^2-1}{x^2+1},$$

$$r = 4y \frac{1-3x^2}{(x^2+1)^3}, \quad s = \frac{4x}{(x^2+1)^2}, \quad t = 0.$$

On trouve

$$[(x^2+1)^4 + 4y^2(1+3x^4)] dx^2 - 4xy(1-3x^2)(x^2+1) dx dy - 4x^2(1+x^2)^2 dy^2 = 0.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. On donne les paraboloides

$$\frac{x^2}{3} + y^2 - 2z = 0,$$

$$\frac{2x^2}{3} + 3y^2 + 2z - 4 = 0.$$

1° Volume compris entre ces deux surfaces et les plans  $xOz$ ,  $yOz$ .

2° Centre de gravité de ce volume.

II: On considère l'intégrale

$$\int \frac{dz}{(z+2)\sqrt[5]{z^3(1-z)^2}}.$$

1° Calculer cette intégrale le long d'un cercle de centre origine, de rayon supérieur à 2.

2° Le long d'une couronne circulaire de centre O (un cercle de rayon supérieur à 2, le petit cercle de rayon compris entre 1 et 2).

3° Calculer l'intégrale réelle

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+2)\sqrt[5]{x^3(1-x)^2}}.$$

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. Les deux paraboloides se coupent suivant une courbe qui se projette sur  $xOy$  suivant l'ellipse

$$x^2 + 4y^2 = 4.$$

On a

$$2(z_1 - z_2) = 4 - x^2 - 4y^2.$$

( 317 )

Si l'on pose

$$x = 2r \cos \theta,$$

$$y = r \sin \theta,$$

on aura

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < r < 1,$$

$$J_{xy}^{\theta} = 2r,$$

$$V = \iint (z_1 - z_2) dx dy = \iint 4r(1 - r^2) dr d\theta,$$

$$V = \frac{\pi}{2},$$

$$V\xi = \iint (z_1 - z_2) x dx dy = \iint 4r(1 - r^2) 2r \cos \theta dr d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_0^1 8r^2(1 - r^2) dr = \frac{16}{15};$$

d'où

$$\xi = \frac{32}{15\pi},$$

$$V\eta = \iint 4r(1 - r^2) r \sin \theta dr d\theta = \frac{8}{15},$$

$$\eta = \frac{16}{15\pi},$$

$$V\zeta = \iiint z dx dy dz = \iint \frac{z_1^2 - z_2^2}{2} dx dy;$$

or

$$z_1^2 - z_2^2 = (1 - r^2) \left[ 4 - \frac{4r^2}{3} \cos \theta - 2r^2 \sin^2 \theta \right],$$

$$\frac{z_1^2 - z_2^2}{2} = (1 - r^2) \left( 2 - \frac{5r^2}{6} + \frac{r^2 \cos 2\theta}{6} \right),$$

$$V\zeta = \iint 2r(1 - r^2) \left[ 2 - \frac{5r^2}{6} + \frac{r^2 \cos 2\theta}{6} \right] dr d\theta,$$

c'est-à-dire simplement

$$V\zeta = \iint 2r(1 - r^2) \left( 2 - \frac{5r^2}{6} \right) dr d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 2r(1 - r^2) \left( 2 - \frac{5r^2}{6} \right) dr = \frac{\pi}{2} \times \frac{13}{36};$$

d'où

$$\zeta = \frac{13}{36}.$$

II. 1° En prenant pour coupure la demi-droite  $0 \leq x < +\infty$ ,  
posant pour un point quelconque M,

$$z = re^{i\varphi}, \quad z - 1 = r'e^{i\varphi'}$$

avec

$$0 < \varphi < 2\pi, \quad 0 < \varphi' < 2\pi,$$

je précise les radicaux de la façon suivante :

$$\begin{aligned} z^{\frac{3}{5}} &= r^{\frac{3}{5}} e^{\frac{3}{5}i\varphi}, \\ (1-z)^{\frac{2}{5}} &= r'^{\frac{2}{5}} e^{\frac{2}{5}i(\varphi' - \pi)}. \end{aligned}$$

De sorte que pour un point compris entre 0 et 1 ( $\varphi = 0, \varphi' = \pi$ ),  
le radical soit réel.

Chacune des déterminations de radical est monodrome  
quand on tourne à la fois autour des deux branchements 0, 1.  
A l'extérieur du cercle de rayon supérieur à 2, il n'y a pas de  
point critique. L'intégrale a la même valeur quel que soit le  
rayon du centre. Comme  $zf(z) \rightarrow 0$  quand  $|z|$  augmente indé-  
finiment,

$$\int_C = 0.$$

2° Entre les deux cercles  $C(r > 2)$ ,  $c(1 < r < 2)$ , il  
n'y a que le pôle simple  $z = -2$ .

Donc

$$\int_{C'} + \int_c = 2\pi i R,$$

R étant le résidu relatif à ce pôle,

$$R = \lim_{z \rightarrow -2} (z + 2)f(z) = \frac{1}{\sqrt[5]{z^3(1-z)^2}}.$$

Pour ce point  $z = -2$ , on a

$$\begin{aligned} r &= 2, & r' &= 3, \\ \varphi &= \pi, & \varphi' &= \pi. \end{aligned}$$

En appliquant les formules déterminant le radical on a  
donc

$$\sqrt[5]{z^3(1-z)^2} = 2^{\frac{3}{5}} 3^{\frac{2}{5}} e^{\frac{3}{5}i\pi};$$

d'où

$$\int_{c'} = -2\pi i 2^{-\frac{3}{5}} 3^{-\frac{2}{5}} e^{-\frac{3}{5}i\pi}.$$

3° Intégrons le long du contour formé de  $c$  et d'une coupure le long de l'axe réel positif, — contour à l'intérieur duquel il n'y a pas de point critique. Les intégrales suivant les petites circonférences entourant les points 0 et 1 tendent vers zéro. Il reste seulement

$$\int_0^1 (\text{bord sup.}) + \int_1^r (\text{bord sup.}) + \int_r^1 (\text{bord inf.}) + \int_1^0 (\text{bord inf.}) + \int_c = 0;$$

or

$$\int_1^r + \int_r^1 = 0.$$

D'autre part, en un point de 0,1, bord supérieur,

$$\varphi = 0,$$

$$\varphi' = \pi,$$

et sur le bord inférieur :

$$\varphi = 2\pi,$$

$$\varphi' = \pi.$$

En deux points vis-à-vis le radical se retrouve multiplié par  $e^{\frac{3}{5}2i\pi}$ .

Donc

$$\int_1^0 (\text{inf.}) = - \int_0^1 (\text{sup.}) \times e^{-\frac{3}{5}2i\pi},$$

d'où l'égalité finale

$$\int_0^1 (1 - e^{-\frac{3}{5}2i\pi}) = - \int_{c'} = 2\pi i 2^{-\frac{3}{5}} 3^{\frac{2}{5}} e^{\frac{3}{5}i\pi}$$

ou

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+2)\sqrt[5]{x^3(1-x)^2}} = \frac{\pi}{\sqrt[5]{72}} \times \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{5}}.$$

(Alger, juin 1924.)

## BIBLIOGRAPHIE.

LECTURES DE MÉCANIQUE (La Mécanique enseignée par les auteurs originaux), par *M. E. Jouguet*. 2 vol. in-8 (25 × 26) avec 14 notes et additions. I<sup>re</sup> Partie : La naissance de la Mécanique, VIII-206 pages et 85 figures, 15<sup>fr</sup>. II<sup>e</sup> Partie : L'organisation de la Mécanique, VIII-284 pages et 31 figures, 20<sup>fr</sup>. Paris, Gauthier-Villars, 1924.

L'Ouvrage de M. Jouguet, dont la première édition parut en 1908, est certainement connu, et apprécié, de nombre de nos lecteurs. Ces *Lectures de Mécanique*, d'une conception fort originale, réalisent une attachante *histoire de l'élaboration des Principes*, histoire *par les textes*, judicieusement choisis et commentés. Une telle étude, très objective, éclaire singulièrement les formes actuelles de la science et les volumes de M. Jouguet peuvent être recommandés à tous les étudiants.

Ceux que l'histoire des sciences intéresse y trouveront la meilleure des *initiations*. Les œuvres des anciens Maîtres sont d'un intérêt souvent très inégal. Il faut quelque expérience pour les apprécier en dégageant la portée générale des méthodes. Le lecteur apprendra à le faire en suivant ici, sur d'importantes citations des grands classiques, le développement des concepts fondamentaux de la Mécanique.

Le nouveau tirage des *Lectures de Mécanique* comporte de nombreuses additions : signalons en particulier la Note où, d'après les *Études sur Léonard de Vinci* de P. Duhem, l'auteur expose les doctrines de l'école parisienne du XIV<sup>e</sup> siècle et analyse leur influence sur les savants de la Renaissance. Dans l'une des Notes qu'il a ajoutées à sa première rédaction, M. Jouguet nous fait espérer, comme suite au présent Ouvrage, une histoire de la Mécanique des corps déformables et de la thermodynamique : tous les lecteurs en souhaiteront la prompte réalisation.

J. P.

---



---

**SUR LES SINGULARITÉS D'UN PASSAGE A LA LIMITE  
EFFECTUÉ DANS LA SOLUTION D'UNE ÉQUATION  
AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ;**

PAR MAURICE ROY,  
Ingénieur au Cops des Mines.

---

Un liquide visqueux continu et indéfini repose sans mouvement sur un plan horizontal  $z = 0$ .

A l'instant  $t = 0$ , on applique en chaque point du fluide une force constante, de grandeur  $k$  par unité de masse, parallèle à l'axe des  $x$  <sup>(1)</sup>.

Le mouvement d'un point quelconque est défini, à chaque instant, par sa vitesse  $u$  parallèle à  $Ox$ . Celle-ci ne dépend que de  $z$  et de  $t$  et vérifie l'équation aux dérivées partielles du type parabolique

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = k + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

où  $\nu$  désigne le coefficient de viscosité cinématique du liquide.

On suppose que le liquide adhère à tout instant au plan  $z = 0$ ,

$$(2) \quad u(z, t) = 0 \quad \text{pour} \quad z = 0, \quad t \geq 0.$$

D'autre part, à l'instant initial  $t = 0$ , le fluide est en repos,

$$(3) \quad u(z, t) = 0 \quad \text{pour} \quad z \geq 0, \quad t = 0.$$


---

(1) Ce problème a été étudié pour la première fois par M. J. Bousinesq (*Comptes rendus*, t. 90, 1880, p. 736).

La solution  $u(z, t)$  qui vérifie (1) et satisfait aux conditions (2) et (3) est unique (1). On peut l'obtenir très simplement de la façon suivante :

Posons (2)

$$u = kt\varphi(\zeta), \quad \zeta = \frac{z}{\sqrt{vt}}$$

l'équation (1) devient une équation différentielle en  $\varphi(\zeta)$

$$(4) \quad \varphi'' + \frac{1}{2} \zeta \varphi' - \varphi + 1 = 0,$$

dont la solution générale est

$$\varphi(\zeta) = 1 + A(\zeta^2 + 2) + B(\zeta^2 + 2) \int_0^\zeta \frac{e^{-\frac{s^2}{4}}}{(s^2 + 2)^2} ds.$$

Les conditions aux limites (2) et initiales (3) déterminent les constantes A et B.

Un calcul facile montre que la solution cherchée peut s'écrire

$$(5) \quad u = kt \left[ 1 - \frac{1}{2\alpha} (\zeta^2 + 2) \int_\zeta^\infty \frac{e^{-\frac{s^2}{4}}}{(s^2 + 2)^2} ds \right] = kt \varphi(\zeta),$$

$\alpha$  désignant la valeur, positive et inférieure à  $\sqrt{\pi}$ , de

$$\text{l'intégrale définie } \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{s^2}{4}}}{(s^2 + 2)^2} ds.$$

Étudions la variation de la fonction  $u$  lorsque le coefficient  $\nu$  tend vers zéro.

(1) Nous invoquerons ici un certain nombre de propriétés classiques des équations du type considéré pour lesquelles on pourra se reporter à la Thèse de M. M. Gevrey (Paris, 1913).

(2) Cf. L. LECORNU, *Cours de Mécanique* professé à l'École Polytechnique, t. III; Gauthier-Villars, Paris, 1918.

Pour cela, il est intéressant de former  $\frac{\partial u}{\partial z}$  et  $\frac{\partial u}{\partial t}$ . On a

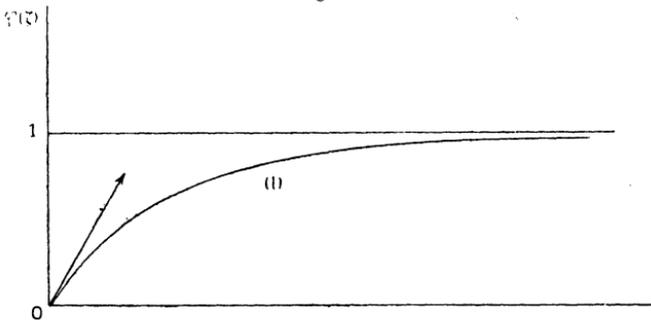
$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2\eta(z, t) = kt\varphi'(\zeta) \frac{1}{\sqrt{\nu t}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\varphi(\zeta) + kt\varphi'(\zeta) \left[ \frac{-z}{2t\sqrt{\nu t}} \right].$$

En tenant compte, d'autre part, de la variation de la fonction  $\varphi(\zeta)$  lorsque  $\zeta$  varie de zéro à  $+\infty$ , il est aisé d'effectuer le passage à la limite envisagé.

L'allure de la fonction  $\varphi(\zeta)$  est représentée par la courbe I de la figure 1.

Fig. 1.



Si l'on représente la fonction  $u(z, t)$  par une surface, la déformation de celle-ci lorsque  $\nu$  tend vers zéro est celle qu'indique la figure 2.

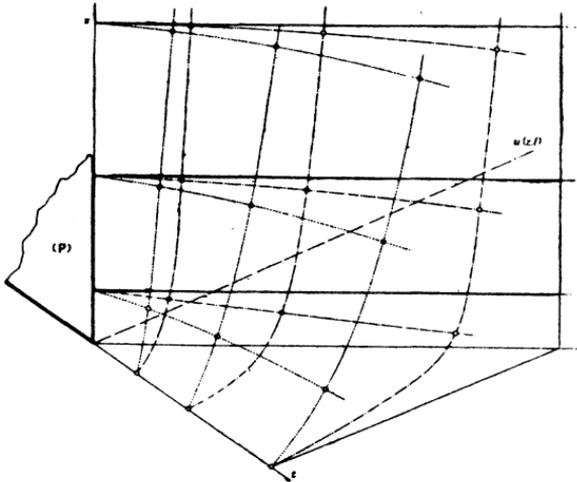
De même, on a représenté par les figures 3 et 4 l'allure de la déformation, dans les mêmes conditions, des surfaces  $\eta(z, t) = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z}(z, t)$  représentant le « tourbillon » en chaque point du fluide.

$T_2 = -\nu\rho \frac{\partial u}{\partial z}(z, t)$  représentant l'effort tangentiel engendré par la viscosité et s'exerçant parallèlement à  $Ox$  sur un élément normal à  $Ox$  ( $\rho =$  densité du fluide).

L'étude de ce passage à la limite donne lieu aux remarques suivantes :

1° Lorsque  $\nu$  est différent de zéro, la solution  $u(z, t)$  du problème est une fonction analytique, à

Fig. 2.



chaque instant, de la variable  $z$ . Cette fonction est aussi analytique, pour chaque valeur positive de  $z$ , de la variable  $t$ , lorsque  $t$  est positif. Mais cette dernière propriété n'est plus exacte pour l'instant initial  $t = 0$ .

Si, pour  $z$  positif, on calcule les dérivées partielles successives par rapport à  $t$ , pour  $t = 0$ , de la fonction  $\frac{u}{kt}$ , on constate que celles-ci sont toutes nulles. On ne peut donc développer cette fonction, pour  $t = 0$ , en série de Taylor car la fonction se réfugierait tout entière dans le dernier terme du développement limité.

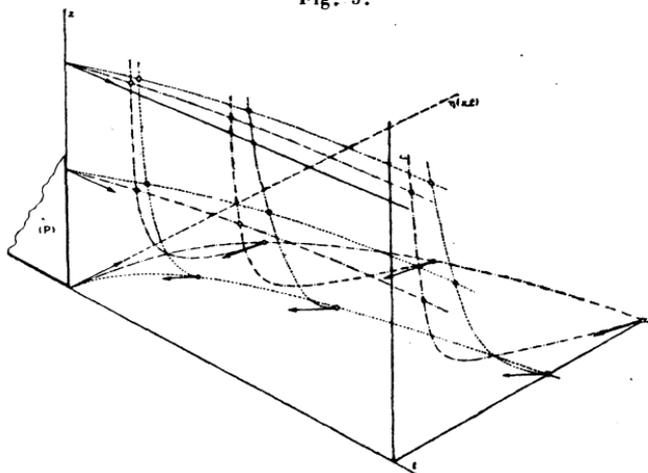
Lorsque  $\nu$  tend vers zéro, la fonction  $u(z, t)$  se

réduit à la limite à

$$(6) \quad \begin{cases} u(z, t) = kt & \text{pour } z > 0, \quad t \geq 0, \\ u = 0 & \text{pour } z = 0, \quad t \geq 0, \end{cases}$$

et cette limite présente une double singularité. Pour  $z$  positif, la solution limite, considérée comme fonction de  $t$ , est analytique de cette variable, même pour  $t = 0$ . Par contre, pour  $t$  positif, elle n'est plus fonction analytique de la variable  $z$  que pour  $z$  positif. Elle perd en effet ce caractère d'analyticité pour  $z = 0$ .

Fig. 3.



2° La fonction  $\eta(z, t)$  présente des particularités analogues à celles de la fonction  $u(z, t)$ . Sa limite, pour  $v = 0$ , se réduit à

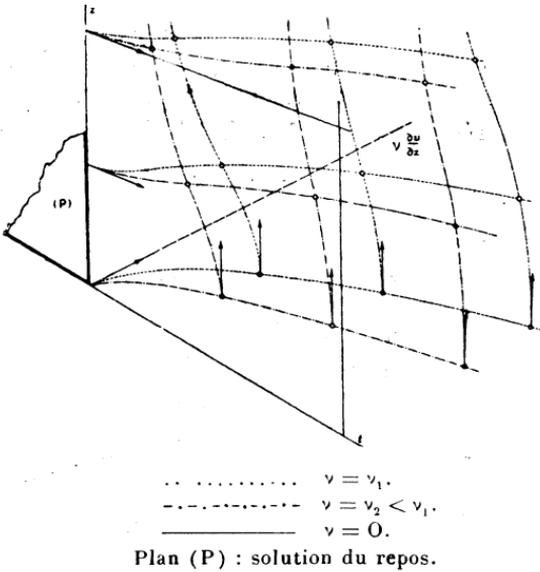
$$(7) \quad \begin{cases} \eta(z, t) = 0 & \text{pour } z > 0, \quad t \geq 0, \\ \eta(z, t) \text{ infini} & \text{pour } z = 0, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Le « flux de tourbillon » entre deux plans indéfinis normaux à  $Ox$  et distants de l'unité a pour expression

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial z}(z, t) dz = \frac{1}{2} \{ [u(z, t)]_{z=\infty} - [u(z, t)]_{z=0} \}.$$

Lorsque  $\nu$  tend vers zéro, il est aisé de constater que, bien que le tourbillon  $\eta$  augmente indéfiniment pour  $z = 0$ , le flux  $\Phi$  reste fini pour toute valeur finie de  $t$ .

Fig. 4.



3° La fonction  $T_2$  présente des particularités analogues à celles des fonctions  $u$  et  $\eta$ . Sa limite, pour  $\nu = 0$ , se réduit à

$$(8) \quad T_2 = \nu \rho \frac{\partial u}{\partial z}(z, t) = 0 \quad \text{pour} \quad z \geq 0, \quad t \geq 0.$$

En d'autres termes, cette limite est identiquement nulle. Cette particularité est digne de retenir l'attention. Elle n'est nullement évidente *a priori* car, des deux facteurs variables  $\nu$  et  $\frac{\partial u}{\partial z}$  que comprend la fonction  $T_2$ , le premier tend vers zéro et le second aug-

mente indéfiniment dans le passage à la limite considéré.

4<sup>o</sup> Enfin, on peut faire une dernière remarque. Si, dans l'équation du mouvement (1), on suppose directement  $\nu = 0$ , on obtient l'équation

$$(9) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = k,$$

dont la solution immédiate est

$$(10) \quad u = kt + \psi(z),$$

$\psi(z)$  étant une fonction arbitraire que la condition initiale (3) suffit à déterminer. Celle-ci montre en effet que la fonction  $\psi$  est identiquement nulle et la solution unique du problème est

$$(11) \quad u = kt.$$

C'est la solution indiquée par l'Hydrodynamique classique des liquides parfaits ou dénués de viscosité.

On voit que, suivant cette conception, la condition (2) est incompatible avec l'équation (9) et la condition (3). On ne peut, alors, imposer l'adhérence du liquide parfait à la paroi.

C'est à une conclusion opposée que nous sommes parvenus en effectuant le passage à la limite précédent, c'est-à-dire en faisant tendre  $\nu$  vers zéro dans la solution (5) de l'équation (1) répondant aux conditions (2) et (3) et non dans cette équation elle-même. Les deux solutions *directe* et *limite* du problème correspondant au cas du liquide parfait  $\nu = 0$  présentent donc la différence d'une singularité constituée, pour la seconde, par une discontinuité pour  $z = 0$  ainsi que le fait ressortir la comparaison de (6) et (11).

[O'8d]

**SUR LE MOUVEMENT A DEUX PARAMÈTRES  
AUTOUR D'UN POINT FIXE ;**

PAR RAOUL BRICARD.

---

1. J'ai publié ici-même (1) une étude sur le mouvement à deux paramètres dans le plan et sur la sphère, et dans une Note des *Comptes rendus* (2) j'ai précisé un résultat obtenu dans la dernière partie du précédent travail. Je vais reprendre la question sous une forme plus développée.

Quand un solide S possède un point fixe O, sa position dépend de trois paramètres. Si ceux-ci sont fonctions d'une même variable, S est animé d'un mouvement à un paramètre ou *mouvement*  $M_1$ , et l'on sait (théorème de Poincot) que ce mouvement peut être obtenu en liant S à un cône qui roule sur un cône fixe, les deux cônes ayant pour sommet commun le point O. Si les trois paramètres sont fonctions de deux variables indépendantes, on dit, par une extension commode de langage, que S est animé d'un *mouvement à deux paramètres*, ou *mouvement au deuxième degré de liberté*, ou plus brièvement *mouvement*  $M_2$ . Le but de cet article est de rechercher si l'on peut énoncer, pour un mouvement  $M_2$  autour d'un point fixe, un théorème analogue à celui de Poincot sur le mouvement  $M_1$ .

---

1) *N. A.*, 1913, p. 362.

(2) *C. R.*, 1<sup>er</sup> semestre 1918, p. 734.

Au lieu du mouvement de S, on peut considérer celui d'une sphère  $\Sigma$ , de centre O, liée à S et glissant sur une sphère fixe  $\Sigma_0$ . Toute propriété de ce dernier mouvement peut se traduire immédiatement par une propriété du mouvement de S autour de O, et réciproquement. C'est classique. Suivant les cas, il peut être plus avantageux de parler du mouvement de S ou de celui de  $\Sigma$ .

2. Soient  $Ox_0y_0z_0$  un trièdre trirectangle fixe,  $Oxyz$  trièdre trirectangle lié à S. Soit encore

	$O_0x_0$	$O_0y_0$	$O_0z_0$
$Ox$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
$Oy$	$\alpha'$	$\beta'$	$\gamma'$
$Oz$	$\alpha''$	$\beta''$	$\gamma''$

le tableau des cosinus directeurs des axes du trièdre mobile. Le mouvement  $M_2$  est défini, si l'on se donne ces cosinus, en fonction de deux variables indépendantes  $u$  et  $v$ . Ce mouvement  $M_2$  contient une infinité de mouvements  $M_1$ . On définira l'un de ceux-ci en se donnant  $u$  et  $v$  en fonction du temps  $t$ .

Prenons S dans une position  $(u, v)$  et donnons à ce solide, à partir de cette position, un mouvement M, particulier. On sait que ce mouvement est tangent à une rotation dont l'axe a pour équations, par rapport aux axes mobiles,

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r},$$

$p, q, r$  étant donnés par des formules classiques, dont

je récris la première,

$$\begin{aligned} p &= \alpha'' \frac{d\alpha'}{dt} + \beta'' \frac{d\beta'}{dt} + \gamma'' \frac{d\gamma'}{dt} \\ &= \left( \alpha'' \frac{\partial \alpha'}{\partial u} + \beta'' \frac{\partial \beta'}{\partial u} + \gamma'' \frac{\partial \gamma'}{\partial u} \right) \frac{du}{dt} \\ &\quad + \left( \alpha'' \frac{\partial \alpha'}{\partial v} + \beta'' \frac{\partial \beta'}{\partial v} + \gamma'' \frac{\partial \gamma'}{\partial v} \right) \frac{dv}{dt} \end{aligned}$$

On peut poser

$$\begin{aligned} p &= P_1 \frac{du}{dt} + Q_1 \frac{dv}{dt}, \\ q &= P_2 \frac{du}{dt} + Q_2 \frac{dv}{dt}, \\ r &= P_3 \frac{du}{dt} + Q_3 \frac{dv}{dt}, \end{aligned}$$

$P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_3, Q_3$  ne dépendant que de  $u$  et de  $v$ , c'est-à-dire de la position considérée. Si, partant de cette même position, on fait varier le mouvement  $M_1$ , on reconnaît que l'axe de rotation décrit le plan

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ P_1 & Q_1 & R_1 \\ P_2 & Q_2 & R_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ainsi, étant donné le mouvement  $M_2$  d'un solide  $S$  autour d'un point  $O$ , si l'on donne à  $S$ , en partant d'une même position, tous les mouvements  $M_1$  contenus dans  $M_2$ , le lieu des axes instantanés de rotation est un plan passant par  $O$ . J'appellerai ce plan *le plan des axes*. La perpendiculaire élevée au point  $O$  sur le plan des axes sera dite la *droite polaire instantanée* du mouvement  $M_2$ .

On voit comment cela se traduit sur la sphère : étant donné un mouvement  $M_2$  sur la sphère et une position (F) de la figure mobile sur cette sphère, on peut donner à la figure, en partant de (F), une infinité de mouvements  $M_1$  contenus dans  $M_2$ . Les centres instan-

tanés de rotation correspondants ont pour lieu un grand cercle, *le grand cercle des centres*. Les pôles de ce grand cercle seront dits les *pôles instantanés* du mouvement  $M_2$ .

3. Désignons par  $\Sigma_0$  la sphère fixe, par  $\Sigma$  la sphère qui, entraînée dans le mouvement  $M_2$ , glisse sur  $\Sigma_0$ . Marquons sur  $\Sigma_0$  l'ensemble des pôles instantanés  $P_0$ , et sur  $\Sigma$  les points  $P$  qui viendront, pour les diverses positions de cette sphère, coïncider avec les pôles correspondants  $P_0$  (pour chaque position, on peut choisir l'un ou l'autre de deux pôles  $P_0$ , antipodes l'un de l'autre, mais, le choix une fois fait, le point  $P$  correspondant de  $\Sigma$  est déterminé sans ambiguïté).

Les points  $P_0$  couvrent la sphère  $\Sigma_0$  ou tout au moins une région de cette sphère. De même les points  $P$  sur  $\Sigma$ .

Nous avons ainsi défini une certaine correspondance ponctuelle entre  $\Sigma_0$  et  $\Sigma$ . Proposons-nous d'en rechercher le caractère. On voit que nous procédons comme dans l'étude du mouvement  $M_1$ . Pour celui-ci, la considération des centres instantanés de rotation conduit à définir une correspondance entre les points de deux certaines courbes, tracées respectivement sur  $\Sigma_0$  et sur  $\Sigma$ . Ces deux courbes roulent l'une sur l'autre, en sorte que la correspondance dont il s'agit est *par égalité d'arcs*. Ici, nous reconnaitrons que *la correspondance entre les points  $P_0$  et  $P$  est une correspondance par égalité d'aires*.

Pour établir cela j'utiliserai certaines propriétés des aires sphériques auxquelles j'ai consacré un article récent (1).

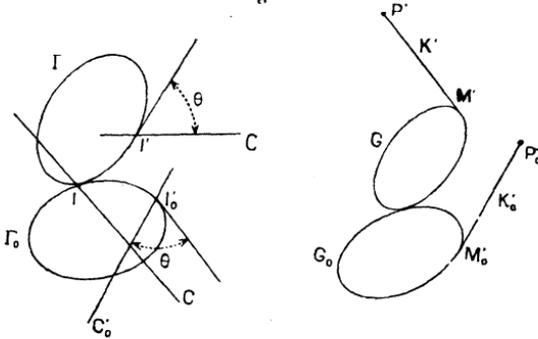
---

(1) *Sur les axes et les courbes supplémentaires en géométrie*

4. Je donnerai d'abord une démonstration résumée, qui peut suffire au lecteur curieux seulement d'idées générales et indulgent pour le manque de rigueur.

Soit, pour une position donnée de  $\Sigma$ ,  $C$  le grand cercle des centres (*fig. 1*) (1). Donnons à  $\Sigma$ , à partir

Fig. 1.



de cette position, un mouvement  $M_1$ , *fermé* (c'est-à-dire ramenant  $\Sigma$  à sa position initiale) et contenu dans le mouvement  $M_2$ . Ce mouvement s'obtient par le roulement d'une courbe fermée  $\Gamma$ , liée à  $\Sigma$ , sur une courbe fermée  $\Gamma_0$ , liée à  $\Sigma_0$ . Ces deux courbes ont même longueur totale. Elles se touchent en un point  $I$  qui appartient à  $C$ .

Soit, à un autre instant,  $I_0$  le point où  $\Gamma$ , en roulant sur  $\Gamma_0$ , sera venue toucher cette dernière courbe. Ce point, marqué sur  $\Gamma$ , est actuellement en  $I'$  tel que arc  $II' = \text{arc } II'_0$ . Le grand cercle des centres  $C'_0$ , correspondant à la nouvelle position, passe par  $I'_0$ . Traçons le grand cercle  $C'$  qui, entraîné dans le roulement de  $\Gamma$ ,

*sphérique* (*N. A.*, nov, 1924. p. 41.) J'emploie ici les notations de cet article, auquel je renverrai par l'abréviation (A).

(1) Sur cette figure et sur la suivante, les grands cercles sont représentés par des droites.

vient coïncider avec  $C'_0$ . Il passe par le point  $I'$  et coupe  $\Gamma$  sous le même angle  $\theta$  que  $C'_0$  coupe  $\Gamma_0$ .

Cela posé, construisons la figure supplémentaire de la précédente;  $\Gamma_0$  et  $\Gamma$  ont pour supplémentaires deux courbes fermées  $G_0$  et  $G$  qui ont même aire, les deux courbes  $\Gamma_0$  et  $\Gamma$  ayant même longueur totale (A, n° 9). Aux points  $I'_0$  et  $I'$  correspondent deux grands cercles  $K'_0$  et  $K'$ , touchant  $G_0$  et  $G$  aux points  $M'_0$  et  $M'$  qui sont les pôles des grands cercles tangents à  $\Gamma_0$  et à  $\Gamma$  aux points  $I'_0$  et  $I'$ . Les grands cercles  $C'_0$  et  $C'$  ont pour pôles les points  $P'_0$  et  $P'$  des grands cercles  $K'_0$  et  $K'$ , et l'on a

$$\text{arc } M'_0 P'_0 = \text{arc } M' P' = \theta.$$

$P'_0$  est le pôle instantané du mouvement  $M_2$  de  $\Sigma$ , pour la seconde position considérée, et  $P'$  est le point de  $\Sigma$  qui viendra se confondre avec  $P'_0$ .

Au cours du mouvement  $M_1$  considéré,  $P'_0$  et  $P'$  décrivent deux courbes fermées ( $P'_0$ ) et ( $P'$ ). Je dis qu'elles ont même aire. En effet l'aire ( $P'$ ) est égale à l'aire de  $G$  augmentée de l'aire balayée par l'arc de grand cercle  $M'P'$ . Cette dernière aire a pour élément, d'après la formule qui donne l'aire d'une calotte sphérique,

$$d\sigma = (1 - \cos M'P') d\varphi = (1 - \cos \theta) d\varphi,$$

$d\varphi$  étant l'angle de contingence sphérique de  $G$  au point  $M'$ . De même, l'aire ( $P'_0$ ) est égale à l'aire de  $G_0$ , augmentée de l'aire balayée par  $M'_0 P'_0$ , qui a pour élément

$$d\sigma_0 = (1 - \cos \theta) d\varphi_0,$$

$d\varphi_0$  étant l'angle de contingence de  $G_0$  au point  $M'_0$ . Mais les angles de contingence en  $M'_0$  et en  $M'$  sont égaux aux arcs élémentaires de  $\Gamma_0$  et de  $\Gamma$  en  $I'_0$  et en  $I'$ , et ces arcs sont égaux, puisque  $\Gamma$  roule sur  $\Gamma_0$ . On a

donc  $d\sigma_0 = d\sigma$ . Par conséquent, les aires totales balayées par  $M'_0P'_0$  et par  $M'P'$  sont égales, et puisque d'autre part  $G_0$  et  $O$  ont la même aire, on a bien

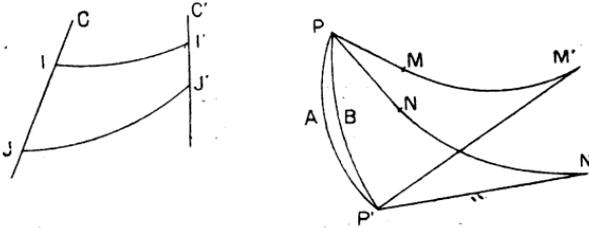
$$\text{aire}(P'_0) = \text{aire}(P'). \quad \text{C. Q. F. D.}$$

La démonstration précédente ne peut être tenue pour satisfaisante que si l'on est assuré que les courbes  $\Gamma_0$  et  $\Gamma$  sont régulières (A, n° 2), ce qui peut fort bien ne pas être. Si  $\Gamma_0$  et  $\Gamma$  ont des points d'inflexion ou de rebroussement, l'égalité des aires ( $G_0$ ) et ( $G$ ) est remplacée par une congruence. Les aires balayées par  $K'_0$  et par  $K'$  restent bien égales, mais il n'est pas certain qu'elles s'ajoutent avec le même signe à ( $G_0$ ) et à ( $G$ ), si bien que l'exactitude du résultat reste douteuse. Il faut revoir la question de plus près.

§. Considérons deux positions  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  de la sphère mobile (*fig. 2*), et soient  $C_0$  et  $C'_0$  les grands cercles des centres correspondants, tracés sur la sphère fixe. Pour éviter l'introduction d'indices sur la figure, celle-ci est supposée tracée sur la sphère mobile. La figure tracée sur la sphère fixe aurait le même aspect que la première, les diverses lettres de celle-ci étant affectées de l'indice zéro.  $C$  et  $C'$  sont les grands cercles qui viennent successivement coïncider avec  $C_0$  et avec  $C'_0$ .

On peut passer de la première position à la seconde par une infinité de mouvements  $M_i$  contenus dans  $M_2$ . Considérons-en deux. Le premier s'obtient en faisant rouler un certain arc de courbe  $II'$ , tracé sur  $\Sigma$ , sur un arc de courbe  $I_0I'_0$ , tracé sur  $\Sigma_0$ . De même le second s'obtient en faisant rouler un arc de courbe  $JJ'$  de  $\Sigma$  sur un arc de courbe  $J_0J'_0$  de  $\Sigma_0$ .  $I$  et  $J$  sont sur le cercle  $C$ ,  $I'$  et  $J'$  sur le cercle  $C'$ . De même  $I_0, J_0, I'_0, J'_0, \dots$

Comme les points singuliers (points de rebroussement, points d'inflexion, points doubles) sont excep-



tionnels, on peut supposer les deux positions considérées assez voisines pour que les quatre arcs  $II'$ ,  $JJ'$ ,  $II'_0$ ,  $JJ'_0$  soient tous *réguliers*. On peut aussi supposer les deux mouvements  $M$ , introduits assez voisins pour que les deux premiers arcs soient de même sorte, et aussi les deux derniers. Pour fixer les idées, supposons les quatre arcs à *gauche*.

Les deux quadrilatères  $II'J'J$  et  $I_0I'_0J'_0J_0$  ont leurs côtés deux à deux de même longueur, et leurs angles sont aussi égaux.

Construisons maintenant les figures supplémentaires. Les arcs  $II'$  et  $JJ'$  ont pour supplémentaires des arcs réguliers  $MM'$  et  $NN'$ .  $C$  et  $C'$  ont pour pôles des points  $P$  et  $P'$  tels que les grands cercles  $PM$  et  $PN$  soient tangents à  $MM'$  et à  $NN'$  en  $M$  et en  $N$ , et que les grands cercles  $P'M'$  et  $P'N'$  soient tangents aux mêmes arcs en  $M'$  et en  $N'$ . Le point  $P$  pouvait être choisi de deux manières : on fera en sorte qu'il n'y ait pas de rebroussements en  $M$  et en  $N$ . Le choix du point  $P'$  dérive du précédent par continuité, en sorte que  $M'$  et  $N'$  sont des points de rebroussement.

Quand  $\Sigma$  se rend de la première position à la seconde par le premier mouvement, le point  $P$  décrit un

arc PAP'; le second mouvement lui fait décrire un arc PBP'.

On a sur la sphère  $\Sigma_0$  une figure analogue.

Cela posé, on voit d'abord, en raisonnant comme au n° 4, que l'on a les égalités d'aires

$$(1) \quad (\text{PMM}'\text{P}'\text{AP}) = \dots,$$

$$(2) \quad (\text{PNN}'\text{P}'\text{BP}) = \dots$$

en ne prenant pas la peine d'écrire les seconds membres, qui ne diffèrent des premiers que par l'indice zéro.

Considérons d'autre part l'aire limitée par le contour  $\text{PMM}'\text{P}'\text{N}'\text{NP}$ . Elle a pour expression, à  $2k\pi$  près (A, n° 6),  $-\int d\varphi$ , cette intégrale étant prise le long du contour. Les intégrales prises le long des arcs de grands cercles qui font partie de celui-ci sont nulles. Le point de rebroussement  $\text{M}'$  donne un terme égal à  $-\pi$ , et le point de rebroussement  $\text{N}'$  un terme égal à  $+\pi$ . Les points anguleux P et P' donnent des termes

égaux respectivement à  $-\widehat{\text{NP}}, \widehat{\text{PM}}$  et à  $-\widehat{\text{M}'\text{P}'}, \widehat{\text{P}'\text{M}'}$ .  
Donc

$$(\text{PMM}'\text{P}'\text{N}'\text{NP}) \equiv -\int_{\text{MM}'} d\varphi - \int_{\text{N}'\text{N}} d\varphi \\ -\widehat{\text{NP}}, \widehat{\text{PM}} - \widehat{\text{M}'\text{P}'}, \widehat{\text{P}'\text{N}'} \pmod{2\pi}.$$

Sur la sphère  $\Sigma_0$ , on a une égalité semblable, les termes du second membre ayant les mêmes valeurs que dans la précédente. Cela est vrai pour les intégrales, à cause des égalités telles que

$$\int_{\text{MM}'} d\varphi = \text{longueur de II}' = \text{longueur de } I_0 I'_0 = \int_{\text{M}_0 \text{M}_0'} d\varphi,$$

et pour les angles, à cause de

$$\widehat{NP, PM} = \pi - \text{longueur } IJ = \dots$$

Donc

$$(PMM'P'N'NP) \equiv \dots \pmod{2\pi}.$$

Si l'on rapproche suffisamment les deux positions de  $\Sigma$ , et si l'on fait aussi les deux mouvements  $M_1$ , considérés suffisamment voisins, les deux membres de la relation précédente sont très petits. La congruence se change donc en égalité et l'on a

$$(3) \quad (PMM'P'N'NP) = \dots$$

Écrivons alors les égalités (1), (2) et (3) en mettant l'aire d'un contour  $C$  sous la forme qui résulte de sa définition (A, n° 4),

$$(C) \equiv \int (1 - \cos OM) d\theta \pmod{4\pi},$$

$O$  étant un pôle quelconque,  $M$  un point décrivant  $C$ ,  $d\theta$  l'angle de deux arcs de grand cercle  $OM$  infiniment voisins. On a

$$(4) \quad (PM) + (MM') + (M'P') + (P'AP) \equiv \dots,$$

$$(5) \quad (PN) + (NN') + (N'P') + (P'BP) \equiv \dots,$$

$$(6) \quad (PM) + (MM') + (M'P') + (P'N') + (N'N) + (NP) \equiv \dots$$

En faisant la combinaison  $-(4) + (5) + (6)$ , on trouve

$$(PAP') + (P'BP) = (PAP'BP) \equiv (P_0 A_0 P'_0 B_0 P_0) \pmod{4\pi}.$$

Mais comme les deux aires sont très petites, la congruence peut être remplacée par une égalité.

Si les arcs  $II'$  et  $JJ'$  d'une part,  $I_0 I'_0$  et  $J'_0 J_0$  avaient été supposés de sortes différentes, on aurait trouvé

$$(PAP'BP) = -(P_0 A_0 P'_0 B_0 P_0).$$

Le théorème du n° 3 est donc complètement démontré.

6. J'indiquerai ici un sujet d'études qui me paraît intéressant : on vient de voir qu'à tout mouvement  $M_2$  autour d'un point fixe on peut attacher une correspondance ponctuelle sur la sphère, qui conserve les aires. *Est-il exact que, réciproquement, toute correspondance de cette nature puisse être rattachée à un certain mouvement  $M_2$  autour d'un point fixe?* Je suis porté à le croire, mais je ne sais pas le démontrer.

Le fait supposé vrai, on voit aussi se poser la question suivante : étant donnée la correspondance  $(P_0, P)$ , il faut, pour réaliser le mouvement  $M_2$ , non seulement amener en coïncidence successivement chaque point  $P$  avec le point correspondant  $P_0$ , mais encore définir à chaque fois l'orientation de la sphère  $\Sigma$ . Il y a donc à rechercher comment cette orientation dépend de la correspondance donnée.

7. Le théorème du n° 3 rend presque intuitif le théorème célèbre de Gauss sur la conservation de la courbure totale dans la déformation d'une surface.

Rappelons d'abord ceci : soient  $M$  un point d'une surface  $S$ ,  $m$  le point qui lui correspond par représentation sphérique. Si le point  $M$  décrit sur  $S$  une courbe fermée d'aire  $\Omega$ , le point  $m$  décrit une courbe fermée d'aire  $\omega$ , et la courbure totale de  $S$  en  $M$  est la limite du rapport  $\frac{\omega}{\Omega}$ .

La démonstration est si brève qu'on peut la donner ici. Il est clair qu'il suffit d'établir la proposition, dans le cas où  $\Omega$  a pour contour un quadrilatère infiniment

petit  $MM_1M_2M_3$ , ayant pour côtés des lignes de courbure infiniment voisines deux à deux. Alors l'aire  $\omega$  est limitée par un quadrilatère  $m_1m_2m_3m_4$ , ayant ses côtés parallèles à ceux du premier.

On a

$$\lim \frac{\omega}{\Omega} = \lim \frac{mm_1}{MM_1} \cdot \frac{m_1m_2}{M_1M_2}.$$

On voit tout de suite que,  $R$  et  $R'$  étant les deux rayons de courbure principaux de  $S$  en  $M$ , on a

$$\lim \frac{mm_1}{MM_1} = \frac{1}{R}, \quad \lim \frac{m_1m_2}{M_1M_2} = \frac{1}{R'},$$

d'où la proposition.

8. Cela posé, soient  $S_0$  et  $S$  deux surfaces applicables. Je ne retiens des propriétés de ces surfaces que leur définition, c'est-à-dire le fait qu'il existe entre elles une correspondance ponctuelle conservant les longueurs des arcs. Il en résulte immédiatement que cette correspondance conserve aussi les angles et les aires.

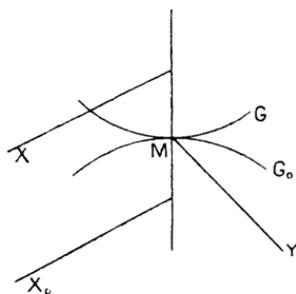
A une géodésique de  $S_0$  correspond une géodésique de  $S$ , car la propriété de minimum de longueur se conserve quand on passe de  $S_0$  à  $S$ .

$S_0$  étant supposée fixe, donnons à  $S$  un mouvement  $M$ , tel que chaque point de  $S$  vienne successivement coïncider avec le point correspondant de  $S_0$ , et cela de telle manière que les courbes tracées sur  $S$  et passant par le point considéré soient tangentes aux courbes correspondantes de  $S_0$ .

Prenons  $S$  dans une position telle que cette surface touche  $S_0$  au point  $M$ , et traçons une géodésique  $G_0$  de  $S_0$  passant par le point  $M$  (*fig.* 3). Il lui correspond une géodésique  $G$  de  $S$ . Donnons à  $S$  un mouve-

ment  $M_1$ , contenu dans le mouvement  $M_2$  défini ci-dessus, tel que le point de contact des deux surfaces décrive  $G_0$ . D'après une remarque précédente, ce point

Fig. 3.



de contact décrit  $G$ , relativement à  $S$ , et  $G$  roule sur  $G_0$ .

Or on sait <sup>(1)</sup> que, lorsqu'une courbe  $G$  roule sur une courbe  $G_0$ , son mouvement est à chaque instant tangent à une rotation dont l'axe passe par le point de contact des deux courbes et est contenu dans le plan qui passe par leur tangente commune et le point de rencontre de leurs axes de courbure au point considéré. Ici,  $G_0$  et  $G$  étant des géodésiques respectivement de  $S_0$  et de  $S$ , leurs plans osculateurs sont confondus en un même plan qui contient la normale  $MN$ , commune à  $S_0$  et à  $S$  en  $M$ . Donc leurs axes de courbure  $X$  et  $X_0$  sont parallèles, leur direction commune étant parallèle au plan tangent en  $M$ . Donc enfin l'axe  $Y$  de la rotation tangente à  $M$ , est une droite de ce plan tangent. Il décrit ce plan, quand on fait varier les géodésiques  $G_0$  et  $G$ .

(<sup>1</sup>) *N. A.*, 1922, p. 58.

Considérons alors *l'image sphérique* du mouvement  $M_2$  de  $S$ , c'est-à-dire le mouvement  $M_2$  d'une sphère  $\Sigma$  de rayon 1, de centre  $O$  fixe, et telle que les directions liées à cette sphère soient constamment parallèles aux directions liées à  $S$ .  $\Sigma$  glisse sur une sphère fixe  $\Sigma_0$ . Tous les mouvements  $M$ , de cette sphère sont tangents à des rotations dont les axes sont parallèles à ceux des rotations tangentes aux mouvements correspondants de  $S$ , car on passe d'un mouvement à l'autre par une translation qui n'altère pas les directions des axes de rotation. On voit donc que, pour la position considérée, le grand cercle des centres de  $\Sigma$  est parallèle au plan tangent en  $M$  à  $S$  et à  $S_0$ , et que le pôle du mouvement est à l'extrémité d'un rayon parallèle à la normale  $MN$ .

Pour un mouvement *fermé* (c'est-à-dire ramenant le solide mobile à sa position initiale) infiniment petit, le point  $M$  décrit sur  $S_0$  une courbe enfermant l'aire infiniment petite  $\Omega_0$  et le point  $m$  décrit sur  $\Sigma_0$  une courbe enfermant l'aire infiniment petite  $\omega_0$ . On a,  $R_0$  et  $R'_0$  étant les rayons de courbure principaux de  $S_0$ ,

$$\frac{1}{R_0 R'_0} = \frac{\omega_0}{\Omega_0}.$$

Si l'on considère le *mouvement réciproque*, c'est-à-dire celui de  $S_0$  par rapport à  $S$ , on a, avec des notations analogues,

$$\frac{1}{RR'} = \frac{\omega}{\Omega}.$$

Mais  $\Omega_0 = \Omega$ , puisque les surfaces sont applicables, et  $\omega_0 = \omega$ , d'après le théorème du n° 3. Donc

$$\frac{1}{R_0 R'_0} = \frac{1}{RR'}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES  
(SESSION DE 1924).

---

Remarque sur le problème de Calcul différentiel  
et intégral ;

Par PAUL FLAMANT.

La propriété qui fait l'objet de la deuxième partie (1) admet *deux* réciproques car, en dehors des hypothèses générales, interviennent les trois faits suivants :

- 1° La correspondance est définie par une loi (A) ;
- 2° Elle transforme les courbes  $F$  en courbes  $F_1$ , de même longueur ;
- 3° Elle fait correspondre aux trajectoires orthogonales des  $F$  celles des  $F_1$ .

3° est la conclusion du premier énoncé ; 1° est la conclusion de la réciproque signalée par M. Gambier (et qui vient la première à l'esprit). L'autre réciproque aura 2° pour conclusion.

En prenant les courbes orthogonales en question comme courbes coordonnées, l'hypothèse 3° se traduit par

$$F = 0, \quad F_1 = 0.$$

Par suite, l'hypothèse 1° se traduit par

$$(E - E_1)(G - G_1) = 0, \quad \text{ou bien } E = E_1, \quad \text{ou bien } G = G_1.$$

---

(1) Voir l'énoncé page 95 et la solution page 100 du présent tome des *Nouvelles Annales* (numéro de décembre 1924).

Par suite, si les longueurs sont conservées pour une famille unique et si deux familles orthogonales donnent deux familles orthogonales, c'est pour l'une d'elles que les longueurs sont conservées.

---

---

**SUR L'INDÉTERMINATION  
DE CERTAINS PROBLÈMES DE FROTTEMENT ;**

PAR H. BEGHIN.

---

Dans l'étude de l'équilibre avec frottement d'un système de solides invariables soumis à certaines forces données, la loi de Coulomb et les lois habituelles de la mécanique des solides invariables conduisent quelquefois à une indétermination.

Dans un récent article (*Nouvelles Annales*, 1923), j'ai émis l'avis que cette indétermination était due, non pas à l'imperfection de la loi de Coulomb, mais à l'insuffisance des données du problème. Pour être complètes, ces données devraient porter, non seulement sur les positions d'ensemble des solides, mais sur l'état initial de leurs déformations infiniment petites.

Je me propose, dans le présent article, de justifier cet avis en montrant que, suivant l'état initial de ces déformations, on obtiendra, dans la réalité, soit l'une, soit l'autre des solutions que la théorie des solides invariables indique comme également possibles.

Soit, par exemple, un solide S en contact aux

points  $A_1, A_2$ , avec des obstacles fixes, et soumis, d'autre part, à des forces données  $F_1, F_2, \dots, F_n$ .

Je suppose que l'étude de l'équilibre de ce solide au moyen de la loi de Coulomb et de la mécanique habituelle des solides invariables conduise aux deux solutions suivantes :

*Première solution.* — Existence de deux vecteurs réactions  $R_1, R_2$ , en  $A_1$  et  $A_2$ , intérieurs aux cônes de frottement, formant, avec les forces  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , un système de vecteurs équivalent à zéro.

*Deuxième solution.* — Existence de deux vecteurs réactions  $R'_1, R'_2$ , en  $A_1$  et  $A_2$ , et d'un système de forces d'inertie initiales  $-m_1 J_1, -m_2 J_2, \dots, -m_p J_p$ , formant, avec les forces données  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , un système de vecteurs équivalent à zéro, les réactions  $R_1, R_2$  vérifiant la loi de Coulomb pour le déplacement imaginé <sup>(1)</sup>.

Je suppose que le solide  $S$  soit *parfaitement élastique*, c'est-à-dire que ses efforts intérieurs à un instant quelconque soient fonctions *uniquement* de l'état des déformations à cet instant.

J'abandonne le solide  $S$  sans vitesse en faisant agir sur lui les forces données  $F_1, F_2, \dots, F_n$  et les forces  $R_1, R_2$  définies dans la *première solution*. Ces forces formant un système de vecteurs équivalent à zéro, le

(1) Je remarque incidemment que, si  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  sont les paramètres dont dépend la position géométrique du solide  $S$ , ces forces d'inertie initiales correspondent à des valeurs nulles des dérivées premières  $\alpha', \beta', \gamma', \dots$  des paramètres par rapport au temps, et à des valeurs, non toutes nulles, des dérivées secondes  $\alpha'', \beta'', \gamma'', \dots$ . Dans ce cas particulier où les vitesses sont nulles, la distribution des accélérations dans le solide  $S$  est hélicoïdale, comme s'il s'agissait de vitesses.

solide  $S$  reste au repos, et ses déformations infiniment petites prennent, sous l'influence de ces forces, un état ( $\mathcal{C}$ ), dans lequel chaque petit élément du corps est en équilibre sous l'action de celles des forces données qui lui sont appliquées et des efforts le long de sa surface, efforts qui sont caractérisés par la valeur de ces déformations elles-mêmes.

Si j'applique aux obstacles fixes en  $A_1$  et  $A_2$  les forces  $\rho_1, \rho_2$  obtenues en changeant de sens les forces  $R_1, R_2$ , ces obstacles prennent un état ( $\mathcal{C}$ ) de déformations infiniment petites.

Le solide  $S$  et les obstacles étant ainsi déformés, je les place au contact en  $A_1$  et  $A_2$  et supprime les forces  $R_1, R_2, \rho_1, \rho_2$ . Les éléments en présence au point  $A_1$  exercent alors immédiatement l'un sur l'autre des réactions égales aux forces  $R_1, \rho_1$  supprimées (<sup>1</sup>); de même, les éléments en présence au point  $A_2$  exercent l'un sur l'autre des réactions respectivement égales à  $R_2$  et à  $\rho_2$ . *Le système entier reste donc au repos, chaque élément conservant son état initial de déformation.*

J'imagine maintenant le solide  $S$  abandonné sans vitesse et soumis, d'une part, aux forces données  $F_1, F_2, \dots, F_n$ , d'autre part, aux forces  $R'_1, R'_2$  définies dans la *deuxième solution*, d'autre part enfin, à des forces  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_p$ , appliquées aux différents éléments qui composent  $S$ , et qui soient justement identiques aux forces d'inertie  $-m_1 J_1, \dots, -m_p J_p$  introduites par la *deuxième solution*.

---

(<sup>1</sup>) Tout autre système  $R'_1, \rho'_1$  de réactions au point  $A_1$  entraînerait pour l'élément du corps  $S$  une force d'inertie  $(R_1) - (R'_1)$ , pour l'élément de l'obstacle une force d'inertie opposée  $(\rho_1) - (\rho'_1)$ ; on vérifie immédiatement que leur direction serait en contradiction avec la loi de Coulomb.

Ces forces que je suppose agir sur S formant un système de vecteurs équivalent à zéro, le solide S reste au repos et prend un certain état ( $\mathcal{E}'$ ) de déformations infiniment petites.

Si, de même, j'applique aux obstacles fixes, en  $A_1$  et  $A_2$ , des forces  $\rho'_1$  et  $\rho'_2$  directement opposées aux forces  $R'_1$  et  $R'_2$ , ces obstacles prennent un état ( $\mathcal{O}'$ ) de déformations infiniment petites.

J'opère alors comme précédemment : le solide S et les obstacles sont placés au contact dans ces états ( $\mathcal{E}'$ ) et ( $\mathcal{O}'$ ) de déformations; puis je supprime les forces  $R'_1$ ,  $R'_2$ ,  $\rho'_1$ ,  $\rho'_2$ , aussitôt remplacées par des réactions mutuelles qui leur sont respectivement égales; le solide S reste donc au repos, les états de déformations restant ( $\mathcal{E}'$ ) et ( $\mathcal{O}'$ ).

Je supprime enfin les forces  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_p$ . A l'instant précis où disparaissent ces forces, rien n'est changé à l'état des efforts intérieurs, puisque ces efforts sont déterminés par les états ( $\mathcal{E}'$ ) et ( $\mathcal{O}'$ ); les petits éléments qui composent S ne sont donc plus en équilibre : chacun d'eux prend une force d'inertie, qui est précisément celle des forces  $\Phi_1, \dots, \Phi_p$  qui lui était appliquée et qui vient de disparaître. Ce sont là les forces d'inertie qui ont été prévues par la *deuxième solution*.

*Le solide, ainsi abandonné dans l'état ( $\mathcal{E}'$ ), prend donc exactement le mouvement prévu par cette solution.*

Je remarque incidemment que le déplacement élémentaire du corps S conserve l'état ( $\mathcal{E}'$ ) de ses déformations, puisque les forces d'inertie initiales prises séparément par ses différents éléments correspondent à un mouvement d'ensemble ne comportant aucune nouvelle déformation. Il en est de même pour l'état ( $\mathcal{O}'$ ) des déformations des obstacles.

Pour simplifier les notations et mettre en évidence toute la simplicité du raisonnement, j'ai supposé un seul solide en contact avec des obstacles fixes. Mais il est manifeste que ce raisonnement s'applique sans modification à un nombre quelconque de solides en contact avec frottement entre eux et avec des obstacles fixes.

J'ai supposé d'autre part des corps parfaitement élastiques, dans lesquels les efforts intérieurs ne dépendent que de l'état des déformations. Il n'y a rien à changer à ce qui précède, si cette élasticité s'accompagne d'une certaine viscosité, c'est-à-dire si les efforts dépendent en outre des vitesses, puisque les vitesses initiales, dans la position considérée, sont supposées nulles. Mais ce qui précède ne s'applique pas si, dans les limites de l'observation, les corps sont susceptibles de prendre des déformations permanentes.

Je viens de montrer qu'en choisissant convenablement l'état initial des déformations infiniment petites du système considéré, on peut à volonté réaliser soit l'une, soit l'autre des solutions fournies par la mécanique habituelle des solides invariables. Si l'état initial est différent des états  $(\mathcal{C}\mathcal{O})$ ,  $(\mathcal{C}'\mathcal{O}')$ , le problème est plus complexe à étudier : il est évidemment complexe d'essayer de distinguer, parmi les états de déformations, ceux qui réalisent soit l'une, soit l'autre de ces solutions.

L'objet de cette Note était d'ailleurs uniquement d'établir que, dans les cas d'indétermination des problèmes de frottement, *les diverses solutions doivent être acceptées au même titre, comme également réalisables, et que, par conséquent, il n'y a aucun choix à faire entre elles, tant que l'état initial des déformations n'est pas précisé.*

---



---

**SUR LES VOLUMES TOURNANTS ;**

PAR P. PAPILLON.

---

1. Aux nombreuses propriétés concernant les hélicoïdes, et dont Mannheim a énoncé un grand nombre au début de ses *Principes et développements de Géométrie cinématique*, il convient de joindre la suivante :

*Les contours fermés tracés sur l'hélicoïde central relatif à deux vecteurs donnent, en tournant autour de ceux-ci, des volumes de révolution en rapport constant.*

Telle est la conclusion à laquelle est parvenu M. A. Buhl dans un article récemment paru ici-même (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 5<sup>e</sup> série, t. II, juin-juillet 1924). Les lignes qui suivent ont pour objet la généralisation de cette propriété des hélicoïdes, des surfaces de révolution en particulier, propriété qui, il n'est pas inutile de le noter, ne dépend toujours que d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, linéaire.

2. *Position du problème.* — Considérons  $k$  axes

$$D_1, D_2, \dots, D_i, \dots, D_k,$$

arbitrairement distribués dans l'espace, et soient

$$V_1, V_2, \dots, V_i, \dots, V_k$$

les volumes de révolution engendrés par la rotation d'un contour fermé (C) autour de ces axes, respective-

ment; soit enfin  $J$  l'aire limitée à la projection du contour sur un plan donné (P).

Nous nous proposons de rechercher toutes les surfaces (S) sur lesquelles on peut tracer des contours (C) tels que l'on ait

$$(1) \quad m_1 V_1 + m_2 V_2 + \dots + m_i V_i + \dots + m_k V_k = n \cdot J,$$

les coefficients

$$m_1, m_2, \dots, m_i, \dots, m_k, n$$

étant des constantes données.

Pour former l'équation du problème, nous rapporterons l'espace à trois axes rectangulaires  $Ox, Oy, Oz$ , le plan  $xOy$  coïncidant avec le plan donné (P), en sorte que

$$J = \int \int_S dx dy.$$

Tout axe  $D_i$  sera déterminé par l'un quelconque de ses points  $A_i(a_i, b_i, c_i)$  et par ses paramètres directeurs  $\lambda_i, \mu_i, \nu_i$ . Rappelons alors l'expression générale du volume tournant engendré par une cloison (voir A. ВУНЛ, *Géométrie et Analyse des Intégrales doubles*, p. 24-25)

$$V = 2\pi \int \int_S \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda & \mu & \nu \\ x-a & y-b & z-c \end{vmatrix} d\sigma,$$

qui s'écrit encore, en mettant en évidence les coefficients  $-p, -q, +r$ , de la normale à (S),

$$V = 2\pi \int \int_S \begin{vmatrix} -p & -q & +r \\ \lambda & \mu & \nu \\ x-a & y-b & z-c \end{vmatrix} dx dy.$$

L'équation du problème, qui définit les surfaces (S),

s'écrit

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{i=k} m_i \begin{vmatrix} -p & -q & +1 \\ \lambda_i & \mu_i & \nu_i \\ x - a_i & y - b_i & z - c_i \end{vmatrix} = \frac{n}{2\pi},$$

la sommation s'étendant aux  $k$  axes précédemment considérés. Si nous posons

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} P = \sum_{i=1}^{i=k} m_i \lambda_i, \\ Q = \sum m_i \mu_i, \\ R = \sum m_i \nu_i, \\ L = \sum m_i (\nu_i b_i - \mu_i c_i), \\ M = \sum m_i (\lambda_i c_i - \nu_i a_i), \\ N = \sum m_i (\mu_i a_i - \lambda_i b_i) - \frac{n}{2\pi}, \end{array} \right.$$

l'équation (2) devient

$$(4) \quad p(L - Ry + Qz) + q(M - Pz + Rx) = N - Qx + Py.$$

3. *Résolution de l'équation (4).* — C'est là une équation aux dérivées partielles du premier ordre, linéaire. Le système à considérer pour l'intégrer est

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = Qz - Ry + L, \\ \frac{dy}{dt} = Rx - Pz + M, \\ \frac{dz}{dt} = Py - Qx + N, \end{array} \right.$$

$t$  étant une variable auxiliaire.

Nous n'insisterons pas sur la classique résolution de ce système; on se reportera, par exemple, au *Traité d'Analyse infinitésimale* de Rouché et Lévy, t. II,

p. 652 et suiv.). On trouve ainsi, sans grande difficulté,

$$(4) \quad \begin{cases} Px + Qy + Rz = (PL + QM + RN)t + \alpha, \\ R(PL + QM) - F^2(Py - Qx) - (P^2 + Q^2)N = \beta \cos F.t, \\ F(QL - PM) - FR(Px + Qy) + F(P^2 + Q^2)z = -\beta \sin F.t, \end{cases}$$

avec

$$F^2 = P^2 + Q^2 + R^2,$$

$\alpha$  et  $\beta$  étant des constantes arbitraires.

On en déduit, afin d'obtenir l'équation finie des surfaces (S),

$$\beta^2 = A^2 + B^2,$$

— A et B désignant respectivement, et pour abréger l'écriture, les premiers membres des deux dernières équations (4) — et

$$F.t = \text{Arc} \cos \frac{A}{\beta}$$

qui peut prendre la forme équivalente

$$(5) \quad t = \frac{1}{F} \text{Arc} \text{ tang} \frac{B}{A}.$$

En tenant alors compte de la première (4) et de (5), il vient :

$$Px + Qy + Rz = \frac{PL + QM + RN}{F} \text{Arc} \text{ tang} \frac{B}{A} + \alpha,$$

d'où, en liant  $\alpha$  et  $\beta$  par une relation arbitraire,

$$(6) \quad \begin{cases} Px + Qy + Rz = \frac{PL + QM + RN}{\sqrt{(P^2 + Q^2 + R^2)}} \text{Arc} \text{ tang} \frac{B}{A} + f(A^2 + B^2), \\ \text{avec} \\ A \equiv R(PL + QM) - (P^2 + Q^2 + R^2)(Py - Qx) - (P^2 + Q^2)N, \\ B \equiv \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}(QL - PM) - R(Px + Qy) + (P^2 + Q^2)z. \end{cases}$$

Telle est l'équation des surfaces (S).

4. *Interprétation géométrique de (6).* — Sous cette forme, la définition géométrique des surfaces (S) n'apparaît pas très clairement; mais effectuons le changement de coordonnées indiqué par la substitution orthogonale suivante :

$$\begin{cases} X = \left( \frac{Py - Qx}{\sqrt{P^2 + Q^2}} + \frac{(P^2 + Q^2)N - R(PL + QM)}{(P^2 + Q^2 + R^2)\sqrt{P^2 + Q^2}}, \right. \\ Y = \left( \frac{Px + Qy + Rz}{\sqrt{(P^2 + Q^2 + R^2)}}, \right. \\ Z = \left( \frac{R(Px + Qy) - (P^2 + Q^2)z}{\sqrt{(P^2 + Q^2)(P^2 + Q^2 + R^2)}} - \frac{QL - PM}{P^2 + Q^2 + R^2}, \right. \end{cases}$$

sur laquelle se vérifient les six relations fondamentales.

L'équation (6) devient :

$$(7) \quad Y = \frac{PL + QM + RN}{P^2 + Q^2 + R^2} \text{Arc tang } \frac{Z}{X} + F(X^2 + Y^2).$$

*Les surfaces (S) sont donc des hélicoïdes convenablement disposés par rapport aux axes D.*

On retrouve sur (7), ou sur (6), tous les cas particuliers indiqués dans l'article déjà mentionné, et jusqu'au plus simple d'entre eux, proposé au Certificat de Calcul différentiel et intégral à Toulouse (juillet 1923).

On remarquera enfin que si

$$(8) \quad PL + QM + RN = 0,$$

les hélicoïdes se réduisent à des surfaces de révolution.

Revenons au cas général; les hélicoïdes (S) admettent pour axe la droite

$$Z = 0, \quad X = 0,$$

soit, dans l'ancien système de coordonnées,

$$(9) \quad \begin{cases} R(Px + Qy) - (P^2 + Q^2)z = QL - PM, \\ (P^2 + Q^2 + R^2)(Py - Qx) = R(PL + QM) - (P^2 + Q^2)N. \end{cases}$$

§. *Cas particulier de  $n = 0$ .* — La relation (1) prend alors la forme plus simple

$$(1') \quad m_1 V_1 + m_2 V_2 + \dots + m_i V_i + \dots + m_k V_k = 0.$$

Nous allons donner une interprétation cinématique du résultat. Convenons de représenter chaque rotation par un vecteur situé sur l'axe de rotation, et dont la valeur est égale au coefficient  $m$  correspondant : ainsi, à la rotation autour de l'axe  $D_i$  correspondra le vecteur  $(V_i)$  de direction  $\lambda_i, \mu_i, \nu_i$ , et de valeur algébrique  $m_i$ . Dans cette hypothèse,

$$P, Q, R; L, M, N$$

représentent respectivement les composantes, suivant les axes, de la résultante du système des vecteurs  $(V)$ , et de son moment résultant par rapport à l'origine O.

**THÉORÈME.** — *L'axe hélicoïdal est axe central pour le système des vecteurs de rotation.*

On vérifie, en effet, simplement que les équations (9) sont en général équivalentes au système

$$\frac{L - Qz + Ry}{P} = \frac{M - Rx + Pz}{Q} = \frac{N - Px + Qy}{R}$$

dans lequel deux équations seulement sont indépendantes, et qui font connaître l'axe central d'un système de vecteurs. Ce raisonnement suppose d'ailleurs, et ceci est ultra-classique,

$$\begin{aligned} PL + QM + RN &\neq 0, \\ P^2 + Q^2 + R^2 &\neq 0. \end{aligned}$$

Signalons enfin que la condition (8) s'interprète aisément :

*Les surfaces (S) sont de révolution lorsque le*  
*Ann. de Mathémat.*, 5<sup>e</sup> série, t. III. (Juin 1925.) 27

*moment résultant est perpendiculaire à la résultante générale, en particulier lorsque l'un de ces deux vecteurs est nul.*

Ainsi, par exemple, les surfaces (S) sont de révolution si l'on a

$$a_i = b_i = c_i = 0,$$

c'est-à-dire si les axes de révolution sont concourants : on peut alors en effet prendre pour origine ce point de concours, auquel cas le moment est nul.

Nous sommes ainsi conduits, par des problèmes de volumes tournants, à tous les théorèmes généraux attachés à l'hélicoïde central d'un système de vecteurs.

## CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Ox, Oy, Oz étant trois axes rectangulaires, à un point M de coordonnées (x, y, z) on fait correspondre le plan P représenté par l'équation

$$y(X - x) + x(Y - y) + k(x, y)(Z - z) = 0,$$

k ne dépendant que de x et y. Soit  $\Gamma$  une courbe gauche telle que le plan osculateur en l'un quelconque de ses points coïncide avec le plan P associé à ce point, et soit  $\gamma$  la projection de  $\Gamma$  sur le plan xOy.

1° La fonction  $k(x, y)$  étant supposée donnée, former l'équation différentielle à laquelle satisfont les courbes  $\gamma$ . (On vérifiera que par un point quelconque du plan xOy passent deux courbes  $\gamma$ , soient  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ .)

2° Déterminer la fonction  $k(x, y)$  de manière qu'il existe des surfaces S dont toutes les lignes asymptotiques soient des courbes  $\Gamma$ . Cela fait :

a. Trouver les surfaces  $S$  pour lesquelles les courbes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont constamment confondues.

b. Trouver les surfaces  $S$  développables.

(Traiter a et b indépendamment l'un de l'autre.)

3° Déterminer  $k(x, y)$  de manière que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  soient constamment orthogonales; en particulier, de manière que les courbes  $\gamma_1$  soient des cercles de centre  $O$  et les courbes  $\gamma_2$ , leurs diamètres.

II. Trouver les fonctions monogènes analytiques

$$f(z) \equiv P(x, y) + iQ(x, y)$$

de la variable complexe  $x = x + iy$  telles que le rapport  $\frac{Q}{P}$  ne dépende que de la variable  $y$ .

(Poitiers, novembre 1924.)

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer l'intégrale définie

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos mx}{1 + x \cos x} dx,$$

où  $\alpha$  est un nombre réel compris entre 0 et 1 et  $m$  un entier.

(On cherchera, de préférence, à appliquer la méthode des résidus.)

Application numérique :

$$\alpha = \frac{3}{5}, \quad m = 2 \quad \text{et} \quad m = 10.$$

(Poitiers, novembre 1924.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. 1° La caractéristique du plan  $P$  associé au point courant de  $\Gamma$  est contenue dans le plan

$$y'(X - x) + x'(Y - y) + \left( \frac{\partial k}{\partial x} x' + \frac{\partial k}{\partial x} y' \right) (Z - z) - (yx' + xy' + kz') = 0,$$

les dérivées étant prises par rapport au paramètre représentatif de  $\Gamma$ . Pour que cette caractéristique soit la tangente

de  $\Gamma$ , il faut et il suffit que l'on ait

$$yx' + xy' + kz' = 0,$$

$$2x'y' + \left( \frac{\partial k}{\partial x} x' + \frac{\partial k}{\partial y} y' \right) z' = 0.$$

On tire de là l'équation différentielle

$$\left( x \frac{dy}{dx} + y \right) \left( \frac{\partial k}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial k}{\partial x} \right) - 2k \frac{dy}{dx} = 0$$

qui définit les courbes  $\gamma$ ; cette équation une fois intégrée, les courbes  $\Gamma$  se déterminent par une quadrature.

2° Les surfaces  $S$  satisfont à l'équation aux différentielles totales

$$y dx + x dy + k(x, y) dz = 0.$$

Pour qu'elle soit complètement intégrable, on doit avoir

$$k = f(xy).$$

a. On a  $(xyf' - f)^2 = x^2 y^2 f'^2$ ; d'où  $f = a \sqrt{xy}$  ( $a$  const.).

b. Il faut  $\frac{D}{D(x, y)} \left( \frac{k}{x}, \frac{k}{y} \right) = 0$ , soit encore  $2xyf' = f$ , et l'on retrouve le résultat de  $a$ , comme il était évident *a priori*. Les surfaces  $S$  sont des cônes,

$$z = -2a \sqrt{xy} + \text{const.}$$

3° On trouve  $k = \varphi(x^2 - y^2)$  et, dans le cas particulier,

$$\varphi = b \sqrt{x^2 - y^2} \quad (b \text{ const.}).$$

II Si l'on prend  $P = YQ$ , on trouve

$$Y \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad Y \frac{\partial Q}{\partial y} + Y' Q = - \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

La condition d'intégrabilité donne

$$-Y' = \alpha(Y^2 + 1), \quad \text{d'où} \quad Y = \cot \alpha (y - y_0),$$

puis

$$Q = e^{a(x-x_0)} \sin \alpha (y - y_0), \quad P = e^{a(x-x_0)} \cos \alpha (y - y_0)$$

et

$$f(z) = e^{a(z-z_0)} \quad (a \text{ const. réelle}).$$

$$\text{ÉPREUVE PRATIQUE. — } I = \frac{\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}} \left( \frac{-1 + \sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} \right)^m.$$

*Application numérique.* —  $I_1 = 0,43634$ ;  $I_2 = 0,00066504$ .

### BIBLIOGRAPHIE.

LEÇONS DE GÉOMÉTRIE VECTORIELLE, préliminaires à l'étude de la Théorie d'Einstein, par *G. Bouligand*. 1 vol. 25 × 16, 5 de VIII-356 pages. Vuibert, 1924. Prix : 25<sup>fr</sup>.

Ces Leçons dépassent beaucoup le cadre classique des traités d'Analyse vectorielle. L'auteur n'a point limité son programme à l'exposé des méthodes de calcul intrinsèque, mais il a su rattacher au développement même de ces méthodes l'étude, présentée sous une forme très suggestive, des théories les plus fécondes de la Géométrie actuelle. Aussi, dans cet Ouvrage, l'étudiant ne trouvera-t-il pas seulement à acquérir la pratique du nouveau calcul. Il assurera encore, et sur des bases extrêmement solides, sa formation scientifique. Il verra en particulier, sur bien des exemples, comment le progrès des mathématiques peut dépendre des rapprochements établis entre théories qui, à première vue, pouvaient paraître très éloignées.

L'Ouvrage se divise en trois Parties où l'auteur envisage, successivement, les opérations vectorielles en géométrie linéaire, en géométrie métrique et les opérations infinitésimales. La distinction ainsi faite entre les points de vue *linéaire* et *métrique* dégage, avec une parfaite netteté, le rôle fondamental, en géométrie métrique, d'une forme quadratique invariante. Le lecteur est ainsi préparé, dès le début du Livre, aux généralisations qui jouent un rôle si essentiel dans la théorie de la relativité. Il comprendra d'autre part toute

l'importance de l'étude des groupes de transformations et sera amené à réfléchir sur les principes de la Géométrie : une intéressante Note sur ce sujet termine d'ailleurs le Volume.

L'étude des opérations infinitésimales occupe, naturellement, la plus grande partie de ces Leçons, avec des applications nombreuses et très variées. Un substantiel exposé des théories fondamentales de la Géométrie différentielle met en relief, de façon particulièrement heureuse, les avantages de la méthode vectorielle. Bien des détails retiennent l'attention et il faut au moins signaler quelques pages sur la construction abstraite et autonome d'une géométrie à deux dimensions, pages où sont clairement distingués les points de vue de Riemann et de M. Weyl. Nous sommes ici tout près de la théorie de la relativité et deux des Notes qui terminent le Livre (sur le Calcul tensoriel et sur les multiplicités de Riemann à plus de deux dimensions) sont une introduction directe à cette étude.

Mais ce serait restreindre la portée du Livre que d'y voir seulement un préliminaire à l'étude de la Théorie d'Einstein. En l'écrivant, l'auteur a certainement songé, avant tout, aux étudiants qui se préparent à l'enseignement et à la nécessité pour eux d'une culture mathématique vraiment compréhensive. Nos lecteurs, qui ont pu apprécier la collaboration de M. Bouligand à cette Revue, n'auront pas de peine à imaginer l'intérêt que présentent, à cet égard, les présentes Leçons de géométrie vectorielle.

J. P.

## SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2470.

(1922-1924, p. 315.)

Soit PQR un triangle équilatéral circonscrit à une parabole, QR touchant la courbe en son sommet S, PQ la touchant en M, PR en N. Soient F le foyer de la parabole et KL la corde focale perpendiculaire à l'axe, K et M

étant du même côté de l'axe. Soient B le point commun à SK et FM, C le point commun à SL et FN. Soit enfin A le point commun à BN et CM. Démontrer que :

1° FM passe par R, FN par Q;

2° Le triangle évidemment isocèle ABC est rectangle en A;

3° AQ et AR sont les deux trisectrices de l'angle BAC; BP et BR celles de l'angle ABC, CP et CQ celles de l'angle ACB.

J. A. MOREN.

1° Le foyer F de la parabole  $\Sigma$  est sur le cercle circonscrit  $\Gamma$  et la droite de Simson de ce point par rapport à ABC est la tangente au sommet, donc F est diamétralement opposé à P sur  $\Gamma$ .

FQ rencontre AR en N; comme FR est bissectrice de l'angle PFN et de plus perpendiculaire sur PN,

$$PR = RN,$$

et par suite, d'après la propriété de la sous-tangente, N est le point de contact de PR avec la parabole. Par symétrie FR rencontre PQ en M, point de contact de PQ avec  $\Sigma$ .

2° et 3° Si IJ est le diamètre de  $\Gamma$  parallèle à QR, KS passe par J; si d'autre part  $N_1$  est l'intersection de FR avec IJ, on a

$$\frac{\overline{BN_1}}{\overline{BF}} \times \frac{\overline{SF}}{\overline{SO}} \times \frac{\overline{JO}}{\overline{JN_1}} = +1 \quad \text{avec} \quad \frac{\overline{JO}}{\overline{JN_1}} = -\frac{\sqrt{3}+1}{2};$$

et par suite,

$$\frac{\overline{BN_1}}{\overline{BF}} = \frac{2}{\sqrt{3}+1},$$

d'où

$$\frac{\overline{BR}}{\overline{BF}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{PR}{PF},$$

donc B est le centre du cercle ex-inscrit dans l'angle F au triangle PFN. JR rencontre OF en A centre du cercle ex-inscrit dans l'angle R au triangle FRN, d'où il résulte que A, N et B sont en ligne droite. Par symétrie A, M et C sont en ligne droite.

Or on sait que

$$\widehat{FAN} = 90^\circ - \frac{\widehat{FRN}}{2} = 45^\circ,$$

$$\widehat{PBN} = 90^\circ - \frac{\widehat{PFN}}{2} = 30^\circ.$$

D'autre part,

$$\widehat{FAR} = 15^\circ.$$

Ces trois relations mettent en évidence les propriétés indiquées.

G. ROY.

### QUESTIONS PROPOSÉES.

2479. Une quartique bicirculaire ayant un point double  $O$  à distance finie admet deux foyers non singuliers réels  $F$  et  $F'$ .

Démontrer que les cordes de cette courbe, portées par  $OF$  et  $OF'$ , sont égales.

2480. Toute surface algébrique du troisième ordre fait partie de l'enveloppe de ses surfaces diamétrales.

2481. L'enveloppe des surfaces diamétrales de la surface :  $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$  se décompose en cinq surfaces algébriques distinctes.

2482. Pour une quartique gauche unicursale  $\Gamma$  (quartique de Steiner) deux quelconques des quatre conditions suivantes sont équivalentes :

Les quatre points de  $\Gamma$  où le plan osculateur est stationnaire forment un groupe équiharmonique.

Les points de contact des plans osculateurs menés à  $\Gamma$  par un point quelconque de la courbe sont en ligne droite.

Les points de contact des quatre plans osculateurs stationnaires sont dans un même plan.

Il existe une infinité de trièdres dont les arêtes sont tangentes à  $\Gamma$ .

A. LABROUSSE.

---



---

**SUR UNE CLASSE DE FONCTIONS ENTIÈRES ;**

PAR G. VALIRON.

---

Je rappellerai d'abord les propriétés, d'ailleurs faciles à retrouver, d'une des fonctions introduites par Jacobi dans la théorie des fonctions elliptiques. Si l'on pose

$$S(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} z^n \quad (|q| < 1),$$

on a

$$S(z) = S\left(\frac{1}{z}\right)$$

et

$$(1) \quad S(z) = zqS(zq^2),$$

ce qui montre que la fonction est de la forme suivante :

$$S(z) = A \prod_0^{\infty} (1 + zq^{2n+1}) \left(1 + \frac{q^{2n+1}}{z}\right),$$

A étant une constante <sup>(1)</sup>. Dans le domaine

$$|q| < |z| < |q|^{-3},$$

$S(z)$  est donc holomorphe et ne s'annule qu'au point  $z = -\frac{1}{q}$ , c'est cette propriété qui sera utilisée.

Les fonctions entières que nous allons considérer sont de la forme

$$(2) \quad f(z) = \sum_0^{\infty} g(p) q^{p^2} z^p \quad (|q| < 1),$$

---

<sup>(1)</sup> Voir le *Traité d'Analyse* de Jordan (3<sup>e</sup> édition), t. II, p. 483.  
*Ann. de Mathémat.*, 5<sup>e</sup> série, t. III. (Juillet 1925.) 28

$g(x)$  étant une fonction réelle ou complexe de l'entier  $x$  vérifiant la condition

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)g(x+2)}{[g(x+1)]^2} = 1.$$

On se propose d'étudier les valeurs prises par  $f(z)$  dans le voisinage du point à l'infini et à cet effet de ramener le cas où  $g(x)$  est quelconque à celui où cette fonction est égale à 1; plus précisément de comparer les valeurs de  $f(z)$  et de  $S(z)$ . L'idée directrice est celle qui a été introduite dans ces questions par M. Borel : pour les grandes valeurs de  $z$  la valeur de la fonction est donnée approximativement par un groupe de termes entourant le terme maximum. Nous poserons donc

$$(4) \quad z = q^{-2n} \frac{g(n-1)}{g(n)} Z$$

et nous supposons que le point  $Z$  décrit la couronne  $C$

$$q' < |Z| < q'^{-1} |q|^{-2} \quad (|q| < q' < 1).$$

$Z$  étant dans  $C$  et  $n$  prenant les valeurs entières successives supérieures à un certain nombre  $n_0$ , le point  $z$  défini par (4) balaye l'extérieur d'un certain cercle  $\Gamma$ ,  $|z| > r_0$ . Les valeurs prises par  $f(z)$  à l'extérieur de ce cercle  $\Gamma$  sont les valeurs prises dans  $C$  par la suite des fonctions holomorphes dans  $C$

$$f_n(Z) = f \left[ q^{-2n} \frac{g(n-1)}{g(n)} Z \right].$$

Nous ne considérerons pas ces fonctions directement, mais les fonctions

$$g_n(Z) = f_n(Z) \frac{1}{g(n) q^{n^2} z^n},$$

$z$  étant toujours défini par (4). On a

$$g_n(Z) = \sum_{m=-n}^{+\infty} g(n, m) q^{m^2} z^m$$

avec

$$g(n, m) = \frac{g(n+m)[g(n+1)]^m}{[g(n)]^{m+1}}.$$

De la condition (3) on déduit aisément que,  $\varepsilon$  étant arbitrairement petit, le module de  $g(n, m)$  est égal à  $(1 + \theta\varepsilon)^{m^2}$  dès que  $n$  est assez grand ( $|\theta| < 1$ ). Par suite  $g_n(Z)$  tend uniformément vers  $S(Z)$  lorsque  $n$  croît indéfiniment et que  $Z$  est intérieur à  $C$ . On obtient donc l'égalité

$$(5) \quad f(z) = [S(Z) + \varepsilon(Z)] g(n) q^{n^2} z^n,$$

$\varepsilon(Z)$  tendant uniformément vers zéro dans  $C$ , c'est-à-dire une valeur asymptotique de  $f(z)$ , sauf dans le voisinage des points correspondant à  $-\frac{1}{q}$ . Mais on a en outre une valeur approchée des zéros de  $f(z)$  et d'une façon générale des zéros de  $f(z) - P(z)$ ,  $P(z)$  étant un polynôme. Car, d'après la condition (3),  $g(n)$  est égal à  $e^{\varepsilon n^2}$  ( $\varepsilon$  étant arbitrairement petit) le second facteur du second membre de (5) croît donc indéfiniment plus rapidement que toute puissance de  $z$  et les zéros de  $f(z) - P(z)$  sont donnés par l'équation

$$S(Z) = \varepsilon_1(Z)$$

dont le second membre reste aussi petit que l'on veut à l'intérieur de  $C$  pourvu que  $n$  soit assez grand. D'après un théorème connu et généralement attribué à Rouché (1), cette équation a une seule racine dans  $C$

---

(1) Voir le *Cours d'Analyse* de M. Goursat (3<sup>e</sup> édition), t. II, p. 121.

égale à  $-q^{-1}(1 + r_n)$  et par suite les zéros de  $f(z) - P(z)$  dont le module est supérieur à un certain nombre dépendant de  $P(z)$  sont les points

$$-q^{-2n-1} \frac{g(n-1)}{g(n)} (1 + r_n) \quad (\lim r_n = 0),$$

dont les modules vont en croissant. Ces zéros sont distribués sur une courbe qui se comporte dans les couronnes R, KR (K fini) comme une spirale logarithmique. [Pour une même fonction  $f(z)$  les zéros des fonctions  $f(z) - P(z)$  sont d'ailleurs liés par une relation beaucoup plus serrée que celle trouvée ici.]

Lorsque  $q$  et  $g(x)$  sont réels et  $P(z)$  à coefficients réels les zéros obtenus sont réels puisque leurs modules sont distincts, *il n'y a qu'un nombre fini de zéros complexes*. Il en est de même pour les zéros de  $f(zq) - P(z)$  lorsque  $g(x)$  et  $P(z)$  sont réels et  $q$  imaginaire pure.

Certaines des fonctions (2) vérifient des équations fonctionnelles linéaires simples.  $f_1(z)$  correspondant à  $g(x) = 1$  est solution de l'équation

$$(6) \quad zq \varphi(zq^2) = \varphi(z) - 1$$

dont la résolution est ramenée (en posant  $\varphi = f_1 + \psi$ ) à celle de l'équation (1) de  $S(z)$ , la solution générale est donc

$$\varphi = f_1(z) + S(z)G(z),$$

$G(z)$  étant une fonction invariante par la substitution  $(z, zq^2)$ . La fonction  $f_2(z)$  correspondant à

$$g(0) = 1, \quad g(n) = \frac{1}{n!}$$

vérifie l'équation différentielle fonctionnelle

$$(7) \quad \varphi'(z) = q \varphi(zq^2).$$

Les équations obtenues en ajoutant un polynome au second membre de (6) et (7) admettent respectivement pour solutions  $\lambda f_1(z) + P(z)$  et  $f_2(z) + P(z)$ . En prenant  $g(0) = 1$  et  $g(n) = n!$  on obtient une fonction  $f_3(z)$  solution de l'équation encore très simple, mais d'un type différent du précédent

$$z^2 \varphi'(z) + z \varphi(z) = q \varphi\left(\frac{z}{q}\right) - q.$$

On formera de même les équations vérifiées par les fonctions obtenues en prenant  $g(n)$  égal à  $(n!)^p$ ,  $p$  étant entier. Parmi les autres fonctions simples de la forme (1) figureront naturellement les dérivées et primitives successives des fonctions précédentes, mais aussi les primitives généralisées (multipliées par une puissance convenable de  $z$ ) de ces fonctions, par exemple les fonctions correspondant à  $g(x) = \frac{1}{\Gamma(x+a)}$ ,  $\Gamma$  étant la fonction eulérienne de seconde espèce et  $a$  ayant sa partie réelle positive.

Les méthodes de Laguerre <sup>(1)</sup> permettent de reconnaître que, pour ces fonctions particulières, *les zéros sont tous réels lorsque  $q$  est réel.*

**SUR QUELQUES ÉQUATIONS NON LINÉAIRES  
AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE;**

PAR A. BUHL.

J'examine ci après quelques problèmes à énoncés  
géométriques qui entraînent des équations non

<sup>(1)</sup> *Journal de Math.*, 1883; *Acta math.*, 1884.

*linéaires* aux dérivées partielles du premier ordre. Il n'est pas absolument aisé de trouver de tels problèmes si l'on veut qu'ils soient explicitement accessibles à la méthode d'intégration, au moins jusqu'à l'obtention de l'intégrale complète. Et ce n'est que dans ce cas qu'ils ont une valeur pédagogique, qu'on peut les proposer aux élèves comme exercices ou comme problèmes d'examen.

Les exemples qui suivent ont justement servi à illustrer mon Cours d'Analyse de la Faculté des Sciences de Toulouse. Ils n'ont évidemment point de hautes prétentions mais peuvent, il me semble, avoir celle de s'ajouter naturellement à des Recueils d'Exercices tels que ceux de Frenet ou de Tisserand.

Les dernières questions nous ramènent à des sujets déjà traités dans les *Nouvelles Annales* (octobre 1923, juin 1924) par l'auteur et par M. Vincensini (janvier 1925). Il s'agit de volumes tournants proportionnels à l'aire d'une cloison génératrice.

1. *Généralités.* — Rappelons, sans démonstration, que l'intégration de l'équation

$$(1) \quad F(x, y, z, p, q) = 0$$

repose sur la considération du système

$$(2) \quad \frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{-dp}{F_x + pF_z} = \frac{-dq}{F_y + qF_z}$$

dont il convient de trouver *une* intégrale

$$(3) \quad \Phi(x, y, z, p, q) = a.$$

De (1) et (3) on peut alors tirer  $p$  et  $q$  et former

$$(4) \quad dz = p dx + q dy.$$

C'est là une équation aux différentielles totales toujours intégrable car le système (2) a précisément été formé pour exprimer son intégrabilité. L'intégration de (4) introduit une nouvelle constante arbitraire  $b$ , d'où, pour (1), *l'intégrale complète*

$$(5) \quad \varphi(x, y, z; a, b) = 0.$$

L'enveloppe à deux paramètres,  $a, b$ , de cette famille de surfaces est *l'intégrale singulière* de (1); l'enveloppe, à un seul paramètre  $b = \psi(a)$  est *l'intégrale générale*, laquelle dépend de la fonction arbitraire  $\psi(a)$ .

L'intégrale complète (5) possède, à la fois, les propriétés géométriques traduites par les équations (1) et (3). Ainsi, pour les équations

$$(6) \quad F(z, p, q) = 0,$$

le système (2) donne immédiatement l'intégrale

$$(7) \quad \alpha p + \beta q = 0.$$

Celle-ci représente des cylindres à génératrices parallèles à la direction  $\alpha, \beta, 0$ . Une intégrale complète d'une équation (6) est donc ainsi constituée par une certaine famille de cylindres.

Rappelons encore qu'une intégrale complète peut être obtenue sans passer par toute l'analyse précédente. Ainsi, pour l'équation des surfaces développables,

$$(8) \quad F(p, q) = 0,$$

on a

$$z = ax + by + c$$

avec  $a$  et  $b$  liés par  $F(a, b) = 0$ .

De même, à l'équation

$$(9) \quad F(x, p) + G(x, q) = 0,$$

on fait immédiatement correspondre une intégrale complète en posant

$$F(x, p) = a, \quad G(x, q) = -a.$$

2. *Notations géométriques.* — Soit M un point d'une surface S rapportée à trois axes rectangulaires  $Oxyz$ . En M, nous considérerons une normale MN, à S, perçant  $Oxy$  en N. La projection de M sur  $Oxy$  sera P. Dans le plan MNP, nous considérerons aussi une tangente MT, à S, laquelle percera  $Oxy$  en T. On aura

$$(10) \quad NP = z \sqrt{p^2 + q^2}, \quad PT = \frac{z}{\sqrt{p^2 + q^2}}.$$

Ces formules généralisent les notions de sous-normale et de sous-tangente relatives aux courbes planes.

3. *Surfaces telles que le rectangle de diagonale PN et de côtés respectivement parallèles à Ox et Oy ait une aire constante  $k^2$ .* — Le point N ayant pour coordonnées  $x + pz$  et  $y + qz$ , on a immédiatement, pour l'équation aux dérivées partielles des surfaces en question,

$$(11) \quad pqz^2 = k^2.$$

Cette équation est du type (6). L'intégrale complète est

$$z^2 = 2k \left( ax + \frac{y}{a} \right) + b.$$

L'intégrale générale dépend de l'élimination de  $a$  entre les deux équations

$$z^2 = 2k \left( ax + \frac{y}{a} \right) + \psi(a),$$

$$0 = 2k \left( x - \frac{y}{a^2} \right) + \psi'(a).$$

Pour  $\psi(a)$  polynome, on pourrait certainement avoir une riche moisson de surfaces algébriques jouissant de la propriété indiquée. Pour  $\psi(a) = C^2$ , on a ainsi

$$(z^2 - C^2)^2 = 16k^2 xy.$$

On peut aussi étudier (11) en posant  $u = z^2$ , ce qui ramène l'équation à la forme

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = 4k^2 \quad \text{ou} \quad pq = 4k^2.$$

On est alors ramené à l'étude de surfaces développables.

4. *Surfaces telles que le rectangle de diagonale PN, déjà considéré, ait même aire que le rectangle analogue de diagonale OP.* — L'équation aux dérivées partielles est

$$(12) \quad pqz^2 = xy.$$

Ici il est encore indiqué de poser  $u = z^2$ , ce qui ramène l'équation à la forme

$$(13) \quad pq - 4xy = 0.$$

Pour cette dernière le système (2) est

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dp}{4y} = \frac{dq}{4x}$$

et donne, entre autres combinaisons possibles,

$$4x^2 - q^2 = a,$$

d'où, en tenant compte de (13),

$$p = \frac{4xy}{\sqrt{4x^2 - a}}, \quad q = \sqrt{4x^2 - a}.$$

Formant (4), on a immédiatement

$$u = z^2 = y\sqrt{4x^2 - a} + b$$

et ceci est bien une intégrale complète de (13), mais nous sommes précisément dans un cas qui permet de montrer que le hasard des combinaisons intégrables, dans un système (2), vaut souvent moins que quelque méthode plus particulière mais intuitivement adaptée à l'équation à intégrer. Ainsi (13) peut s'écrire

$$\frac{p}{2x} = \frac{2y}{q},$$

ce qui est du type (9). Soit  $a$  la valeur commune de ces rapports; on a immédiatement

$$u = z^2 = ax^2 + \frac{y^2}{a} + b$$

et ceci est bien encore une intégrale complète mais beaucoup plus maniable que celle trouvée d'abord. Pour avoir l'intégrale générale de (12), il reste à éliminer  $a$  entre les deux équations

$$z^2 = ax^2 + \frac{y^2}{a} + \psi(a),$$

$$0 = x^2 - \frac{y^2}{a^2} + \psi'(a).$$

Là encore, pour  $\psi(a)$  polynome, de nombreuses surfaces algébriques peuvent être obtenues. Ainsi, pour  $\psi(a) = C$ , on a

$$z^2 = 2xy + C.$$

Pour  $\psi(a) = a + C$ , on a

$$(z^2 - C)^2 = 4y^2(x^2 + 1).$$

Remarquons au moins les quadriques dont l'énoncé donne une propriété simple.

5. Surfaces telles que  $\overline{NP} = \mu \cdot \overline{OP}$  si  $\mu$  est un facteur constant. — On a immédiatement

$$z^2(p^2 + q^2) = \mu^2(x^2 + y^2).$$

Il est encore indiqué de poser  $u = z^2$ , ce qui ramène l'équation à la forme

$$p^2 + q^2 = 4\mu^2(x^2 + y^2).$$

Celle-ci est encore du type (9) et il suffit de poser

$$p^2 - 4\mu^2x^2 = 4\mu^2y^2 - q^2 = 4a^2\mu^2$$

pour avoir l'intégrale complète

$$\frac{u}{2\mu} = \frac{z^2}{2\mu} = \int \sqrt{x^2 + a^2} dx + \int \sqrt{y^2 - a^2} dy + b.$$

Les quadratures sont faciles mais peu maniables.

Ce problème conduit à des réflexions opposées à celles du paragraphe précédent.

Ici l'intégrale complète a été trouvée très simplement mais il ne s'ensuit pas qu'elle soit très simple.

Si, pour l'équation du présent paragraphe, on forme le système (2), des combinaisons simples conduisent à l'intégrale complète

$$\frac{z^2}{\mu} = (x^2 - y^2) \sin z + 2xy \cos z + \beta$$

beaucoup plus maniable, beaucoup plus aisée, à étudier, au point de vue géométrique, que celle déjà obtenue.

On voit qu'on ne peut pas se considérer comme pleinement satisfait lorsque, *par une seule méthode*, on a obtenu une première intégrale complète d'une équation (1); reste à savoir si une seconde, plus avantageuse, ne serait pas engendrée par une autre méthode.

6. *Surfaces définies par une propriété quelconque, mais intrinsèque, du triangle MNT.* — Une telle propriété du triangle MNT peut évidemment toujours se traduire par une relation entre les segments NP et PT exprimés en (10). L'équation aux dérivés partielles des surfaces S en litige sera donc de la forme

$$(14) \quad p^2 + q^2 = \Phi(z).$$

Cette équation exprime aussi que les surfaces S sont coupées par tous les plans parallèles à  $Oxy$  sous un angle qui est constant tout le long d'une même section. Ces sections sont donc des lignes de courbures pour la surface. Tout ceci rend le problème abordable de plusieurs manières et n'aboutit qu'à des *moulures* engendrées par une courbe plane quelconque dont le plan roule sur un cylindre quelconque de génératrices parallèles à  $Oz$ . Au point de vue géométrique, ceci est élégamment discuté dans les *Leçons sur les applications géométriques de l'Analyse* de Louis Raffy (p. 166). Au point de vue analytique l'équation (14) est du type (6); l'intégrale complète est

$$\int \frac{dz}{\Phi(z)} = x \cos z + y \sin z + \beta.$$

On peut en déduire facilement les propriétés géométriques indiquées. Un cas particulièrement important est celui où  $\Phi(z)$  se réduit à une simple constante; on a alors la surface dont le plan tangent fait un angle constant avec un plan fixe qui est ici le plan  $Oxy$ . C'est l'hélicoïde développable, lieu des tangentes à une hélice tracée sur un cylindre *quelconque* de génératrices parallèles à  $Oz$ .

7. *Surfaces telles que la plus courte distance de*

la normale et d'une droite fixe soit fonction donnée de l'angle de ces droites. — Prenons la droite fixe pour axe  $Oz$ ; l'équation aux dérivées partielles des surfaces demandées est

$$(15) \quad py - qx = f(p^2 + q^2).$$

Les deux derniers membres du système (2) donnent

$$(16) \quad p^2 + q^2 = \text{const.} = \text{tang}^2 \varepsilon.$$

Nous aurons donc une intégrale complète constituée par des hélicoïdes développables dont le cylindre de base  $\Gamma$  aura ses génératrices parallèles à  $Oz$ . Mais la normale à un tel hélicoïde est tangente à  $\Gamma$  et sa distance à  $Oz$

$$\frac{py - qx}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \frac{f(\text{tang}^2 \varepsilon)}{\text{tang} \varepsilon} = \frac{\eta}{\text{tang} \varepsilon} = R$$

est une certaine constante. Le cylindre base  $\Gamma$  est donc un cylindre circulaire, d'axe  $Oz$  et de rayon

$$R = \eta \cot \varepsilon.$$

Le calcul confirme aisément tout ceci. De (15) et (16) on tire  $p$  et  $q$ , on forme  $dz$ , d'où, en coordonnées semi-polaires et par une intégration immédiate,

$$(17) \quad \frac{z}{\eta} = C - \theta + \int \sqrt{\frac{\text{tang}^2 \varepsilon}{\eta^2} r^2 - 1} \frac{dr}{r}.$$

C'est bien là un hélicoïde, de *pas réduit*  $\eta$ . Il faut montrer que ses sections, par des plans de cote  $z$  constante, sont des développantes de cercle toutes égales entre elles.

Soit  $MT$  une tangente à un cercle de rayon  $OA$ . Le point  $M$  est censé décrire la développante, le segment  $MT$  étant égal à l'arc  $AT$ . La tangente en  $M$  à la

développante fait avec le rayon vecteur OM un angle V égal à l'angle MOT, si bien que l'équation

$$r \cos V = R \quad \text{ou} \quad d\theta = \sqrt{\frac{r^2}{R^2} - 1} \frac{dr}{r}$$

d'après

$$\text{tang } V = \frac{r}{r'}$$

doit définir les développantes en question; c'est ainsi qu'on les reconnaît dans (17).

Quant à passer de l'intégrale complète (17) à l'intégrale générale de (15), ce sera, le plus souvent, impraticable. Il faudrait, dans (17), remplacer  $\eta$  par  $f(\text{tang}^2 \varepsilon)$ , puis C par une fonction arbitraire de  $\varepsilon$ , soit  $C(\varepsilon)$ , puis chercher l'enveloppe, pour  $\varepsilon$  variable, de la famille d'hélicoïdes développables ainsi constituée. Dans (17), l'intégration en  $r$  est facile mais complique plutôt l'aspect des choses. Malgré ces difficultés, nous allons examiner deux équations (15) particulières comme répondant, tout au moins, à des problèmes à énoncés remarquables.

8. *Surfaces dont la normale touche un cylindre de révolution.* — C'est là un problème bien connu mais qui doit être brièvement rappelé comme étant l'un des plus simples donnant lieu à une équation du type (15). On a alors, R étant le rayon constant du cylindre,

$$f(p^2 + q^2) = R \sqrt{p^2 + q^2}, \quad \eta = f(\text{tang}^2 \varepsilon) = R \text{ tang} \varepsilon.$$

L'intégrale complète (17) devient

$$z = R \text{ tang} \varepsilon \left( C - \theta + \int \sqrt{\frac{r^2}{R^2} - 1} \frac{dr}{r} \right).$$

Ici l'enveloppe, avec  $C(\varepsilon)$  pour C, se compose de

développantes de cercles analogues à celles de l'intégrale complète. Ceci tient à ce que l'intégrale générale donne toujours des moulures dont le cylindre base est le cylindre de révolution donné; c'est là le fait qui était connu d'avance ou bien facile à prévoir.

9. *Surfaces sur lesquelles on peut détacher des cloisons d'aire S, à contour quelconque, donnant, avec Oz comme axe de rotation, des volumes tournants V tels que  $V = aS$ .* — L'équation du problème est

$$(18) \quad \begin{aligned} V &= 2\pi \int \int_S (py - qx) dx dy \\ &= a \int \int_S \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy. \end{aligned}$$

Bien que l'expression de V soit aisée à obtenir, on peut se reporter, à cet égard, à mon opuscule *Géométrie et Analyse des Intégrales doubles* (p. 25). Comme l'équation intégrale (18) doit être vraie quelle que soit la cloison S, elle donne l'équation aux dérivées partielles

$$(19) \quad py - qx = \frac{a}{2\pi} \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

qui est encore du type (15). On a

$$\eta = f(\tan^2 \varepsilon) = \frac{a}{2\pi \cos \varepsilon}, \quad R = \eta \cot \varepsilon = \frac{a}{2\pi \sin \varepsilon};$$

d'où

$$(20) \quad a = \frac{2\pi \eta R}{\sqrt{\eta^2 + R^2}}.$$

L'intégrale complète (17) devient ici

$$(21) \quad 2\pi z \cos \varepsilon = a(C - \theta) + \int \sqrt{4\pi^2 r^2 \sin^2 \varepsilon - a^2} \frac{dr}{r}.$$

Le pas réduit  $\eta$  étant appelé  $h$ , cet hélicoïde développable est celui que donne M. P. Vincensini dans un récent et intéressant article *Sur une propriété de la développante du cercle et de l'hélicoïde développable* (*N. A.*, janvier 1925). La formule (20) est de M. Vincensini. *Théoriquement*, les surfaces  $S$  comprennent non seulement les hélicoïdes (21) mais toutes leurs enveloppes pour  $\varepsilon$  variable et  $C$  remplacé par  $C(\varepsilon)$ . Ces surfaces  $S$  forment une famille dépendant d'une fonction arbitraire. Mais *pratiquement* de telles enveloppes ne semblent pas aisées à expliciter et le résultat de M. Vincensini gagne en importance comme étant, quoique très particulier, le seul peut-être qu'on puisse facilement se représenter au point de vue géométrique.

**SOLUTION DU PROBLÈME DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES  
(AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, 1922).**

I. *Étant donnés trois points A, B, C, on propose de déterminer un point D tel que les faces du tétraèdre ABCD aient des aires équivalentes.*

*On calculera, en fonction des côtés a, b, c, et des angles A, B, C, du triangle ABC, le rayon de la sphère inscrite, celui de la sphère circonscrite, le volume, les cosinus ou les sinus des dièdres ou des demi-dièdres du tétraèdre ABCD (ordre laissé à la disposition des candidats).*

II. *Les sommets AB restant fixes :*

*Où doit-être le point H, orthocentre du triangle*

ABC, pour que les dièdres du tétraèdre ABCD soient tous aigus ?

Quel est le lieu du point H quand les orthocentres des quatre faces du tétraèdre sont dans un même plan ?

III. Soient deux sphères concentriques, S et s, de rayons R et r. A quelles conditions existe-t-il des tétraèdres T dont les sommets sont sur la sphère S et dont les plans des faces sont tangents à la sphère s ? Examiner si ces tétraèdres T ont leurs faces équivalentes. Comment faut-il choisir une droite  $\Delta$  pour qu'elle soit une arête d'un tétraèdre T ?

IV. Les sphères S et s étant données, que peut-on dire des centres de gravité et des orthocentres des faces de tous les tétraèdres T qui sont inscrits dans S et circonscrits à s ?

Le plan de la face BCD et le sommet A étant fixés, étudier le déplacement des arêtes CD, DB, BC.

Étudier les sphères  $\Sigma$  autres que s tangentes aux plans des faces d'un tétraèdre T et, en particulier, la disposition des centres de ces sphères.

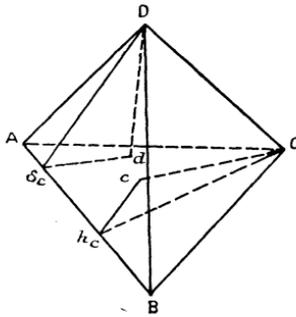
Soit A' le centre de celle des sphères ex-inscrites à l'un quelconque des tétraèdres T, qui est placé au delà de la face BCD par rapport au sommet A. Démontrer que la distance de ce point A' au centre  $\omega$  de l'une des circonférences tangentes aux trois côtés du triangle BCD est dans un rapport constant avec le rayon de cette circonférence.

SOLUTION PAR MM. CHAZEL ET CONVERS.

Avant d'aborder directement le problème, nous allons étudier quelques propriétés d'un tétraèdre ABCD satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

Remarquons en premier lieu que les quatre hauteurs  $Aa$ ,  $Bb$ ,  $Cc$ ,  $Dd$  du tétraèdre sont égales et qu'il en est de même des hauteurs  $D\hat{d}_c$ ,  $Ch_c$  dans les faces  $ABD$ ,  $ABC$ . Il en résulte l'égalité des triangles rectangles  $Dd\hat{d}_c$ ,  $Cch_c$  dont les plans sont perpendiculaires à

Fig. 1.



l'arête  $AB$ , et par suite le plan bissecteur intérieur du dièdre  $AB$  coupe  $DC$  en son milieu. La droite qui joint les milieux des deux arêtes opposées est donc l'intersection des plans bissecteurs intérieurs des dièdres correspondants; autrement dit, le centre de la sphère inscrite coïncide avec le centre de gravité  $G$  du tétraèdre, et le rayon de cette sphère est égal au quart de la hauteur.

En outre, le segment  $DC$ , divisé en deux parties égales par le plan bissecteur intérieur du dièdre  $AB$  aux faces duquel il est limité, est parallèle au deuxième plan bissecteur de ce dièdre. En d'autres termes, le plan bissecteur intérieur du dièdre  $AB$  est perpendiculaire à tout plan parallèle aux arêtes  $AB$  et  $DC$ ; la droite joignant les milieux de deux arêtes opposées est donc la perpendiculaire commune à ces deux arêtes; le centre de la sphère circonscrite coïncide aussi avec le point  $G$ ;

les sphères inscrites et circonscrites sont concentriques. Il en résulte que les cercles circonscrits aux faces du tétraèdre sont égaux. Deux triangles tels que ABC, ABD ont donc même base, même aire, et même rayon de cercle circonscrit. Dans de telles conditions, on se rend compte aisément que ces triangles sont eux-mêmes égaux. Les faces du tétraèdre ABCD sont donc non seulement équivalentes, mais égales.

Si l'on suppose que ces faces sont des triangles absolument quelconques, cette égalité n'est possible que si l'on a

$$DC = AB, \quad DA = BC, \quad DB = AC,$$

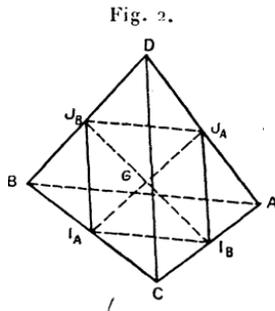
autrement dit si les arêtes opposées sont égales deux à deux.

*En résumé, dans un tel tétraèdre :*

1° *Les faces sont égales, les arêtes opposées égales deux à deux.*

2° *Les sphères inscrite et circonscrite sont concentriques et leur centre commun coïncide avec le centre de gravité du tétraèdre.*

*Remarque.* — Le parallélogramme  $I_A I_B J_A J_B$  formé



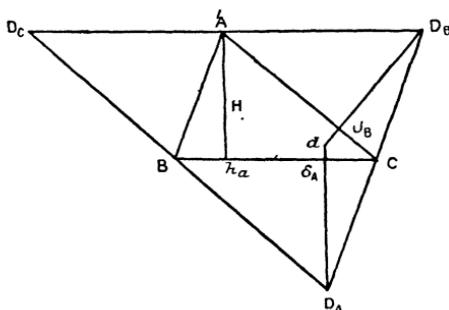
par les milieux de quatre arêtes opposées deux à deux

est ici un losange. Les droites qui joignent les milieux des arêtes opposées sont rectangulaires. Le tétraèdre se reproduit par des rotations de  $180^\circ$  autour de ces droites.

Il est dès lors facile de construire un tel tétraèdre connaissant une de ses faces ABC. Le quatrième sommet D est à l'intersection des sphères décrites de A, B, C, avec BC, AC, AB comme rayons respectifs. Nous obtenons ainsi deux points D et D', auxquels correspondent deux tétraèdres symétriques. On verra un peu plus loin la condition de réalité de ces deux points.

*Remarque.* — Si nous désignons par  $g$  le centre de

Fig. 3.



gravité du triangle ABC,  $O$  le centre de son cercle circonscrit, la projection du point D sur le plan de la face ABC se fera en un point  $d$  la droite  $g^0$  tel que

$$\overline{Od} = -3\overline{Og},$$

comme d'ailleurs  $2\overline{Og} = \overline{gH}$  ( $H$  étant l'orthocentre du triangle ABC,

$$\overline{gd} = -2\overline{gH};$$

par suite  $d$  est l'orthocentre du triangle  $D_A D_B D_C$  homothétique dont le rapport  $-2$  du triangle ABC

par rapport à son centre de gravité. De ce fait et de l'égalité des arêtes opposées, il résulte que si nous rabattons les plans des faces de sommet D sur le plan de la face ABC, la figure ainsi formée par l'ensemble de ces triangles sera précisément le triangle  $D_A D_B D_C$  considéré.

*Calcul des éléments du tétraèdre ABCD.* — Nous désignerons dans ce qui suit par  $r$  le rayon de la sphère inscrite,  $R$  celui de la sphère circonscrite,  $h$  la hauteur du tétraèdre; par  $V$  son volume,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  les dièdres relatifs aux arêtes BC, CA, AB;  $h_a$  la hauteur du triangle ABC relative au sommet A,  $\rho$  le rayon du cercle circonscrit à ce triangle, et  $S$  sa surface.

Dans le triangle rectangle  $Dd\delta_A$ , nous avons la relation

$$\overline{Dd}^2 = h^2 = \overline{D\delta_A}^2 - \overline{d\delta_A}^2 = h_a^2 - \overline{d\delta_A}^2.$$

Or

$$\overline{d\delta_A} = |Dd - h_a| = |2AH - h_a|.$$

Un calcul simple donne

$$d\delta_A = \left| \frac{2bc \cos A}{h_a} - h_a \right| \quad \text{avec} \quad h_a = \frac{bc \sin A}{a};$$

d'où

$$\begin{aligned} h^2 &= 4bc \cos A - 4a^2 \cot^2 A, \\ h^2 &= 2 \left[ (b^2 + c^2 + a^2) - \frac{2a^2}{\sin^2 A} \right], \\ h^2 &= 2[(b^2 + c^2 + a^2) - 8\rho^2], \\ r^2 &= \frac{h^2}{16} = \frac{b^2 + c^2 + a^2}{8} - \rho^2, \\ R^2 &= r^2 + \rho^2 = \frac{b^2 + c^2 + a^2}{8}; \end{aligned}$$

$h$  peut s'exprimer autrement; remplaçons dans l'expression précédente  $a$ ,  $b$ ,  $c$  respectivement par

---

(<sup>1</sup>) Le lecteur constatera facilement qu'on peut simplifier l'exposition précédente, en observant que les tétraèdres de l'énoncé sont inscrits dans des parallélépipèdes rectangles.

$2\rho \sin A, 2\rho \sin B, 2\rho \sin C,$

$$h^2 = 16\rho^2 \left[ \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{2} - 1 \right],$$

$$h^2 = 16\rho^2 \left[ \frac{\sin^2(B+C) + \sin^2 B + \sin^2 C}{2} - 1 \right]$$

$$= 16\rho^2 \cos A \cos B \cos C.$$

Cette formule nous montre que la condition nécessaire et suffisante pour que les points D et D<sub>1</sub> soient réels est que les angles ABC soient aigus. Cette condition, d'ailleurs, exprime simplement que dans un trièdre du tétraèdre une face est plus petite que la somme des deux autres.

Le volume V nous sera fourni par la formule

$$V = \frac{hS}{3} \quad \text{ou} \quad V^2 = \frac{h^2 S^2}{9};$$

or

$$S^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{16\rho^2}, \quad h^2 = 16\rho^2 \cos A \cos B \cos C,$$

$$V^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{9} \cos A \cos B \cos C.$$

Calculons enfin les cosinus des dièdres du tétraèdre. Si O<sub>A</sub> désigne la projection du point O sur le côté BC

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{OO_A} = \frac{r}{\rho \cos A},$$

$$\tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\rho^2 \cos A \cos B \cos C}{\rho^2 \cos^2 A} = \frac{\cos B \cos C}{\cos A},$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \frac{\cos B \cos C}{\cos A}}{1 + \frac{\cos B \cos C}{\cos A}} = \frac{\sin B \sin C - 2 \cos B \cos C}{\sin B \sin C},$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{2}{\tan B \tan C},$$

$$\cos \beta = 1 - \frac{2}{\tan C \tan A},$$

$$\cos \gamma = 1 - \frac{2}{\tan B \tan A}.$$

II. Les lieux que nous nous proposons de rechercher dans cette question étant évidemment des surfaces de révolution autour de la droite AB, il nous suffira, pour les déterminer, de déterminer leur méridienne, en fixant également le plan ABC.

*a. Où doit être le point H orthocentre du triangle ABC pour que les dièdres du tétraèdre soient tous aigus?* La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que le point  $d$  soit à l'intérieur du triangle ABC. Un dièdre ne pourra devenir obtus que si le point  $d$  traverse l'un des côtés du triangle. Cherchons donc la condition pour que la projection  $d$  du point D tombe sur l'un de ces côtés.

1° Pour que  $d$  soit sur BC, il faut et il suffit que

$$D_A d = A h_a,$$

ou

$$2AH = A h_a.$$

Le point H est alors milieu, de  $A h_a$ , et le lieu de ce point est la circonférence  $\Gamma_A$  décrite sur  $AI_c$ ,  $I_c$  étant le milieu de AB.

2° Pour que  $d$  soit sur AC, H doit être sur la circonférence  $\Gamma_B$  de diamètre  $BI_c$ .

3° Pour que  $d$  soit sur AB, H doit être le milieu de  $Ch_c$ .

Or

$$Ch_c = B h_c \operatorname{tang} B = \frac{B h_c \cdot A h_c}{H h_c};$$

d'où

$$\overline{2H h_c}^2 = B h_c A h_c.$$

Si je considère sur  $Ch_c$  le point E tel que

$$h_c E = \sqrt{2} h^c H,$$

ce point tel que

$$\overline{h_c E}^2 = A h_c B h_c$$

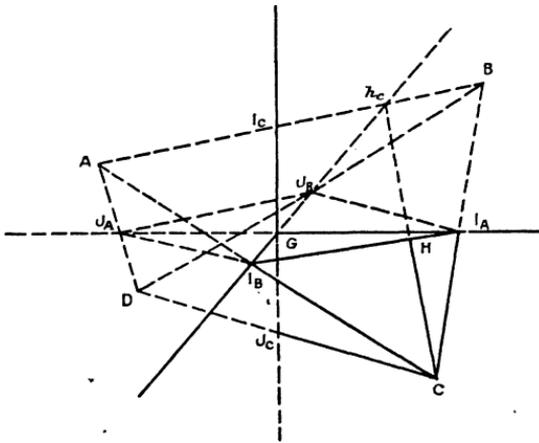
décrivra la circonférence de diamètre AB; le point H décrivra donc l'ellipse ( $\epsilon$ ) de grand axe AB, obtenue en réduisant les coordonnées de cette circonférence dans le rapport  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

En rapprochant tous ces résultats, on obtient facilement que *la condition nécessaire et suffisante pour que les dièdres du tétraèdre soient tous aigus, est que le point H soit dans la portion de plan extérieure aux cercles  $\Gamma_A$  et  $\Gamma_B$  et intérieure à l'ellipse ( $\epsilon$ )*. Les cercles  $\Gamma_A$  et  $\Gamma_B$  sont d'ailleurs les cercles osculateurs à l'ellipse ( $\epsilon$ ) aux extrémités du grand axe.

*b. Quel lieu doit décrire H pour que les quatre orthocentres soient dans un même plan ?*

Représentons le tétraèdre ABCD et ses trois axes

Fig. 4.



de rotation (droites joignant les milieux des arêtes opposées)  $Gx$ ,  $Gy$ ,  $Gz$ . La rotation de  $180^\circ$  autour de  $x'Gx$  amène A sur D, B sur C; cette rotation échange deux à deux les quatre orthocentres; de

même les rotations autour de  $y'Gy$  et  $z'Gz$ . Si les quatre orthocentres sont dans un même plan, ce plan est conservé dans ces trois rotations; c'est donc un des plans de coordonnées. Le quadrilatère formé par ces orthocentres admet d'ailleurs dans son plan deux axes de symétrie rectangulaires passant par G et dans chacune de ces symétries ses sommets s'échangent deux à deux. Ce quadrilatère est donc un rectangle situé dans l'un des plans  $xOy$ ,  $yOz$ ,  $zOx$ , ayant pour centre G et ses côtés parallèles aux axes.

Supposons le rectangle dans le plan  $xOy$ ; ce plan coupe le tétraèdre suivant le parallélogramme  $I_A I_B J_A J_B$ , et le rectangle des orthocentres est inscrit dans ce parallélogramme, H est donc le milieu de  $Ch_c$ . D'ailleurs s'il en est ainsi, il est clair que les quatre orthocentres seront dans le plan  $xOx$ . *Nous retrouvons pour lieu de H l'ellipse précédente* ( $\varepsilon$ ).

*Pour que les quatre orthocentres soient dans l'un des deux autres plans de coordonnées, H doit décrire l'un des cercles  $\Gamma_A$  ou  $\Gamma_B$ .*

III. Examinons tout d'abord si les faces d'un tétraèdre répondant à la question ont leurs faces équivalentes. — Le centre du cercle circonscrit à une face quelconque est le point de contact de cette face avec la sphère ( $s$ ). Les cercles circonscrits aux quatre faces sont donc égaux. Par suite, deux angles tels que  $\widehat{ADB}$  et  $\widehat{ACB}$  sont égaux ou supplémentaires.

Supposons en premier lieu que la sphère ( $s$ ) soit la sphère inscrite au tétraèdre (T). Alors

$$\begin{array}{ll} \widehat{ADB} = \widehat{ACB} = C, & \widehat{CAD} = \widehat{CBD} = C'. \\ \widehat{ADC} = \widehat{ABC} = B, & \widehat{BCD} = \widehat{BAD} = B'. \\ \widehat{BDC} = \widehat{BAC} = A, & \widehat{ABD} = \widehat{ACD} = A'. \end{array}$$

Écrivons que, dans chaque face, la somme des angles est égale à deux droits

$$2^{dr} = A + B + C = A + B' + C' = A' + B + C' = A' + B' + C.$$

On en déduit

$$A = A', \quad B = B', \quad C = C'.$$

Les faces du tétraèdre sont donc semblables. Comme elles ont une dimension commune (le rayon du cercle circonscrit), elles sont égales.

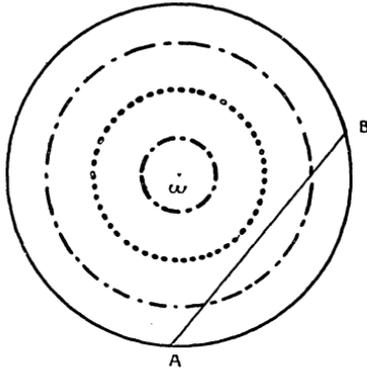
Si la sphère ( $s$ ) n'est pas inscrite, ou bien elle est *ex-inscrite*, dans le trièdre de sommet D par exemple; les angles en D sont alors les suppléments des angles A, B, C, et leur somme égale à quatre droits, ce qui est impossible, ou bien elle est située dans un comble (DC par exemple); le centre du cercle circonscrit doit être situé par rapport au triangle ABC dans l'angle opposé par le sommet à l'angle en C, ce qui ne saurait avoir lieu. Ces deux dernières hypothèses sont à écarter. *La sphère ( $s$ ) est la sphère inscrite à un tétraèdre (T) et les faces de ce tétraèdre sont équivalentes.*

Or, il est facile de voir que, dans un tétraèdre à faces équivalentes, le rapport  $\frac{R}{r}$  peut prendre toute valeur supérieure à 3 et n'atteint cette valeur limite que lorsque le centre de gravité d'une face coïncide avec son orthocentre, c'est-à-dire lorsque les faces sont des triangles équilatéraux. le tétraèdre est alors régulier. Par suite l'unique condition à laquelle doivent satisfaire les rayons des sphères (S) et ( $s$ ) est que le rapport  $\frac{R}{r}$  soit supérieur à 3.

*Condition pour que  $\Delta$  soit une arête.* — D'abord ( $\Delta$ ) doit être sécante à (S) et non à ( $s$ ). Donnons-nous ( $\Delta$ )

et soit  $\omega$  le cercle de section de (S) par le plan tangent à (s) mené par  $\Delta$ . La hauteur du tétraèdre est d'ailleurs connue et égale à  $4r$ . Donc D appartient au cercle de

Fig. 5.



section de (S) par le plan parallèle au plan ABC à la distance  $4r$ . Ce cercle se projette sur le plan du cercle  $\omega$  suivant le cercle pointillé. L'orthocentre H du triangle ABC doit être sur ce cercle; il est aussi sur l'arc supplémentaire de l'arc sous-tendu par AB. Pour que cet arc coupe le cercle pointillé, AB doit couper le cercle moyen entre les deux cercles précédents et doit être extérieur à celui qui a pour rayon la demi-différence des rayons de ces cercles. Si  $d$  désigne sa distance au centre commun O des sphères (S) et (s), un calcul simple montre que  $d$  doit satisfaire à la double inégalité

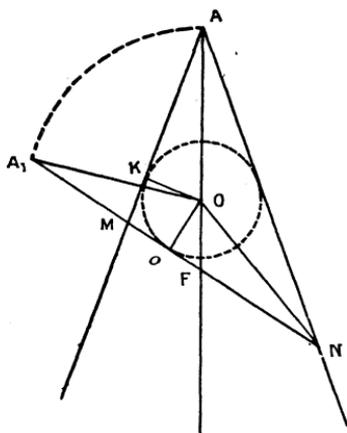
$$\frac{R^2 - 3r^2}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(R^2 - r^2)(R^2 - 9r^2)} < d$$

$$< \frac{R^2 - 3r^2}{2} + \sqrt{(R^2 - r^2)(R^2 - 9r^2)}.$$

*Remarque.* — On peut obtenir tous ces résultats

par une voie un peu différente. Supposons acquis que la sphère ( $s$ ) ne puisse être que la sphère inscrite à un tétraèdre ABCD supposé existant, satisfaisant aux conditions de l'énoncé. Le triangle BCD est inscrit au cercle (C) section de (S) par le plan BCD et circons-

Fig. 6.



crit à l'ellipse (E) section par ce même plan du cône de révolution de sommet A circonscrit à ( $s$ ). Le point de contact O du plan BCD avec ( $s$ ) est foyer de (E) et est centre de (C). D'ailleurs le théorème de Poncelet nous montre que le second foyer de (E) est l'orthocentre H du triangle BCD. On en déduit que (C) est cercle directeur de (E).

La figure ci-dessus est la figure du théorème de Daudelin. Les triangles OKA et  $O_0A_1$  sont égaux.

Donc

$$OA_1 = AK,$$

$OA_1$ , grand axe de l'ellipse (E), est égal à MN.

Donc

$$AK = MN.$$

Si nous désignons par  $2p$  le périmètre de  $AMN$

$$\begin{aligned} AK &= p - MN; \\ 2MN &= p, \quad AM + AN = 3MN. \end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\frac{AO}{OF} = \frac{AM}{MF}, \quad MF = AM \frac{MN}{AM + AN} = \frac{AM}{3}.$$

Par suite

$$AO = 3OF.$$

Il en résulte que le point  $O$  centre commun de  $(S)$  et  $(s)$  est centre de gravité du tétraèdre. La droite joignant les milieux de deux arêtes opposées est leur perpendiculaire commune. Le tétraèdre est équifacial.

On peut remonter les calculs en sens inverse, et l'on voit que, pourvu que  $F$  soit extérieur à  $(S)$ , il existe des tétraèdres  $(T)$ . On retrouve la condition  $R > 3r$ .

Pour qu'une droite  $AB$  soit arête d'un tétraèdre  $(T)$  il faut et il suffit que la droite  $BF$  soit extérieure à  $(s)$ . On vérifie facilement que l'on retombe sur la double inégalité écrite plus haut. Cette méthode nous donne du même coup la solution d'une des questions proposées dans la dernière partie. Si le point  $A$  et le plan  $BCD$  sont fixes, il résulte de ce qui précède que l'enveloppe des côtés  $BC$ ,  $CD$ ,  $DB$  est l'ellipsc  $(E)$ .

IV. Les centres de gravité et les orthocentres des faces d'un tétraèdre  $(T)$  quelconque sont situés sur des sphères concentriques aux deux premières et ayant respectivement pour rayons  $\frac{R}{3}$  et  $\sqrt{R^2 - 8r^2}$ . Les centres de gravité sont évidemment les sommets d'un tétraèdre équifacial et il en est de même des orthocentres, le tétraèdre qu'ils forment admettant mêmes axes de symétrie que le tétraèdre  $(T)$  primitif.

*Étude des sphères* ( $\Sigma$ ). — Désignons toujours par F le centre de gravité de la face BCD. Les points AOFA' forment une division harmonique. Donc

$$\frac{\overline{OF}}{\overline{OA}} = -\frac{\overline{A'F}}{\overline{A'A}} = -\frac{1}{3},$$

$$\overline{OA} = -\overline{OA'}.$$

Le centre A' de la sphère ex-inscrite dans le trièdre de sommet A est donc le symétrique du point A par rapport au centre commun des sphères inscrite et circonscrite. Le rayon de cette sphère est d'ailleurs égal à la moitié de la hauteur du tétraèdre. Même remarque pour les points B' C' D'.

Le point A' appartient d'ailleurs aux sphères de diamètre BC, CD, BD; car

$$\overline{A'B}^2 = 4R^2 - \overline{AB}^2,$$

$$\overline{A'C}^2 = 4R^2 - \overline{AC}^2,$$

$$\overline{A'B}^2 + \overline{A'C}^2 = 8R^2 - (\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2)$$

$$= 8R^2 - \overline{DC}^2 + \overline{DB}^2 = \overline{BC}^2,$$

car

$$8R^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{DC}^2 \quad (\text{voir I}).$$

Il appartient donc aussi aux sphères de diamètre BL, L étant le pied de la bissectrice intérieure de l'angle en B.

Donc

$$\frac{A'I}{A'I_1} = \frac{LI}{LI_1} = \frac{l}{l_1},$$

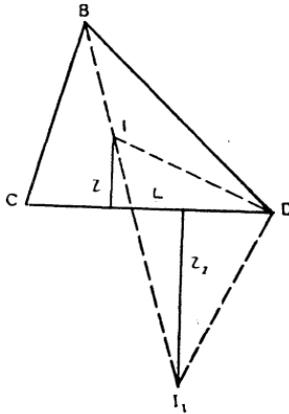
I, I<sub>1</sub>, l, l<sub>1</sub> étant respectivement les centres et les rayons du cercle inscrit et d'un cercle ex-inscrit au triangle BCD.

Par suite

$$\frac{A'I}{l} = \frac{A'I_1}{l_1} = \frac{A'I_2}{l_2} = \frac{A'I_3}{l_3}.$$

D'ailleurs le cône de sommet  $A'$  et ayant pour base le cercle inscrit est capable d'un trièdre trirectangle circonscrit. Il est donc capable d'une infinité de trièdres trirectangles. On obtient ainsi une infinité de triangles BCD. On peut montrer qu'il est possible d'obtenir

Fig. 7.



ainsi un triangle semblable à un triangle quelconque donné à l'avance. [Ce sont des triangles circonscrits à un cercle fixe et inscrits à une conique fixe], par suite un triangle coïncidant avec la base d'un tétraèdre (T). Le rapport  $\frac{A'I}{l}$ , ainsi que ceux qui lui sont égaux, est donc constant <sup>(1)</sup>.

On pourrait démontrer de même que le rapport  $\frac{A'O}{\rho}$  est constant,  $\rho$  désignant le rayon du cercle circonscrit au triangle BCD.

Il n'existe pas de sphère  $\Sigma$  située dans un comble. Les plans bissecteurs de deux arêtes opposées étant parallèles, le centre d'une telle sphère est en effet rejeté à l'infini.

(1) Il est facile à voir que ce rapport est égal à  $\sqrt{2}$ .

---

**CERTIFICATS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE.**


---

**ÉPREUVE THÉORIQUE.** — *Un système sans frottement peut se mouvoir dans un plan vertical fixe  $xOy$  sous la seule action de la pesanteur. Ce système est constitué par un disque circulaire homogène de rayon  $R$ , de masse  $M$ , assujéti à rester en contact avec l'horizontal  $Ox$ , en même temps que par une tige rectiligne homogène  $AB$ , de longueur  $2l$ , de masse  $M'$ , qui s'appuie sur la circonférence du disque, à laquelle elle est tangente, tandis que l'extrémité  $A$  de cette tige glisse sur  $Ox$ .*

1° *En se plaçant dans un intervalle de temps où ces liaisons sont simultanément réalisées, former et discuter les équations différentielles qui déterminent en fonction du temps les trois paramètres*

$$\overline{OA} = x, \quad (\widehat{Ax, AB}) = \theta, \quad (\widehat{Ax, CD}) = \varphi,$$

$C$  désignant le centre du disque et  $CD$  un rayon marqué sur le disque.

2° *Calculer les réactions de  $Ox$  sur la tige et sur le disque.*

3° *On fixe brusquement l'extrémité  $A$  de la tige. Trouver le nouvel état des vitesses du système après le choc ainsi produit. (4 heures.)*

(Poitiers, novembre 1924.)

**ÉPREUVE PRATIQUE.** — *Déterminer analytiquement et géométriquement le mouvement du trièdre trirectangle  $Oxyz$  autour de son sommet  $O$ , sachant que son arête  $Oz$  fait un angle constant  $\vartheta = \alpha$  avec la verticale ascendante  $Oz_1$ ; que la rotation instantanée  $\vec{\Omega}$  est située dans le plan  $xOy$  et fait avec  $Ox$  un angle égal à  $\lambda t$ , où  $\lambda$  désigne un coef-*

*ficient constant. Le plan  $zOz_1$ , ayant tourné de quatre droits autour de la verticale, montrer que la position finale de  $Oxyz$  est distincte de sa position initiale. Évaluer, en fonction de  $\alpha$ , l'amplitude de la rotation qui fait passer d'une position à l'autre. (2 heures.)*

(Novembre 1924.)

INDICATIONS SUR LA SOLUTION. — I. EPREUVE THÉORIQUE. — La force vive a pour expression

$$2T = M \left[ \left( x' - \frac{R\theta'}{1 - \cos\theta} \right)^2 + \frac{R^2}{2} \varphi'^2 \right] + M' \left( x'^2 - 2lx'\theta' \sin\theta + \frac{4}{3} l^2 \theta'^2 \right)$$

tandis que la fonction de forces est

$$U = -M'gl \sin\theta.$$

Les équations de Lagrange relatives aux paramètres  $\varphi$  et  $x$  (qui expriment respectivement le théorème du moment cinétique pour le mouvement du disque autour de son centre, et le théorème du mouvement du centre barre-disque en projection horizontale) donnent les intégrales premières

$$\varphi' = \varphi'_0, \\ M \left( x' - \frac{R\theta'}{1 - \cos\theta} \right) + M'(x' - l\theta' \sin\theta) = K,$$

qu'on peut adjoindre, pour déterminer le mouvement, à l'intégrale des forces vives  $2T = 2U + h$ . En éliminant  $x'$  et  $\varphi'$ , on obtient, pour définir le paramètre principal  $\theta$ , l'équation

$$\left\{ \frac{M}{M + M'} \left[ \sin\theta - \frac{R}{l(1 - \cos\theta)} \right]^2 + \cos^2\theta + \frac{1}{3} \right\} \theta'^2 = h - 2 \frac{g}{l} \sin\theta$$

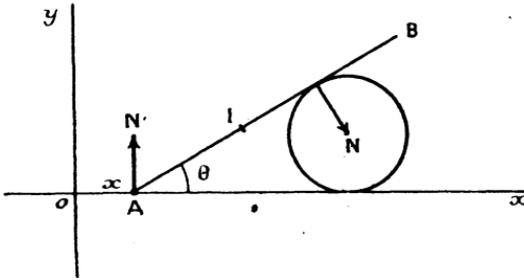
dont la discussion rappelle celle d'un mouvement pendulaire.

Pour effectuer les calculs des forces de liaison, employer de préférence les théorèmes généraux. On évalue d'abord la pression de la tige sur le disque, soient  $N \sin\theta$  et  $-N \cos\theta$  ses composantes. Alors  $N \sin\theta = Mx''$ ; la réaction de  $Ox$  sur le disque est  $N \cos\theta$ . Enfin, si l'on applique au mouve-

ment de la tige le théorème du moment cinétique par rapport à son milieu I, il vient

$$N \left( l - R \cot \frac{\theta}{2} \right) - l \cos \theta N' = \frac{M l^2}{3} \theta''.$$

Enfin, une fixation brusque de l'extrémité de la tige introduit une liaison persistante exprimée par  $x = \text{const.}$



La méthode analytique donne alors deux équations exprimant l'invariance de  $\frac{\partial T}{\partial \varphi'}$  et  $\frac{\partial T}{\partial \theta'}$ . La vitesse angulaire  $\varphi'$  n'est pas altérée. Quant à  $\theta'$ , elle prend une valeur  $\theta'_1$  définie par l'équation

$$M \left( x' - \frac{R \theta'}{1 - \cos \theta} \right) + M' (x' - l \theta' \sin \theta) + \theta'_1 \left( \frac{MR}{1 - \cos \theta} + M' l \sin \theta \right) = 0,$$

dans laquelle on laisse subsister les notations  $x'$ ,  $\theta'$  pour désigner des valeurs antérieures au choc.

ÉPREUVE PRATIQUE. — En vertu de la constance de  $\theta$ , les composantes de la rotation instantanée se réduisent à

$$p = \psi' \sin \theta \sin \varphi, \quad q = \psi' \sin \theta \cos \varphi, \quad r = \psi' \cos \theta + \varphi'.$$

Par hypothèse,  $r$  est nul. Donc  $\psi' \cos \theta + \varphi' = 0$ . En outre, on peut écrire directement  $p = \omega \cos \lambda t$  et  $q = \omega \sin \lambda t$ ,  $\omega$  désignant la grandeur de  $\vec{\Omega}$ . On a ainsi

$$\psi' \sin \theta = \omega, \quad \frac{\pi}{2} - \varphi = \lambda t, \quad \varphi' = -\lambda,$$

$$\psi' = \frac{\lambda}{\cos \theta}, \quad \psi = -\frac{\lambda t}{\cos \theta}.$$

Ces formules permettent de déterminer le mouvement du trièdre et de constater que le plan  $xOy$  roule sans glisser sur un cône de révolution d'axe  $Oz_1$  et de demi-angle au sommet  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ . Quant à l'amplitude de rotation demandée, c'est celle de l'angle obtenu par développement de la surface latérale du cône.

### SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES.

2445.

(1920, p. 279; 1922-1923 p. 160.)

*Une ellipse étant donnée, il existe pour chaque tangente deux cercles passant par les foyers et tangents à cette droite. Les points de contact des deux cercles avec la droite sont sur les tangentes à la courbe aux sommets du petit axe; les deux cercles se coupent sous un angle constant.*

G. F. et R. B.

#### SOLUTION

Par M. G. ROY.

Soit  $MM'$  une tangente à l'ellipse qui rencontre les tangentes à la courbe aux sommets  $B$  et  $B'$  du petit axe en  $M$  et  $M'$  respectivement; si  $K$  est l'intersection de  $MM'$  avec le grand axe, on a

$$(1) \quad \overline{KF} \cdot \overline{KF'} = \overline{KO}^2 - (a^2 - b^2)$$

et

$$\begin{aligned} \overline{MM'}^2 &= 4b^2 + (\overline{BM} - \overline{B'M'})^2 \\ &= 4b^2 + (\overline{BM} + \overline{B'M'})^2 - 4\overline{BM} \cdot \overline{B'M'} \\ &= 4b^2 + \overline{KO}^2 - 4a^2; \end{aligned}$$

d'où

$$(2) \quad \overline{KM}^2 = \overline{KM'}^2 = \overline{KO}^2 - (a^2 - b^2).$$

Les relations (1) et (2) montrent que les cercles  $FF'M$  et  $FF'M'$  sont tangents à  $MM'$ .

Si  $\omega$  et  $\omega'$  sont les centres de ces cercles et  $\rho$  et  $\rho'$  les rayons, on a en considérant les triangles semblables  $\omega BM$  et  $M'mM$  ( $m$  pied de la perpendiculaire abaissée de  $M$  sur la tangente

en  $B'$ ),  $\omega' B' M'$  et  $M' m M$ ,

$$\rho = BM \cdot \frac{MM'}{2b}, \quad \rho' = B'M' \cdot \frac{MM'}{2b},$$

et

$$\overline{B\omega} = \overline{BM} \cdot \frac{\overline{BM} - \overline{B'M'}}{\overline{B'B}}, \quad \overline{B'\omega'} = \overline{B'M'} \cdot \frac{\overline{BM} - \overline{B'M'}}{\overline{B'B}},$$

les deux dernières relations donnent

$$\overline{\omega'\omega} = \frac{\overline{MM'}^2}{\overline{B'B}}.$$

Si  $V$  est l'angle sous lequel se coupent les deux cercles

$$\overline{\omega'\omega}^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos V$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{\overline{MM'}^4}{4b^2} &= \frac{\overline{MM'}^2}{4b^2} (\overline{BM}^2 + \overline{B'M'}^2) - 2 \frac{\overline{MM'}^2}{4b^2} \overline{BM} \cdot \overline{B'M'} \cos V \\ &= \frac{\overline{MM'}^2}{4b^2} (\overline{MM'}^2 - 4b^2) + \frac{2a^2}{4b^2} \overline{MM'}^2 (1 - \cos V), \\ \cos V &= \frac{a^2 - 2b^2}{a^2}. \end{aligned}$$

Si  $a = b\sqrt{2}$  les deux cercles sont orthogonaux.

REMARQUE AU SUJET DE LA QUESTION 2352 (1924-1925, p. 196).

La propriété qui fait l'objet de cette question est un cas particulier de la suivante :

Si deux surfaces réglées  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  sont coupées par deux plans parallèles  $P$  et  $P'$  de telle façon que les sections soient respectivement équivalentes et si de plus les sections de  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  par le plan  $\pi$  équidistant de  $P$  et  $P'$  sont équivalents, les volumes  $V$  et  $V'$  limités par  $\Sigma$ ,  $P$  et  $P'$  d'une part,  $\Sigma'$ ,  $P$  et  $P'$  d'autre part sont équivalents.

Cette proposition est une conséquence immédiate de la formule de Sarrus.

L'ellipsoïde étant une surface réglée, le théorème ci-dessus lui est applicable. On peut d'ailleurs remplacer dans l'énoncé de la question 2352,  $AA'$ ,  $BB'$  et  $CC'$  par trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde.

G. ROY.

---



---

**TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.**
(TOME III, 5<sup>e</sup> SÉRIE, 1924-1925.)

---

La classification adoptée est celle de l'*Index*  
du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*.

---

**Analyse mathématique.**

	Pages.
<b>A 3</b>	Remarque sur une inégalité concernant les modules des racines d'une équation quelconque, par M. W. Stozek..... 252
<b>B 12</b>	Sur quelques applications des méthodes vectorielles, par M. G. Bouligand..... 245
<b>B</b>	Sur l'enseignement des notions relatives aux infiniment grands et aux infiniment petits dans la classe de Mathématiques spéciales, par M. P. Lévy ..... 178, 201
<b>D 1 a</b>	Sur quelques fonctions discontinues ou dépourvues de dérivée, par M. Th. Leconte ..... 59
<b>D 2 c</b>	Un théorème sur les produits infinis, par M. J. Haag..... 195
<b>D 6 c et E 1 b</b>	Sur la décomposition en facteurs de $\text{Sin } \pi z$ et de $\Gamma(z)$ , par M. G. Valiron..... 241
<b>D 6 f 2</b>	Sur une classe de fonctions entières, par M. G. Valiron..... 361
<b>E 1</b>	Sur la fonction eulérienne, par M. J. Haag.. 121
<b>H<sup>5</sup> f g</b>	Sur les polynomes hypergéométriques, par M. A. Angelesco ..... 161
<b>H 8</b>	Sur quelques équations non linéaires aux dérivées partielles du premier ordre, par M. A. Buhl ..... 365

		Pages.
<b>H 10</b>	Sur les singularités d'un passage à la limite effectué dans la solution d'une équation aux dérivées partielles, par <i>M. M. Roy</i> .....	321
<b>J 4</b>	Une remarque sur la théorie des groupes finis, par <i>M. G. Cerf</i> .....	58

### Géométrie.

<b>K' 1 c</b>	Généralisation de la notion de points réciproques, par <i>M. E. Weber</i> .....	89
<b>L' 3</b>	Les propriétés diamétrales des coniques déduites de la définition focale, par <i>M. A. Bloch</i> .....	70
<b>L' 7</b>	Sur les cercles focaux, par <i>M. R. Garnier</i> ....	9
<b>L' 17 d</b>	Problème de Poncelet et problème analogue, par <i>M. B. Gambier</i> .....	256, 281
<b>M</b>	Sur la génération des courbes et surfaces, par <i>M. L. Pomey</i> .....	81
<b>M' 1 b</b>	Sur les lieux algébriques décomposables, par <i>M. Ch. Bioche</i> .....	146
<b>M' 5 i</b>	Sur les faisceaux de cubiques planes cuspidales, par <i>M. L. Godeaux</i> .....	12
<b>M' 6 b</b>	Sur la quartique circulaire dite Cappa, par <i>M. M. d'Ocagne</i> .....	153
<b>M' 4 i δ</b>	Démonstrations élémentaires des propriétés fondamentales du tore, par <i>M. R. Bricard</i> ..	308
<b>M' 2 d et M' k</b>	Sur une propriété de la développante de cercle et de l'hélicoïde développable, par <i>M. P. Vicensini</i> .....	147
<b>M' k</b>	Sur les volumes tournants, par <i>M. P. Papillon</i> .....	348
<b>N' 1</b>	Sur un point de la théorie des complexes de droites, par <i>M. E. Laine</i> .....	300
<b>N' 1 b</b>	Sur quelques applications des méthodes vectorielles, par <i>M. G. Bouligand</i> .....	245
<b>O' 2 a</b>	Sur les aires et les courbes supplémentaires en géométrie sphérique, par <i>M. R. Bricard</i> ....	41
<b>O' 5 b</b>	La semi-continuité en Géométrie élémentaire, par <i>M. M. Fréchet</i> .....	1
<b>O 8 d</b>	Sur le mouvement à deux paramètres autour d'un point fixe, par <i>M. R. Bricard</i> .....	328

### Mathématiques appliquées.

<b>R 6 b</b>	Sur les équations de Lagrange et le mouvement d'un système non holonome, par <i>M. Et. Delassus</i> .....	191
--------------	---	-----

	Pages.
<b>R 9</b>	Sur l'indétermination de certains problèmes de frottement, par M. H. Béghin..... 343
<b>R 9 b</b>	Un problème de percussions, par M. G. Bouligand..... 293
<b>V 1 a</b>	Sur les théories vectorielles et sur la cinématique, par M. R. Bricard..... 24

### Questions d'examens et concours.

Concours d'agrégation, 1922 :	
Solution de la question de Mathématiques élémentaires, par MM. Chazel et Convers .....	376
Concours d'agrégation, 1924 :	
Solution de la question de Calcul différentiel et intégral, par M. B. Gambier.....	95
Remarque sur cette question, par M. P. Flamant.....	342
Solution de la question de Mathématiques spéciales, par M. B. Gambier .....	220
Certificats de Mathématiques générales.....	117, 155
Certificats de Mécanique rationnelle.....	74, 392
Certificats de Calcul différentiel et intégral.....	276, 313, 354
Concours d'admission à l'Ecole Polytechnique, 1924 :	
Solution, par M. A. Clodion.....	35

### Bibliographie.

G.-H. HALPHEN : Œuvres, tome IV et dernier. (S. F.)....	74
R. BRICARD : Petit Traité de Perspective (J. P.).....	92
G. JULIA : Leçons sur les Fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé. (J. P.).....	93
Marcel YVON : Méthodes et Problèmes de Géométrie. (R. B.)..	280
E. JOUGUET : Lectures de Mécanique. (J. P.).....	320
G. BOULIGAND : Leçons de Géométrie vectorielle. (J. P.).....	357

### Questions proposées.

2476.....	73
2477, 2478.....	74
2479 à 2482.....	360

Solutions de questions proposées.

	Pages.
2352, par M. <i>Philbert du Plessis</i> .....	196
Remarque sur cette question, par M. <i>G. Roy</i> .....	396
2409, par M. <i>R. B.</i> .....	238
2427, par M. <i>E. Bally</i> .....	240
2445, par M. <i>G. Roy</i> .....	395
2470, par M. <i>G. Roy</i> .....	358
2471, par M. le <i>C<sup>t</sup> P. Sicard</i> .....	197

BIBLIOTHÈQUE  
GÉNÉRALE  
UNIVERSITAIRE



---

---

**TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS.**

(TOME III, 5<sup>e</sup> SÉRIE, 1924-1925.)

---

- |                                |                           |
|--------------------------------|---------------------------|
| A. ANGELESCO, p. 161.          | E. LAINÉ, 300.            |
| R. B., 238, 280.               | Th. LECONTE, 59.          |
| E. BALLY, 240.                 | P. LÉVY, 178, 201.        |
| H. BÉGHIN, 343.                | M. D'OCAGNE, 153.         |
| Ch. BIOCHE, 146.               | J. P., 92, 93, 320.       |
| A. BLOCH, 70.                  | P. PAPILLON, 348.         |
| G. BOULIGAND, 245, 293.        | Philbert DU PLESSIS, 196. |
| R. BRICARD, 24, 41, 308, 328.  | L. POMEY, 81.             |
| A. BUHL, 365.                  | P. ROBERT, 76, 78.        |
| G. CERF, 58.                   | G. ROY, 358, 395, 396.    |
| CHAZEL et CONVERS, 376.        | M. ROY, 321.              |
| A. CLODION, 35.                | S.-F., 74.                |
| Et. DELASSUS, 191.             | A. SADE, 156, 158.        |
| P. FLAMANT, 342.               | C. P. SICARD, 197.        |
| M. FRÉCHET, 1.                 | W. STOZEK, 252.           |
| B. GAMBIER, 95, 220, 256, 281. | G. VALIRON, 241, 361.     |
| R. GARNIER, 9.                 | P. VINCENSINI, 147.       |
| L. GODEAUX, 12.                | E. WEBER, 89.             |
| J. HAAG, 121, 195.             | <i>Erratum</i> , 160.     |